Física Experimental III

Notas de aula: www.if.usp.br/suaide

LabFlex: www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex

Aula 11

Prof. Alexandre Suaide
Ramal: 7072
Ed. Oscar Sala (Pelletron), sala 246

Testes de compatibilidade

- Teste z
  - Imagine que foi realizada uma medida e queremos comparar ao seu "valor verdadeiro" – muitas vezes uma previsão teórica – Calculamos z

$$z = \frac{\bar{y} - \mu}{\sigma_{\bar{y}}}$$

  - y será compatível com μ se $|z| < 3$
  - Isso é razoável? Qual a origem do valor 3?

Probabilidade acumulada

- Podemos definir como probabilidade acumulada a grandeza:

$$P(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt \rightarrow \begin{cases} \text{Probabilidade da variável } t \\ \text{assumir um valor menor ou} \\ \text{igual a } x. \end{cases}$$

- Nesse caso, *p(t)* é a função densidade de probabilidade da grandeza estudada.

Teste-z

$$z = \frac{\bar{y} - \mu}{\sigma_{\bar{y}}}$$

- No teste-z, assume-se que a variável z possui F.D.P. normal
- Se a hipótese do teste for verdadeira z deve possuir valor verdadeiro zero e variância 1.

$$|z| < 3 \Rightarrow \sim 99.9\%$$

No teste-z, 3 significa que ~99.9% das medidas devem estar nesse intervalo, ou seja, a chance de obter um valor com $|z| > 3$ é desprezível

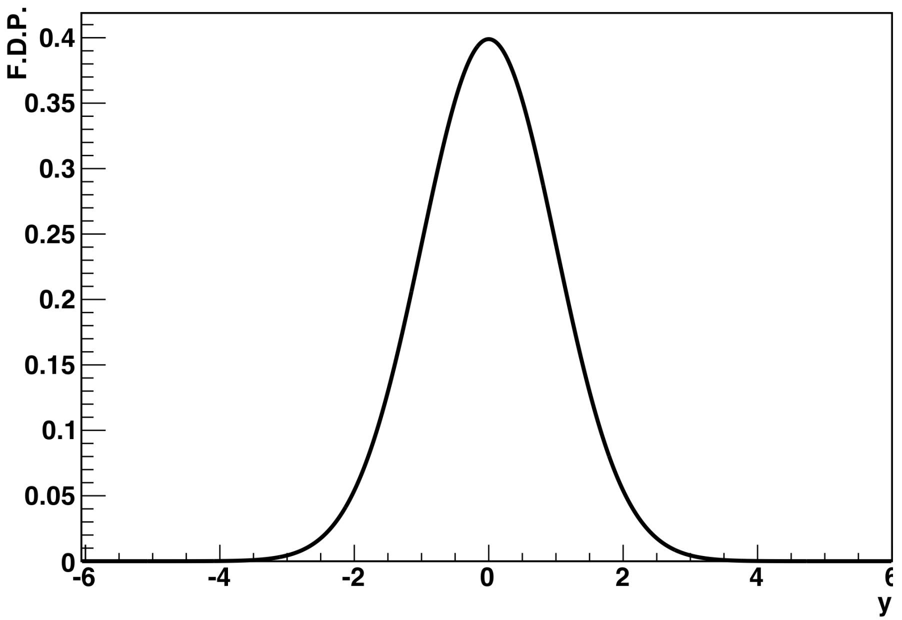
CUIDADO! Não usem o valor 3 a esmo. Entenda o seu significado

Teste-z

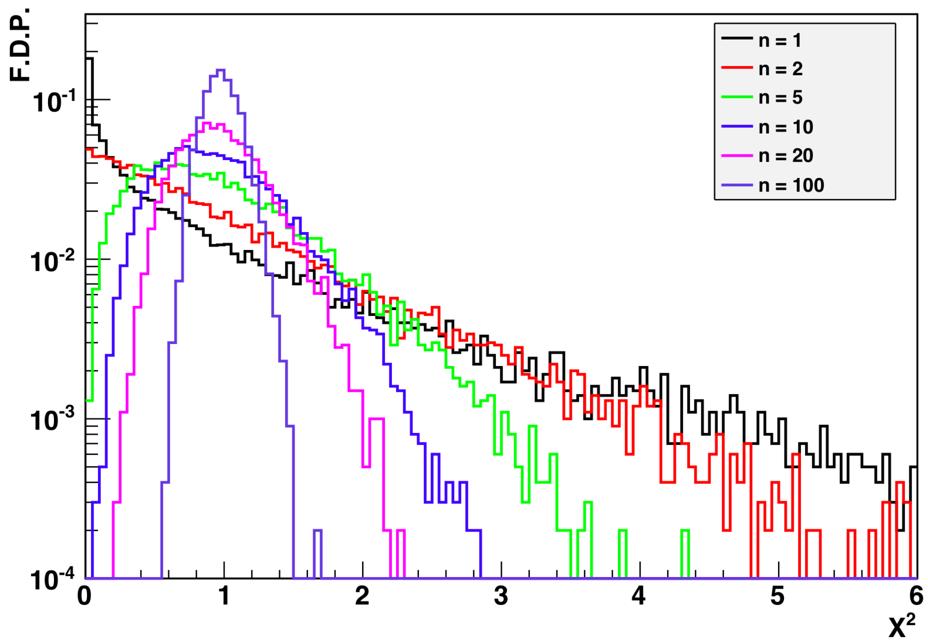
- Mas será que a variável z assume uma F.D.P. normal?

$$z = \frac{\bar{y} - \mu}{\sigma_{\bar{y}}}$$

F.D.P. para y



F.D.P. para σ



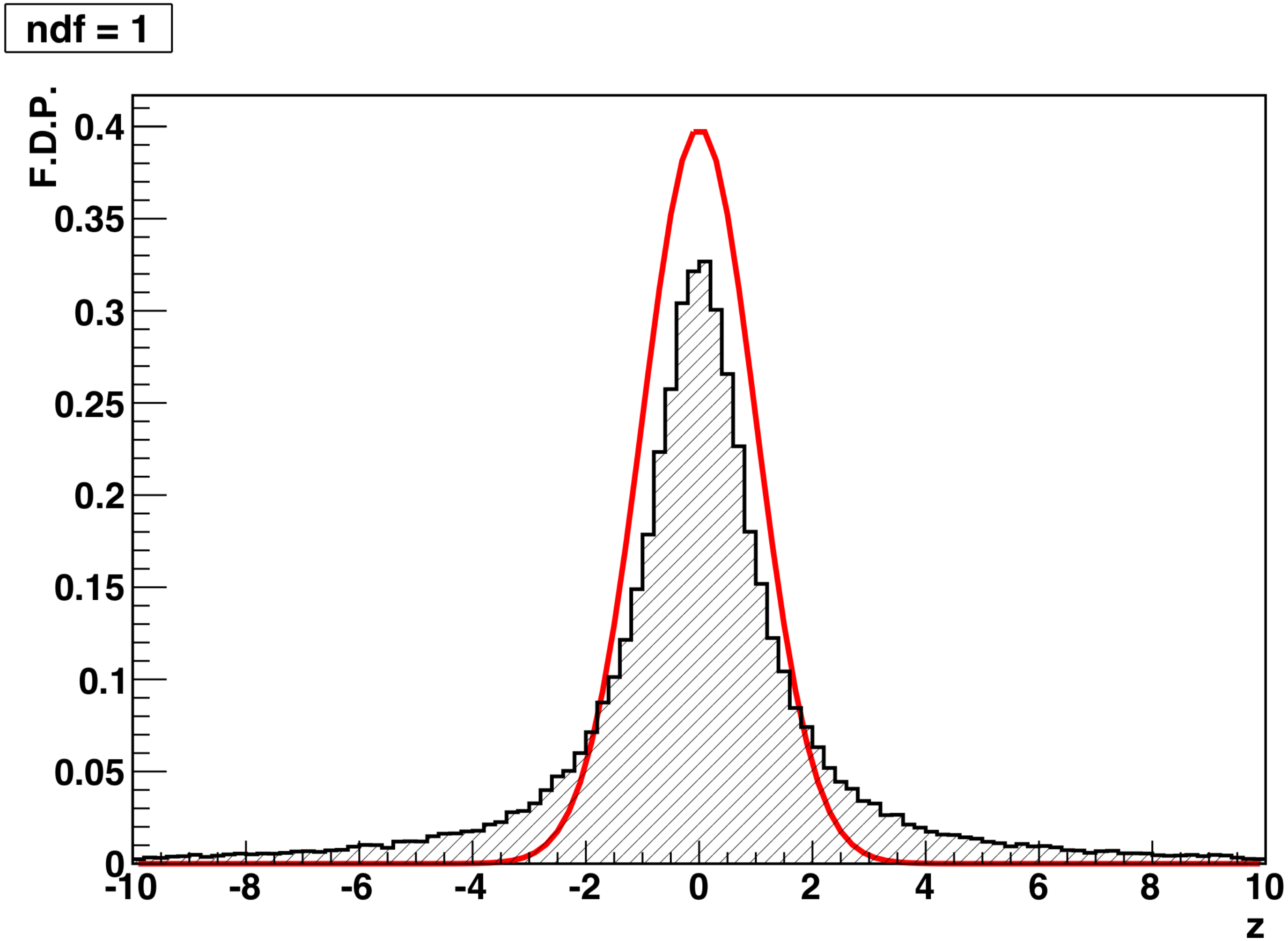
Teste-z

- Vamos fazer o mesmo procedimento (exp. virtuais) que fizemos na aula passada e obter a F.D.P. de z para diferentes números de graus de liberdade (ndf)

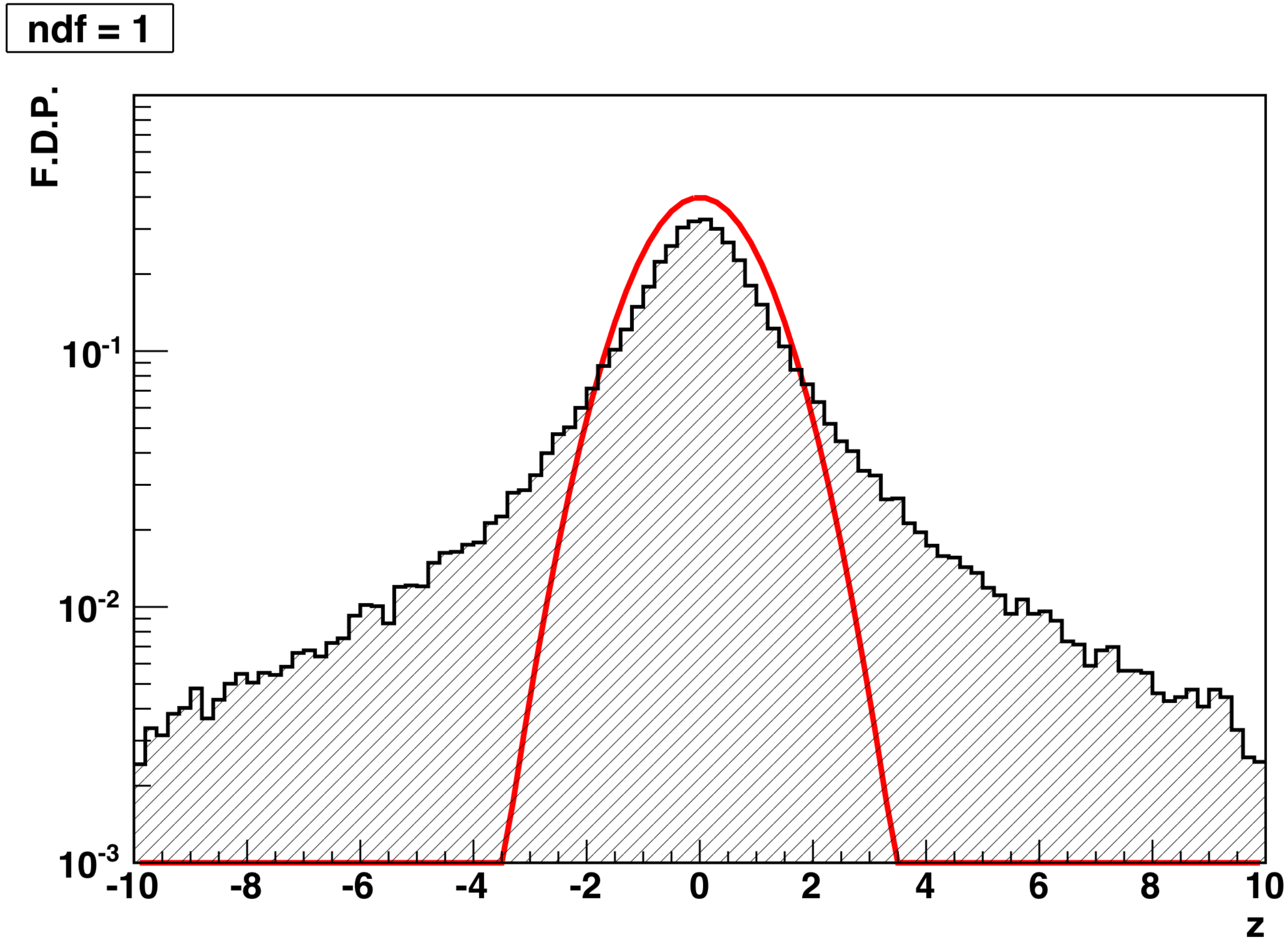
$$z = \frac{\bar{y} - \mu}{\sigma_{\bar{y}}}$$

- Ou seja, vamos simular, para um dado ndf qual é o valor médio de y, a sua incerteza e calcular z.
- Vamos comparar a distribuição de z com uma distribuição normal de média 0 e variância 1.

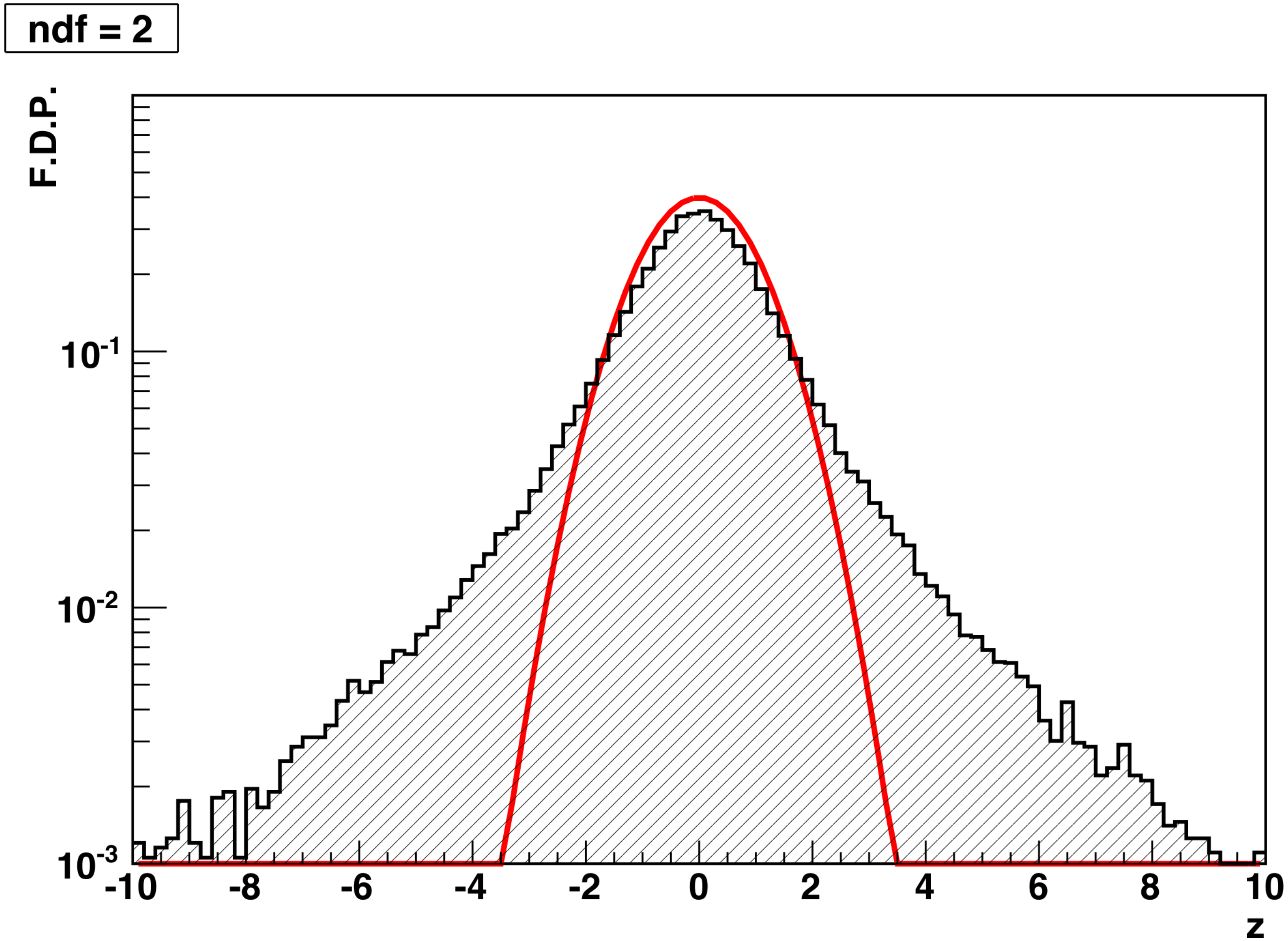
F.D.P. de z para ndf = 1



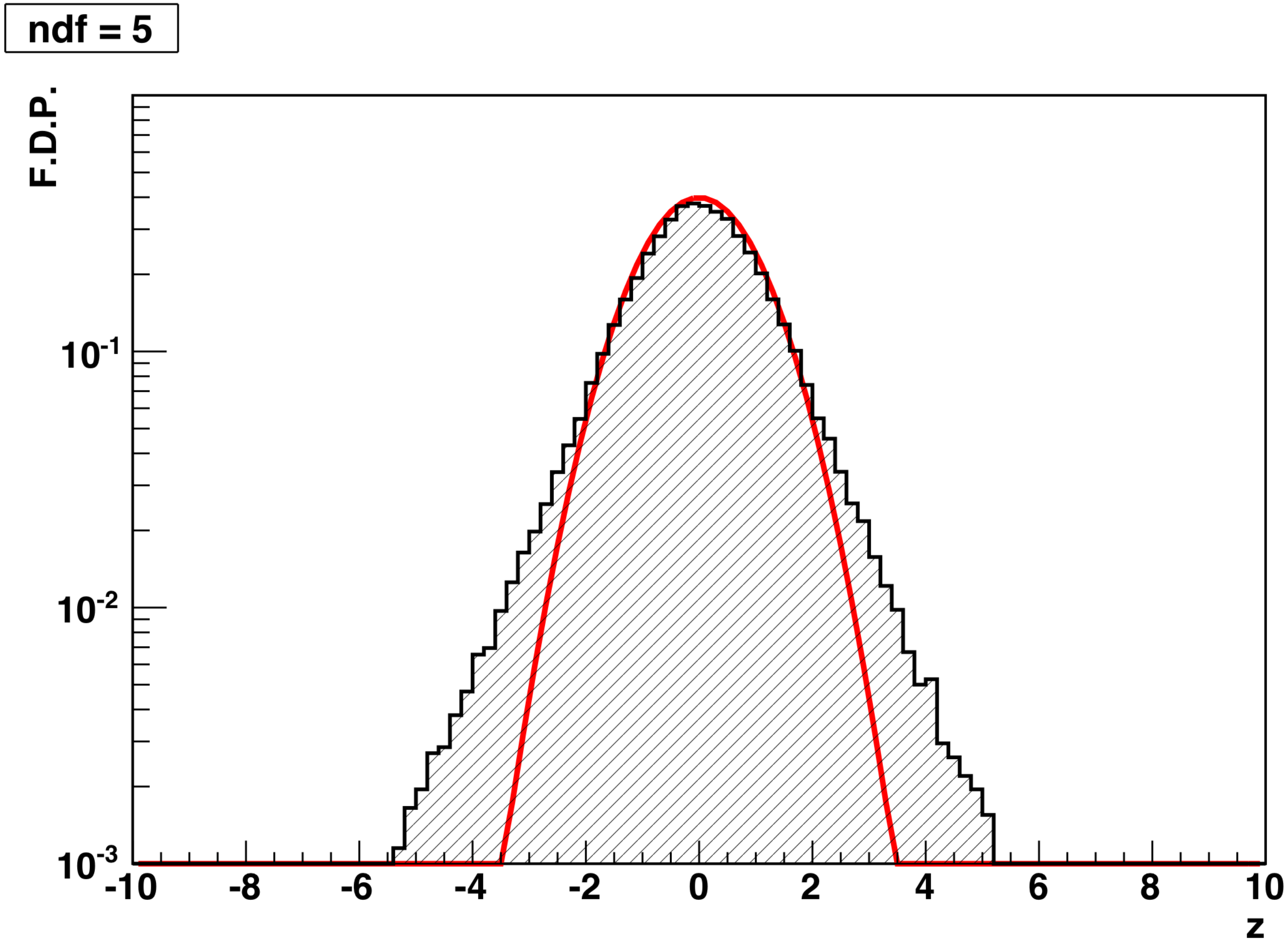
F.D.P. de z para ndf = 1



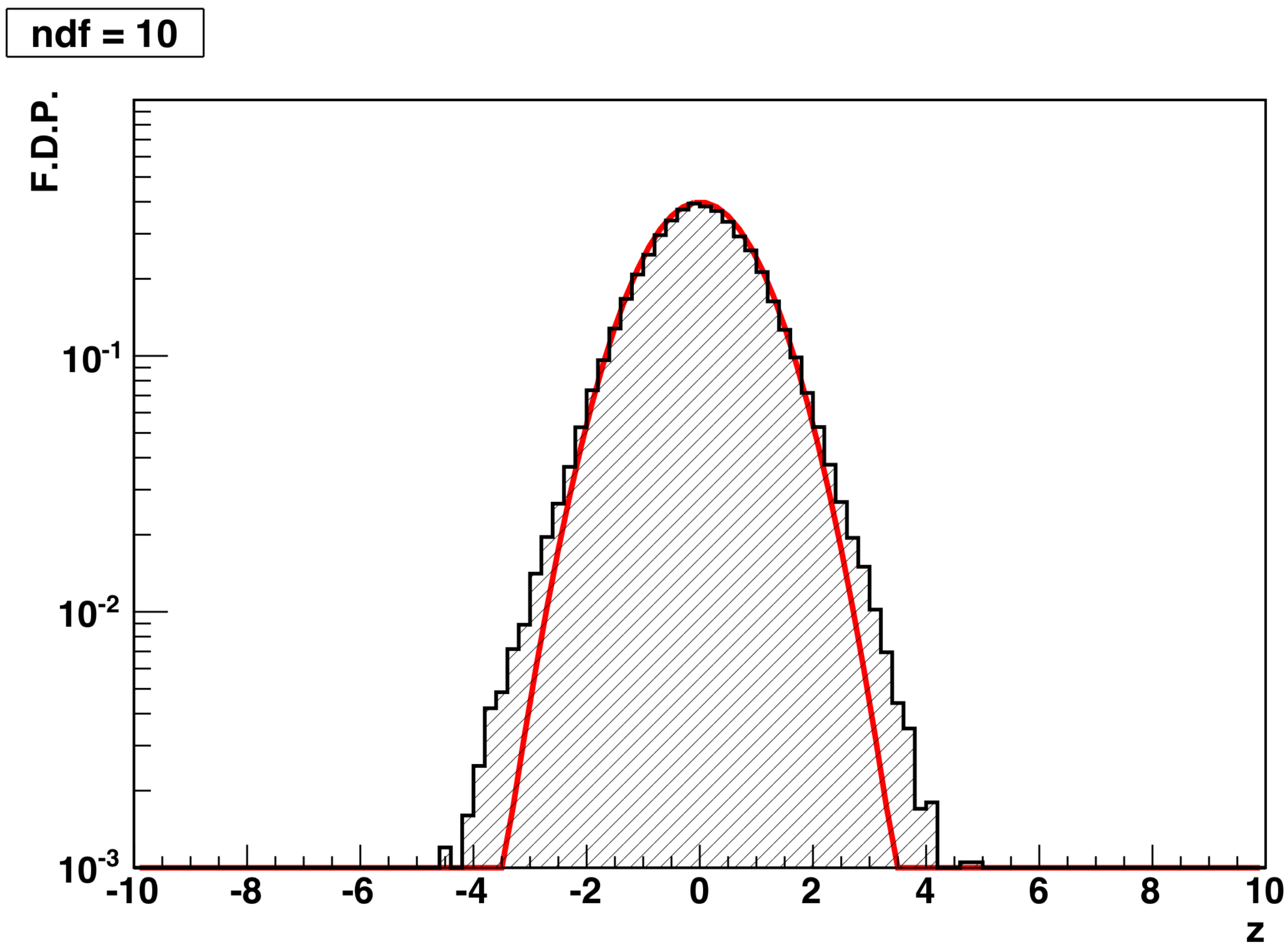
F.D.P. de z para ndf = 2



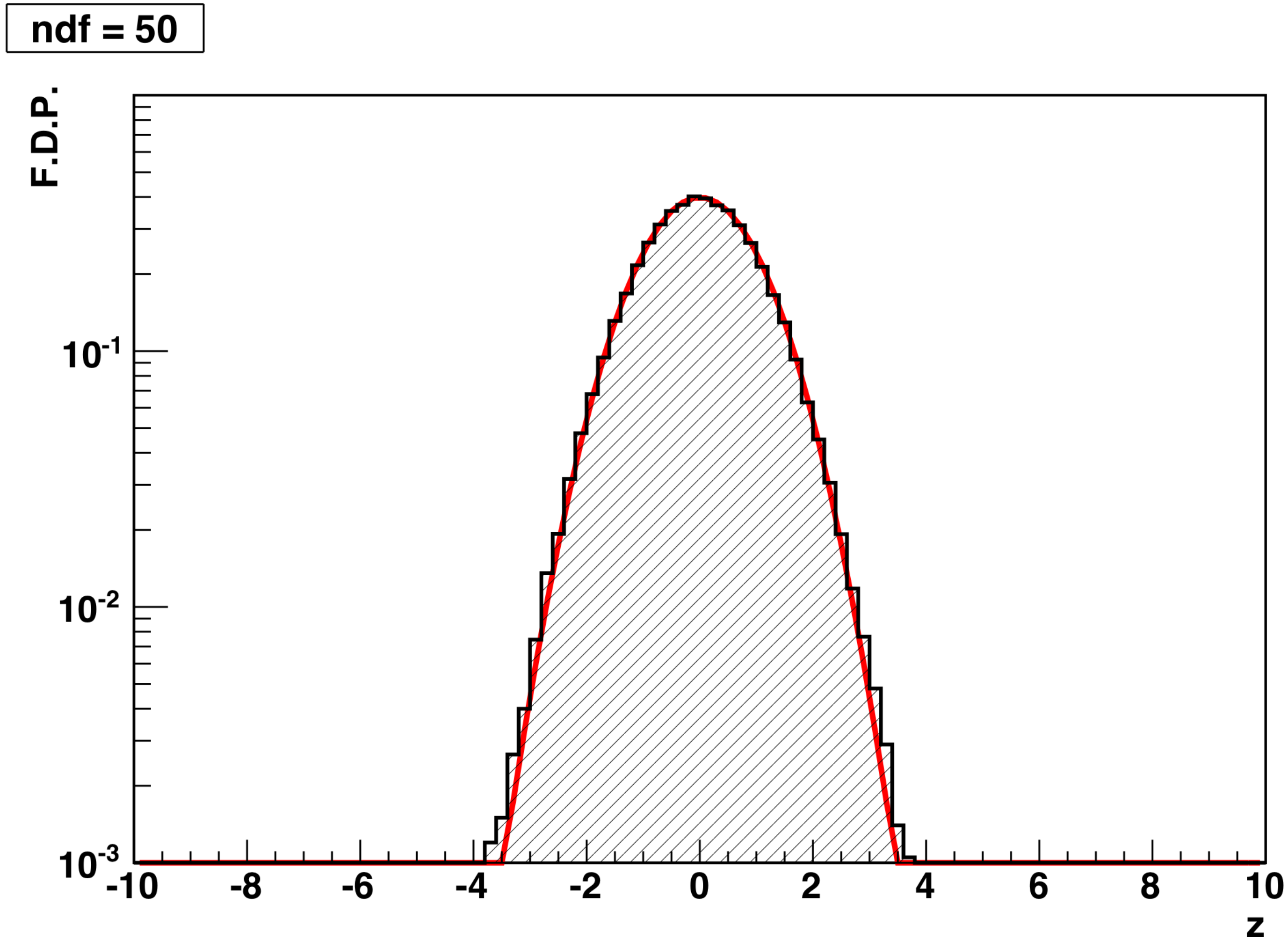
F.D.P. de z para ndf = 5



F.D.P. de z para ndf = 10



F.D.P. de z para ndf = 50



Conclusões

- A variável z somente possui F.D.P. normal para medidas com elevado número de graus de liberdade
  - Tipicamente ndf > 20 já dá para aproximar com um pouco de ressalva.
- Ou seja, o teste-z só pode ser utilizado em situações com grande ndf.
  - A situação é crítica para ndf ~ 1-2
- Que tipo de teste utilizar para baixos ndf?

Teste-t de Student

- Willian Gosset (Student) – 1908
  - Distribuição de probabilidades de Student (ou distribuição t)
- A distribuição t surge quando se quer comparar valores médios de distribuições com poucos graus de liberdade. O fato da F.D.P. da variância não seguir uma distribuição normal, nesses casos, faz com que seja necessário utilizar distribuições t de probabilidade.

Teste-t de Student

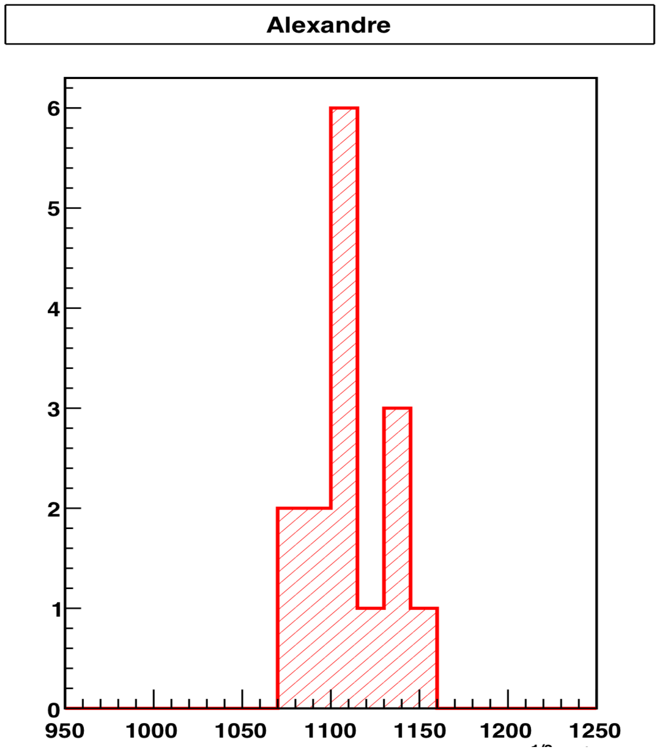
- Vamos supor que queremos comparar duas amostras diferentes e testar se elas são compatíveis. Cada amostra foi medida com um certo número de graus de liberdade, possui uma média e um desvio padrão estimado da amostra. Define-se a grandeza, de modo geral, t como sendo:

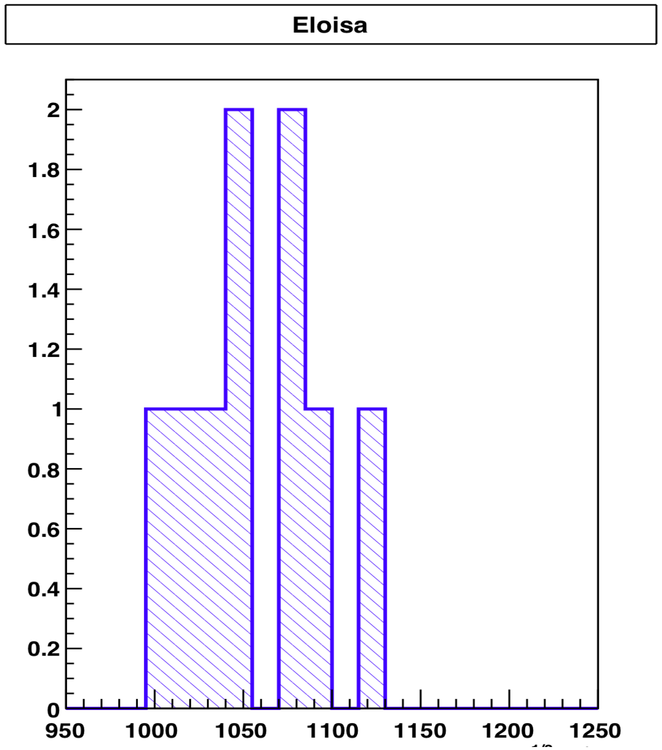
$$t = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad \begin{cases} \bar{y}_i = \text{ média da amostra } i \\ \sigma_i = \text{ variância da amostra } i \\ n_i = \text{ ndf da amostra } i \end{cases}$$

Exemplo

Responder essa pergunta fica como exercício para a sala. Usem os histogramas abaixo como dados.

- As classes o Alexandre e Eloisa mediram a constante C, da aula passada e obtiveram as seguintes distribuições. Podemos dizer que os valores médios das salas do Alexandre e Eloisa são compatíveis?





Um caso particular

- Queremos comparar o valor médio de uma amostra com uma expectativa para o seu valor verdadeiro (teórico, por exemplo). Nesse caso, t pode ser escrito como:

$$t = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad \rightarrow \quad t = \frac{\bar{y}_1 - \mu}{\frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}}$$

- Que é a mesma expressão para z.

Teste-t de Student

- O teste-t de Student consiste em verificar se a hipótese de igualdade entre valores médios de duas amostras (ou entre o valor médio de uma amostra e uma expectativa "verdadeira") é válida, ou seja, verificar se:

$$t = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad \text{ou} \quad t = \frac{\bar{y}_1 - \mu}{\frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}}$$

- É compatível com zero.
- Contudo, devemos levar em conta que a distribuição de t não é mais normal para testar essa compatibilidade.
- Qual a F.D.P. de t?

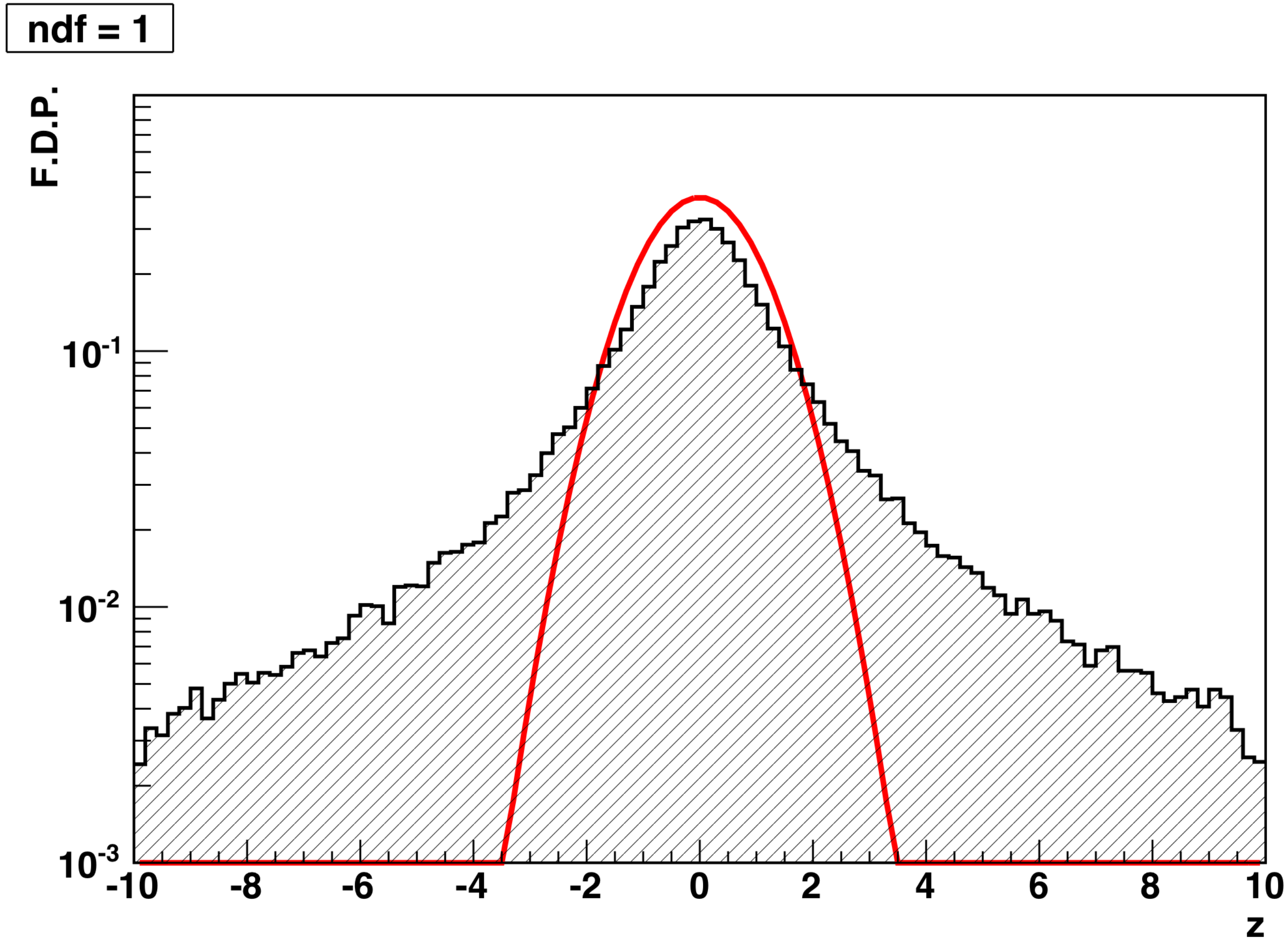
Distribuição t de Student

- Grandezas que são obtidas como razões entre uma distribuição normal (valor médio) e uma distribuição de X^2 (variância, por exemplo), possuem F.D.P. de Student.
  - Grandezas t e z se enquadram nessa relação.

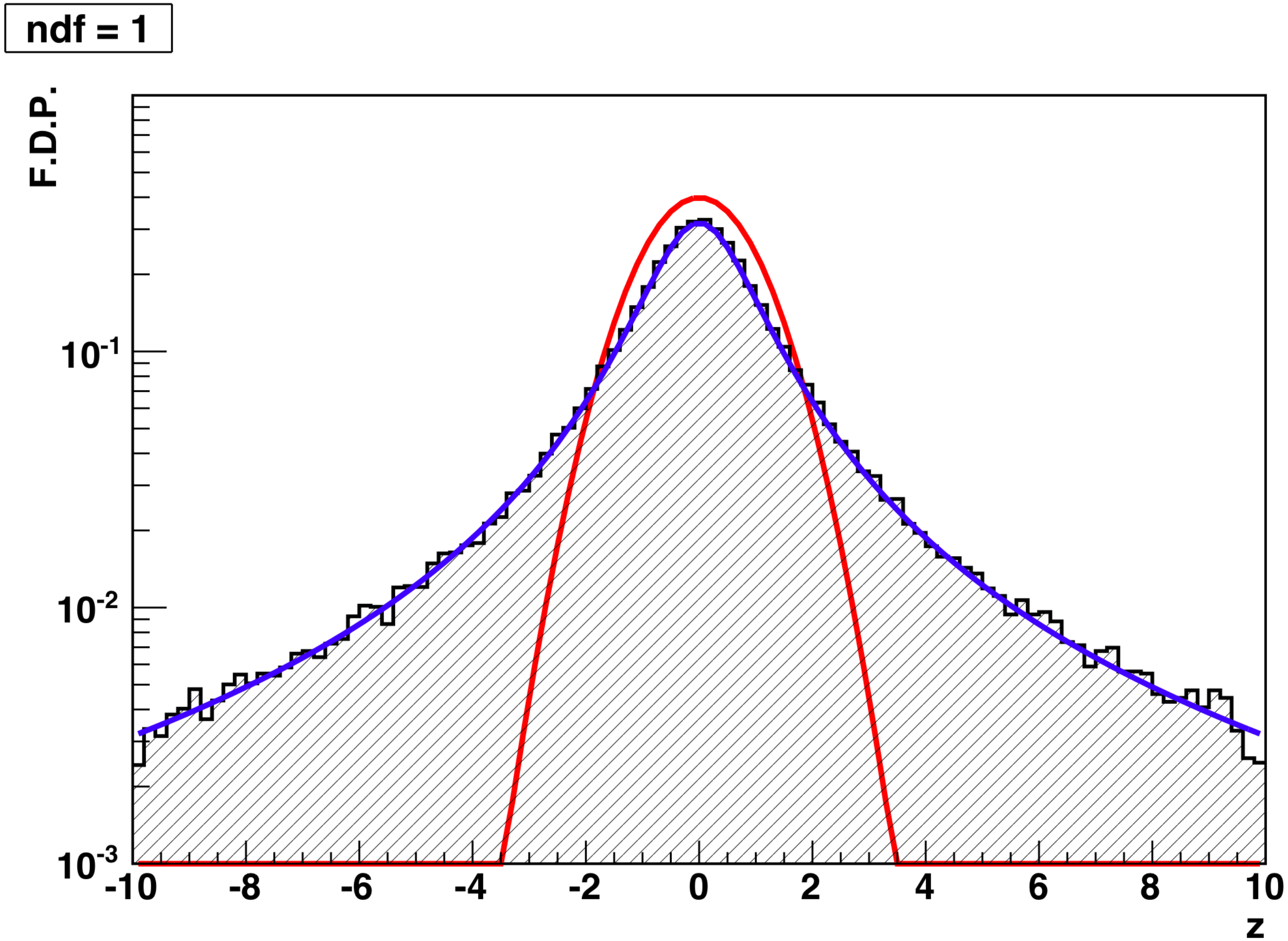
$$p(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n\pi}}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

  - Sendo n o número de graus de liberdade da distribuição.

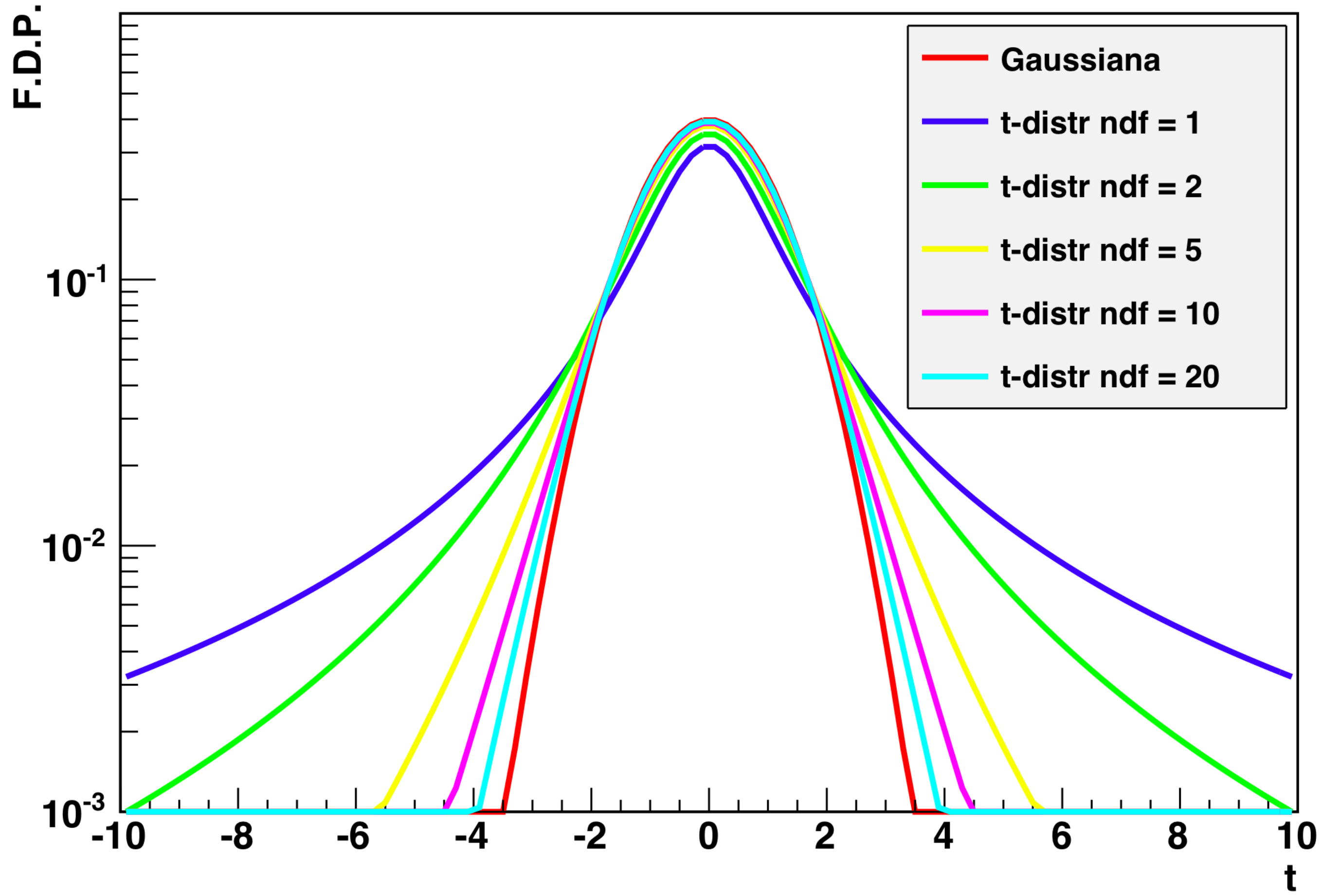
F.D.P. de *t* para ndf = 1



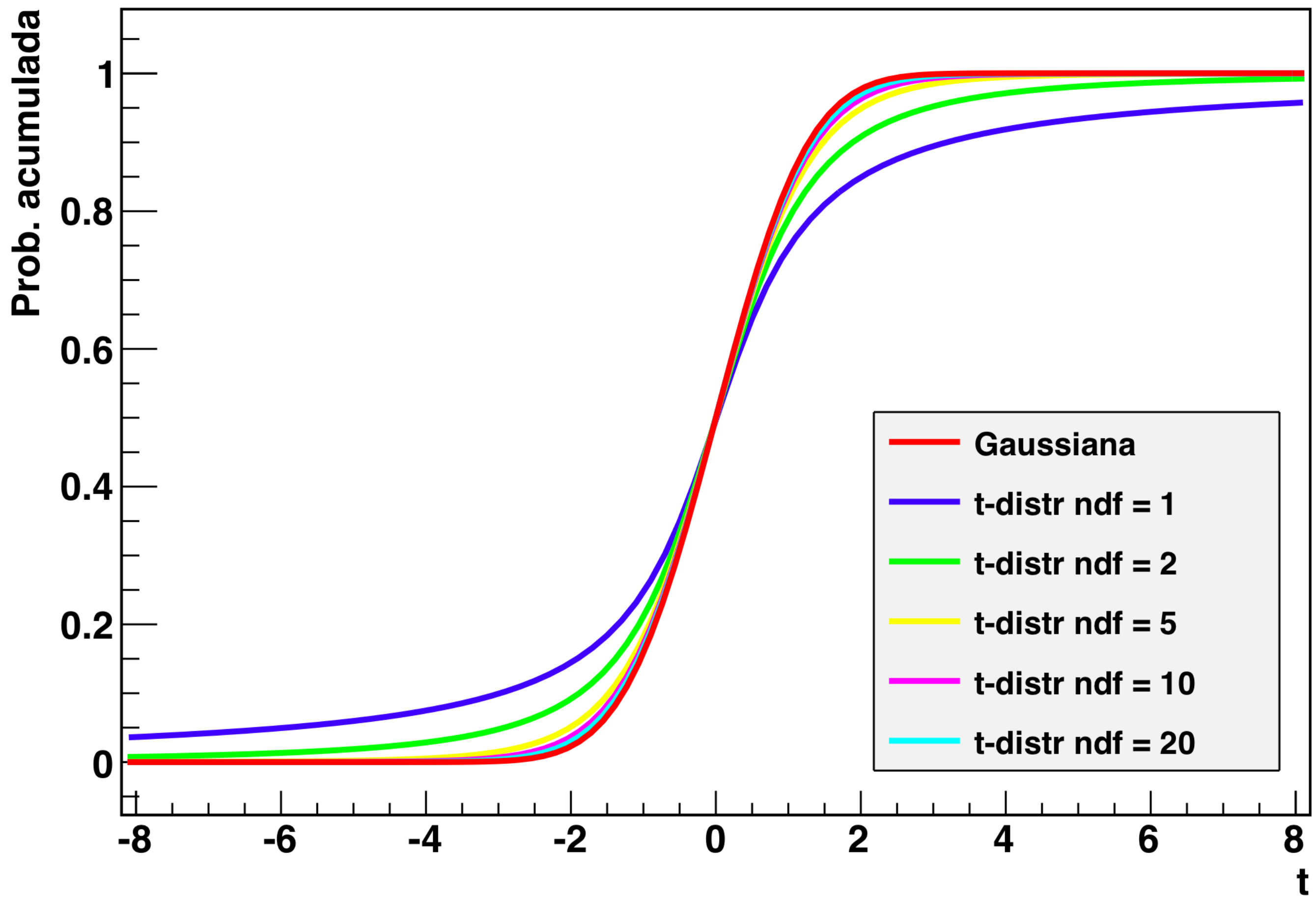
F.D.P. de *t* para ndf = 1



Distribuições-*t* para diferentes ndf

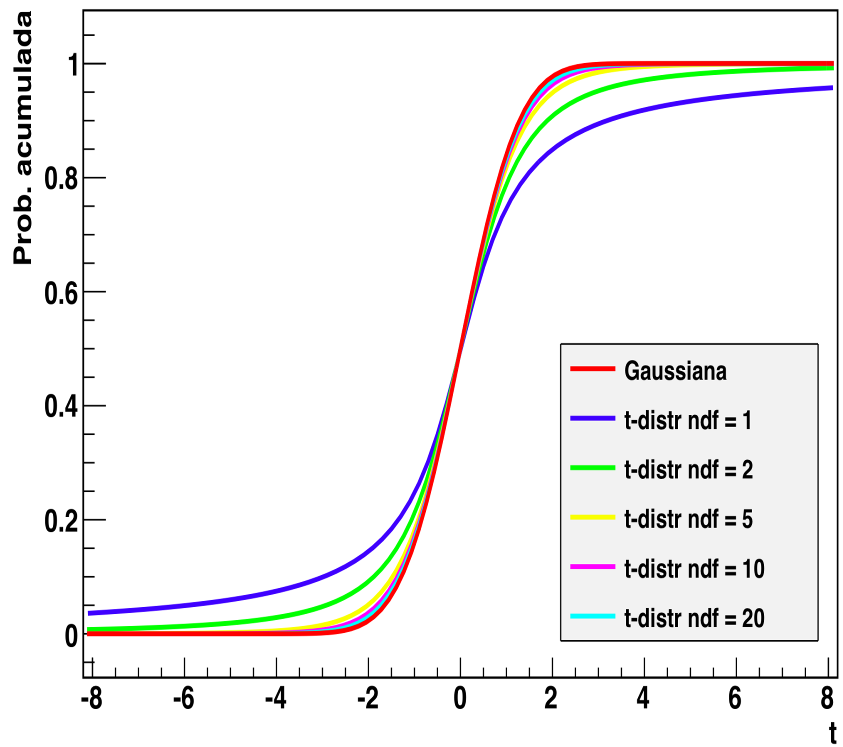


Probabilidade acumulada



Intervalo de confiança

- Do gráfico de probabilidade acumulada fica claro que, o intervalo de compatibilidade de t para o mesmo nível de confiança (por exemplo, 99%) depende do número de graus de liberdade da amostra
  - Podemos $|t|<8$ em alguns casos para ~95% confiança!



Teste-t de Student

- Leva em conta o fato da F.D.P. Para t (ou z) desviar de uma distribuição normal para poucos graus de liberdade
  - Importante para fazer uma comparação justa entre conjuntos de dados

- Para saber mais, olhe em qualquer livro de estatística. Esse é um teste padrão.
  - http://en.wikipedia.org/wiki/Student%27s_t-test
  - http://en.wikipedia.org/wiki/T_distribution

De volta ao experimento…

Objetivos da semana passada

- Verificar se o nosso modelo de campos ideais se aplicam. Neste caso, a partir dos dados das semanas anteriores, obter o valor de k e checar se:

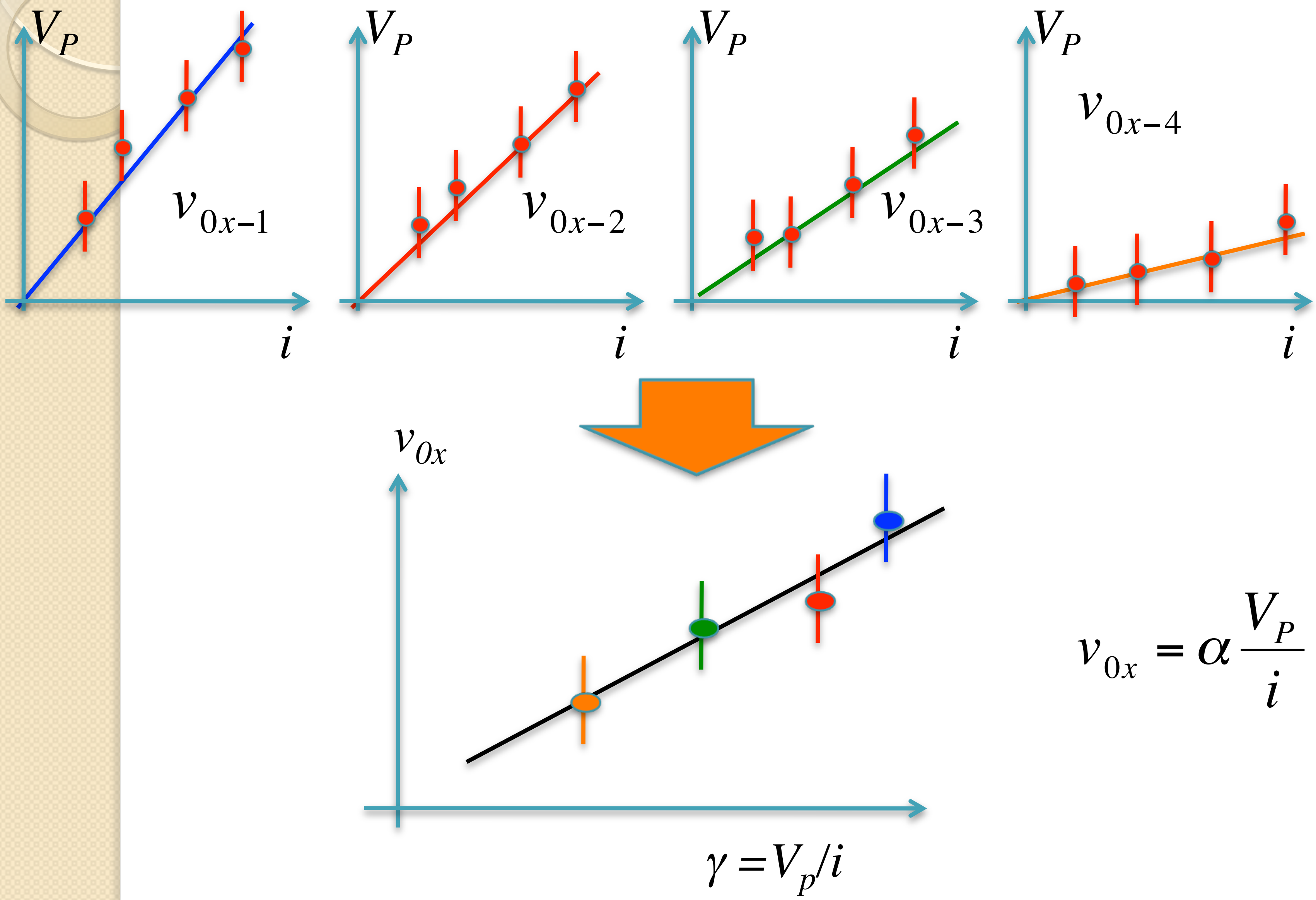
$$k = \frac{2L_P}{L_B L}\left(\frac{L_P}{2} + D_{PS}\right) \sim 1$$

- Calibrar o seletor de velocidades. A partir da relação:

$$v_{0x} = \alpha \frac{V_P}{i}$$

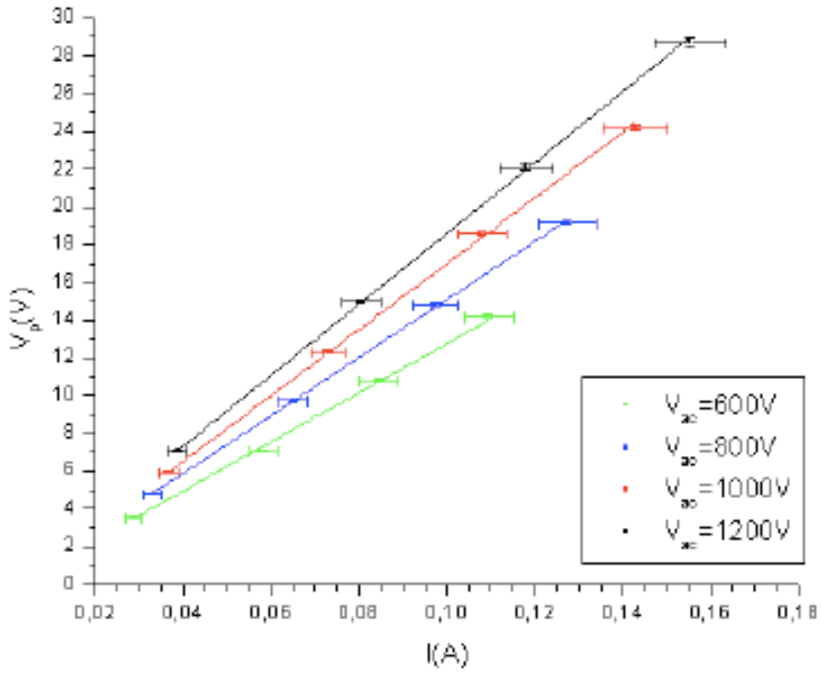
  - Determinar a constante α. Sabendo que $\alpha = 1/\beta d$, obter o valor de d e comparar com os resultados obtidos há duas semanas

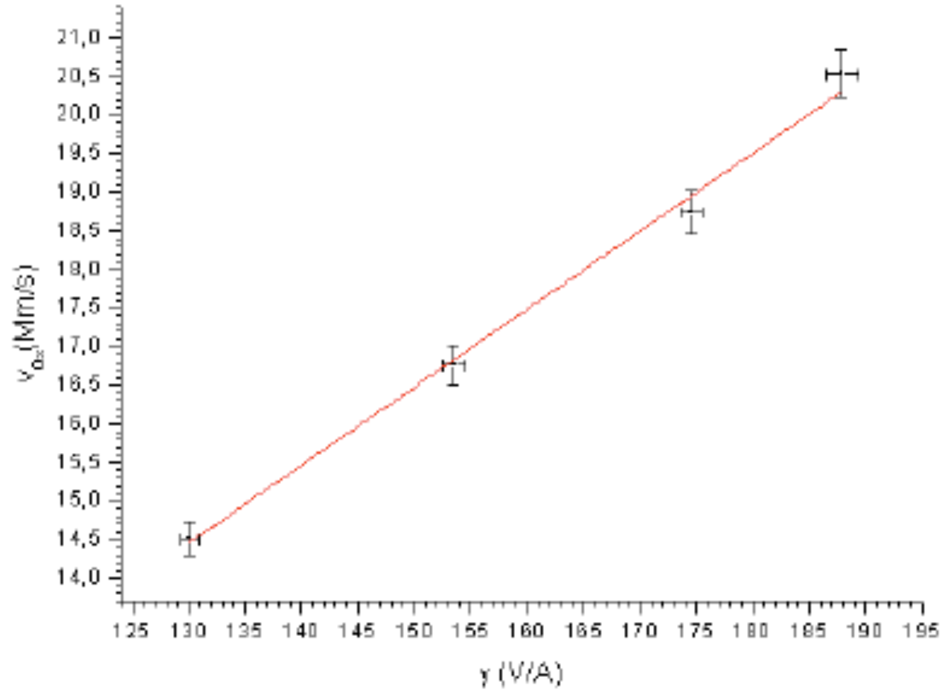
Calibração do seletor de velocidades



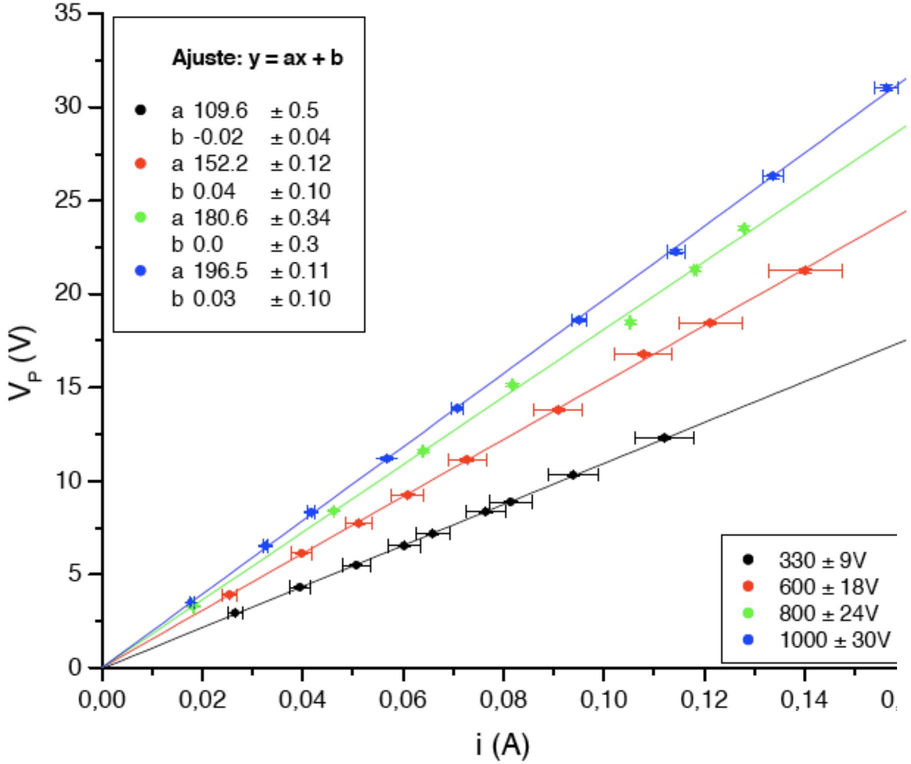
$$v_{0x} = \alpha \frac{V_P}{i}$$

Resultados

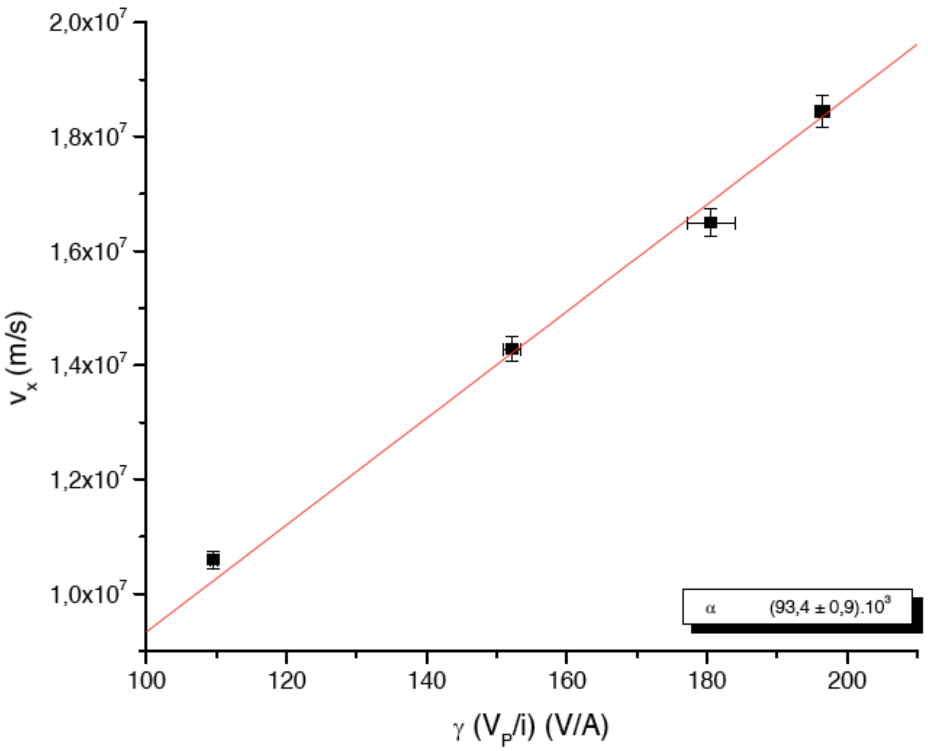




Resultados



Ajuste: y = ax + b
a 109.6 ± 0.5
b -0.02 ± 0.04
a 152.2 ± 0.12
b 0.04 ± 0.10
a 180.6 ± 0.34
b 0.0 ± 0.3
a 196.5 ± 0.11
b 0.03 ± 0.10
330 ± 9V
600 ± 18V
800 ± 24V
1000 ± 30V
V_P (V)
i (A)



α (93,4 ± 0,9).10³
v_x (m/s)
γ (V_P/i) (V/A)

Vamos rever alguns resultados

$$v_{0x} = \alpha \frac{V_P}{i}$$

$$k = \frac{2L_P}{L_B L}\left(\frac{L_P}{2} + D_{PS}\right) \sim 1$$

$$\alpha = \frac{1}{\beta d} \text{ se } k \sim 1$$

$$h = \frac{L_P}{2d}\left(\frac{L_P}{2} + D_{PS}\right)\frac{V_P}{V_{AC}} = A' \frac{V_P}{V_{AC}}$$

$$A' \sim 180\ cm$$

$$C \sim 1100\ cmV^{1/2}A^{-1}$$

$$H = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{2m}} L_B L \beta \frac{i}{\sqrt{V_{AC}}} = C \frac{i}{\sqrt{V_{AC}}}$$

Vamos rever alguns resultados

$$h = H \Rightarrow A'\frac{V_P}{V_{AC}} = C\frac{i}{\sqrt{V_{AC}}} \Rightarrow \frac{A'}{C}\frac{V_P}{i} = \sqrt{V_{AC}}$$

$$\frac{1}{2}mv_{0x}^2 = qV_{AC} \Rightarrow \sqrt{V_{AC}} = \sqrt{\frac{m}{2q}}v_{0x}$$

$$v_{0x} = \sqrt{\frac{2q}{m}}\frac{A'}{C}\frac{V_P}{i} \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{2q}{m}}\frac{A'}{C}$$

$$A' \sim 180\ cm$$

$$C \sim 1100\ cmV^{1/2}A^{-1}$$

$$\Rightarrow \alpha \sim 10^5\ AmV^{-1}s^{-1}$$

Resultados obtidos

k	$\alpha \times 10^3$ $(AmV^{-1}s^{-1})$
	80.8 ± 0.2
0.5	101 ± 6
	79 ± 5
	86 ± 6
1.09	603 ± 1
0.75	93 ± 1
0.62	93 ± 1
0.44	86 ± 3
0.68	85

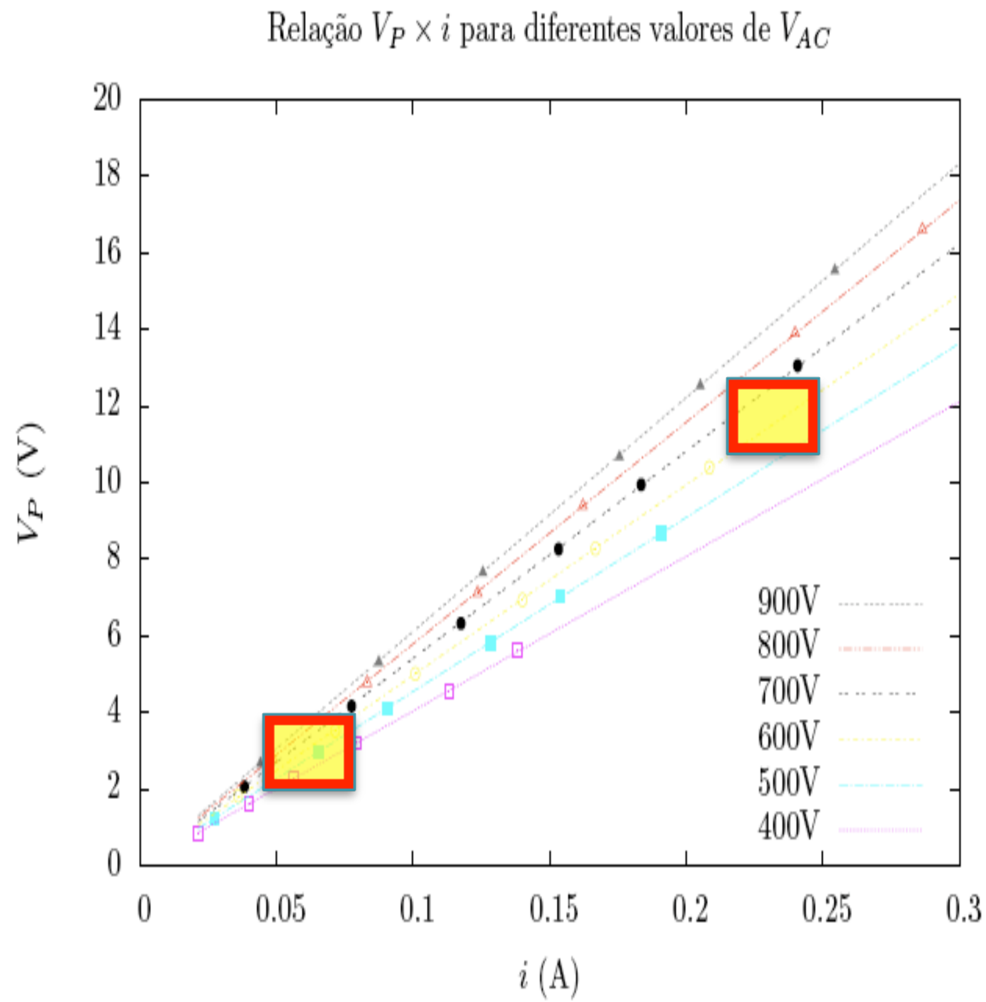
$$\alpha_{médio} \sim 88 \cdot 10^3 \ AmV^{-1}s^{-1}$$

$$\alpha \sim 10^5 \ AmV^{-1}s^{-1}$$

Os resultados são consistentes?
Porque k é sistematicamente < 1?

Para responder esta pergunta na APRESENTAÇÃO! Dica: Está relacionado com as escolhas que fizemos durante a experiência para definir os comprimentos efetivos. Responder esta questão significa um entendimento amplo do que foi feito até aqui.

Da aula passada:

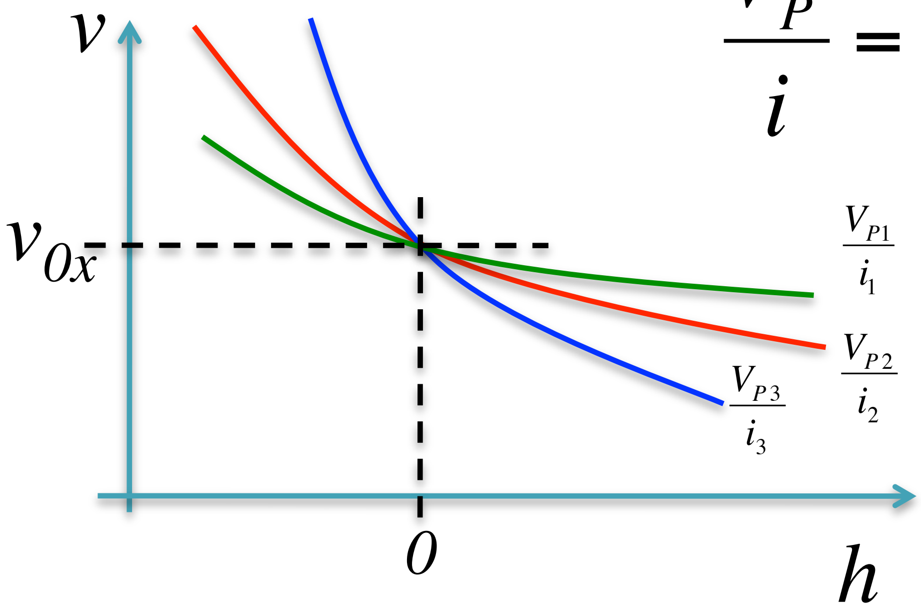


- Qualquer par (i,V_P) ao longo de uma daquelas linhas seleciona a mesma velocidade de filtro ($V_P/i = constante$)
- Todos os pares (i,V_P) para uma mesma velocidade propiciam resultados iguais? Nada muda?
- Para um par (i,V_P) "pequeno", as incertezas envolvidas tornam impossível distinguir velocidades muito próximas
- Para um par (i,V_P) "grande" a precisão na definição da velocidade de filtro é maior.
- Conceito de RESOLUÇÃO de uma medida

Estudo da resolução do seletor

- Verificar como a resolução muda para diferentes pares de V_p e i.

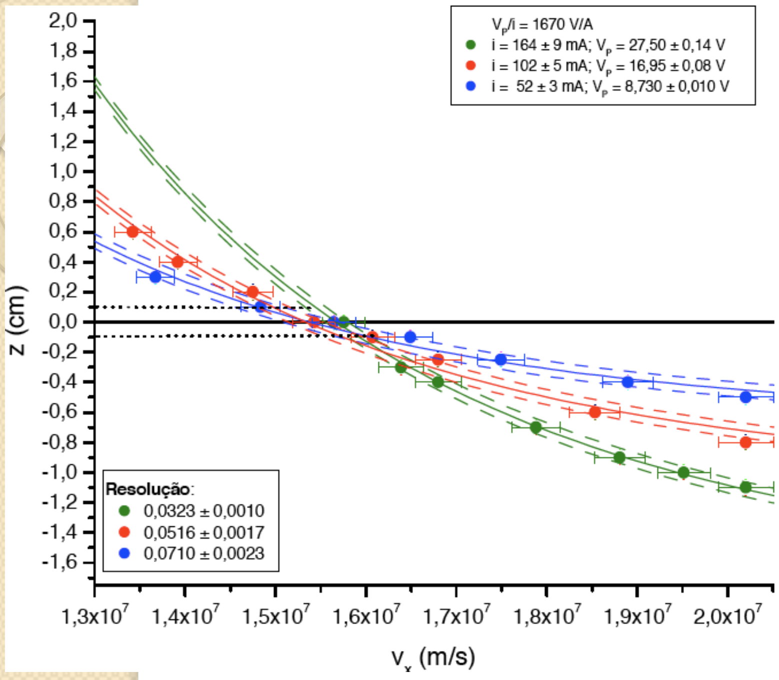
$$\frac{V_P}{i} = cte$$

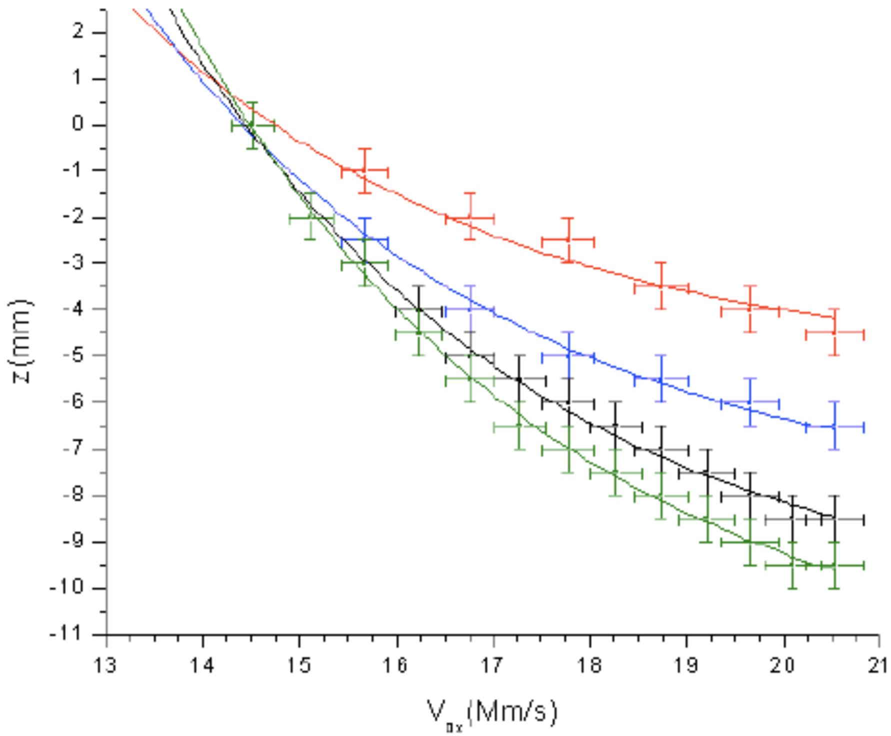


Alguns resultados

$$z = A v_{0x}^{-2} - B\, v_{0x}^{-1}$$

$$z = \frac{L_P V_P}{2 d V_{AC}} \left(\frac{L_P}{2} + D_{ps} \right) - \frac{q L_B L}{2 m v_{0_x}} B$$





Apresentação: como preparar? das conclusões para a introdução

- Quais as conclusões do experimento?
  - Quais as medidas/análises que levaram a estas conclusões?
  - Conclusões (e resumo) do trabalho

- Como eu dou suporte a estas conclusões
  - Quais as aproximações teóricas, medidas e análises que foram necessárias para este suporte?
  - Análise de dados

- Quais os fundamentos teóricos utilizados para chegar às conclusões estabelecidas? Quais as motivações para realização do trabalho?
  - Introdução