



Física Experimental III

Notas de aula: www.if.usp.br/suaide

LabFlex: www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex

Aula 9

Prof. Alexandre Suaide

Ramal: 7072

Ed. Oscar Sala (Pelletron), sala 246

Um pouco de estatística...

Caixa de Galton





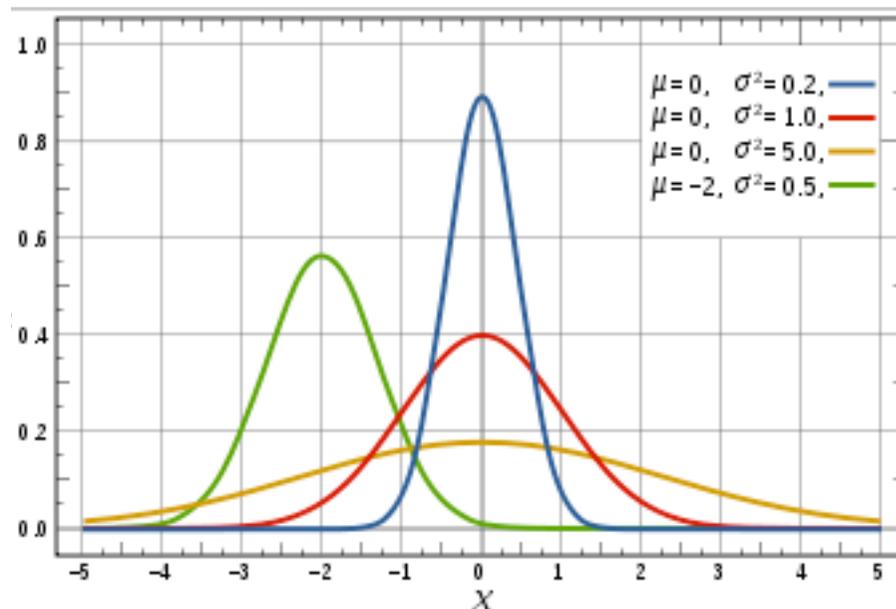
Funções de densidade de probabilidade (F.D.P.)

- Em uma análise estatística como que uma grandeza está distribuída?
- Qual a probabilidade de uma grandeza assumir um determinado valor?
- Como comparar duas grandezas que se distribuem estatisticamente?
- Função densidade de probabilidade
 - Função que estabelece a distribuição estatística de um conjunto de dados. É uma medida da probabilidade de obter um determinado valor nesse conjunto de dados.

Funções de densidade de probabilidade (F.D.P.)

- A F.D.P. mais conhecida é a distribuição normal, ou gaussiana.

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



Porque um grande número de observáveis na natureza segue uma distribuição normal?

- Teorema do limite central
 - Se...
 - Temos um conjunto de medidas independentes, mas com mesma distribuição de probabilidades.
 - Existe um valor verdadeiro (μ) e uma variância finitos ($\sigma^2 > 0$).
 - Então...
 - A distribuição do valor médio de um subconjunto dessas medidas segue uma distribuição normal
 - http://en.wikipedia.org/wik/Illustration_of_the_central_limit_theorem
- As condições necessárias para uma distribuição normal de probabilidades são encontradas em um amplo espectro de medidas na natureza.

Construindo algumas F.D.P.

- Seja uma grandeza qualquer (x) que segue uma F.D.P. normal, caracterizada por um valor verdadeiro (μ) e uma variância (σ_μ) desconhecidos.
- Uma boa estimativa de μ e σ_μ pode ser obtida através da medida repetitiva de x , formando uma amostra $X = \{x_i\}$, e do cálculo de valores médios ($x_{médio}$) e desvio padrão (σ) da amostra.
- Quais as F.D.P. de $x_{médio}$, σ e da função X^2 ?
- Como essas F.D.P. dependem no número de repetições da medida (número graus de liberdade, n ou ndf)?

Método utilizado

- Vamos realizar um experimento virtual, no qual iremos simular a obtenção da amostra $X_{ndf} = \{x_i\}$.
- A partir dessa amostra vamos calcular a variável de interesse (média, desvio padrão, etc.)
- Vamos repetir esse experimento virtual um número muito grande de vezes de modo a obter as F.D.P. das variáveis estudadas.

Para simplificar o problema

- Ao invés de usar a amostra X , vamos fazer uma mudança de variável tal que

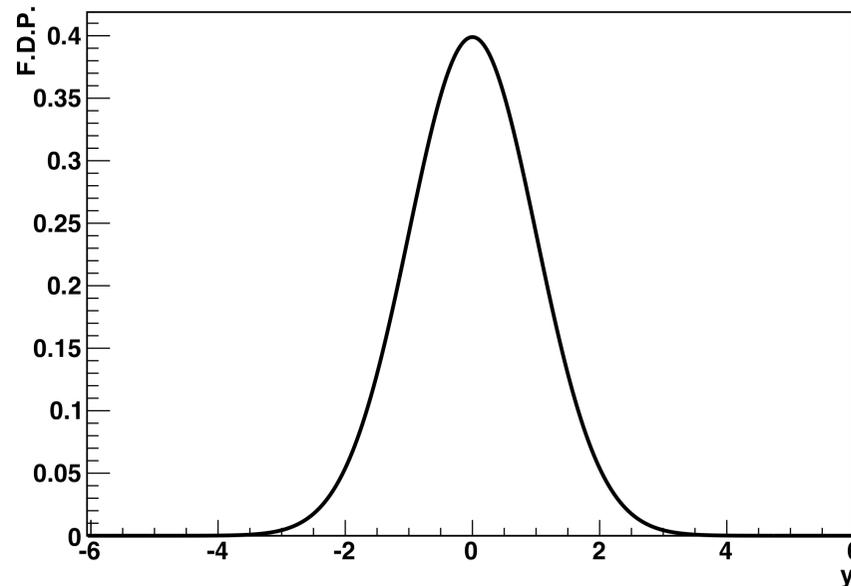
$$Y = \{y_i\} \rightarrow y_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma_\mu}$$

- Ou seja, vamos estudar uma amostra de valor verdadeiro 0 e variância 1.
 - As formas analíticas das diversas F.D.P. são construídas desse modo. Para F.D.P. com médias e variâncias diferentes, basta uma mudança de escala.

F.D.P. de y .

- Y segue uma distribuição normal de valor verdadeiro 0 e variância 1, ou seja:

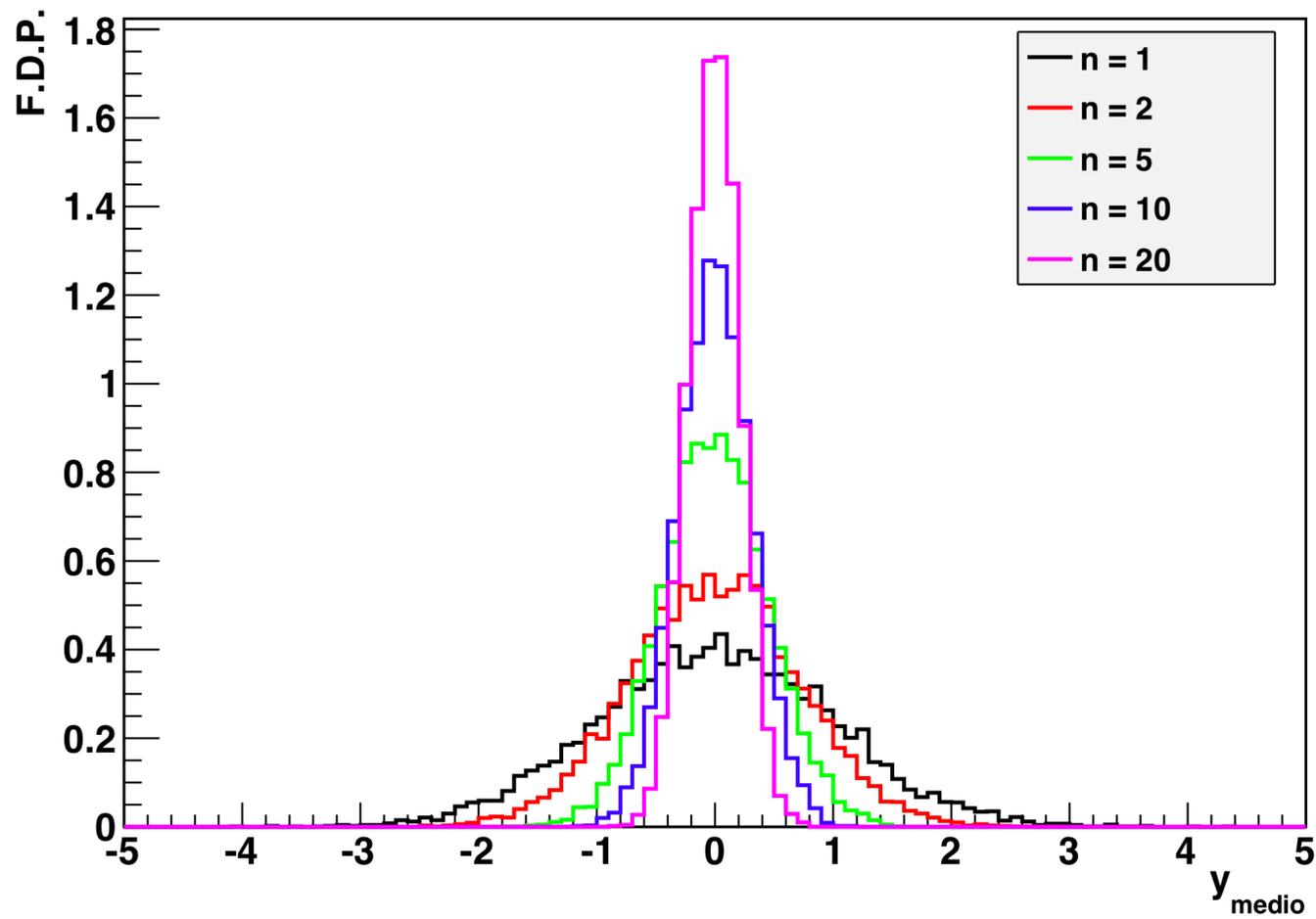
$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$$



F.D.P. de $y_{m\u00e9dio}$.

- Vamos calcular a distribui\u00e7\u00e3o de $y_{m\u00e9dio}$ para v\u00e1rios tamanhos de amostra (n). Vamos verificar qual a forma da distribui\u00e7\u00e3o e suas caracter\u00edsticas.
- A distribui\u00e7\u00e3o de $y_{m\u00e9dio}$ \u00e9 normal? Se for, qual a vari\u00e2ncia dessa distribui\u00e7\u00e3o? Depende do tamanho (n) da amostra?

F.D.P. de y_{medio} .



F.D.P. de $y_{\text{médio}}$.

- Pode-se mostrar que a F.D.P. do valor médio de uma amostra normal é também uma função normal, cujo valor verdadeiro é o mesmo mas a variância diminui com o aumento do tamanho da amostra, ou seja:

$$\sigma_{\bar{\mu}} = \frac{\sigma_{\mu}}{\sqrt{n}}$$

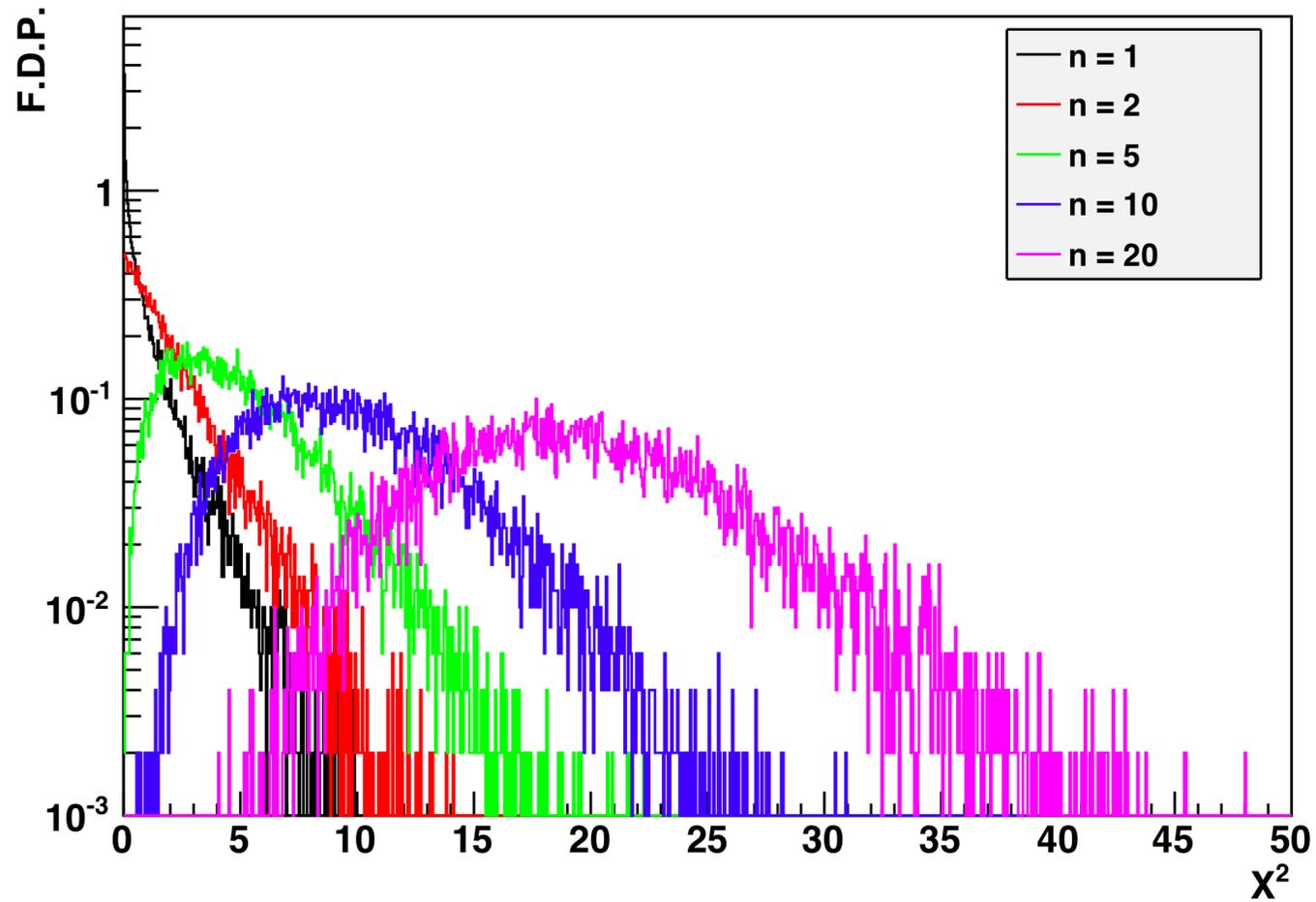
F.D.P. de X^2 .

- A função X^2 é definida como:

$$X^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma_{\mu}} \right)^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$$

- A F.D.P. é obtida calculando o valor de X^2 para cada conjunto de dados simulado

F.D.P. de X^2 .



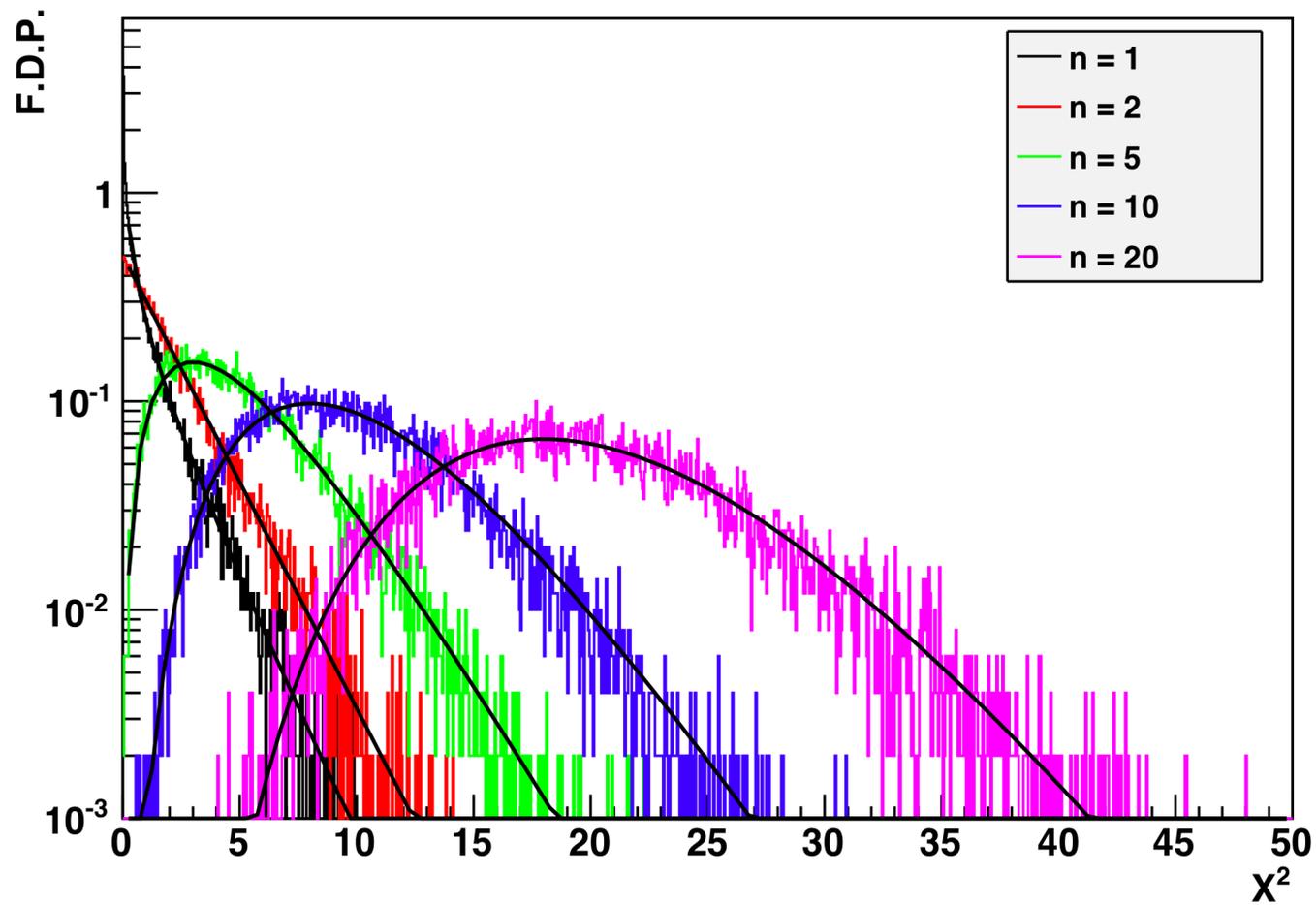
F.D.P. de X^2 .

- A F.D.P. não segue mais uma distribuição normal:

$$p(\xi) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \xi^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{\xi}{2}}$$

- Onde Γ é a função gama, n é o número de graus de liberdade e ξ , o valor de X^2 .

F.D.P. de X^2 .



F.D.P. de X^2_{red} e σ .

- A função X^2_{red} é definida como:

$$X^2_{red} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma_\mu} \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2$$

- Por outro lado, a variância de um conjunto de medidas é:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2$$

- Ou seja, essas grandezas são muito similares e seguem a mesma F.D.P.

F.D.P. de X^2_{red} e σ .

- X^2_{red} e σ são importantes em testes de significância.
 - A função X^2_{red} é calculada quando se faz um ajuste de curvas. Como avaliar se o ajuste é bom?
 - Em uma medida estatística, como saber se a variância que estou obtendo é representativa?
 - Como fazer testes de compatibilidade?
 - Por exemplo, o teste de z .

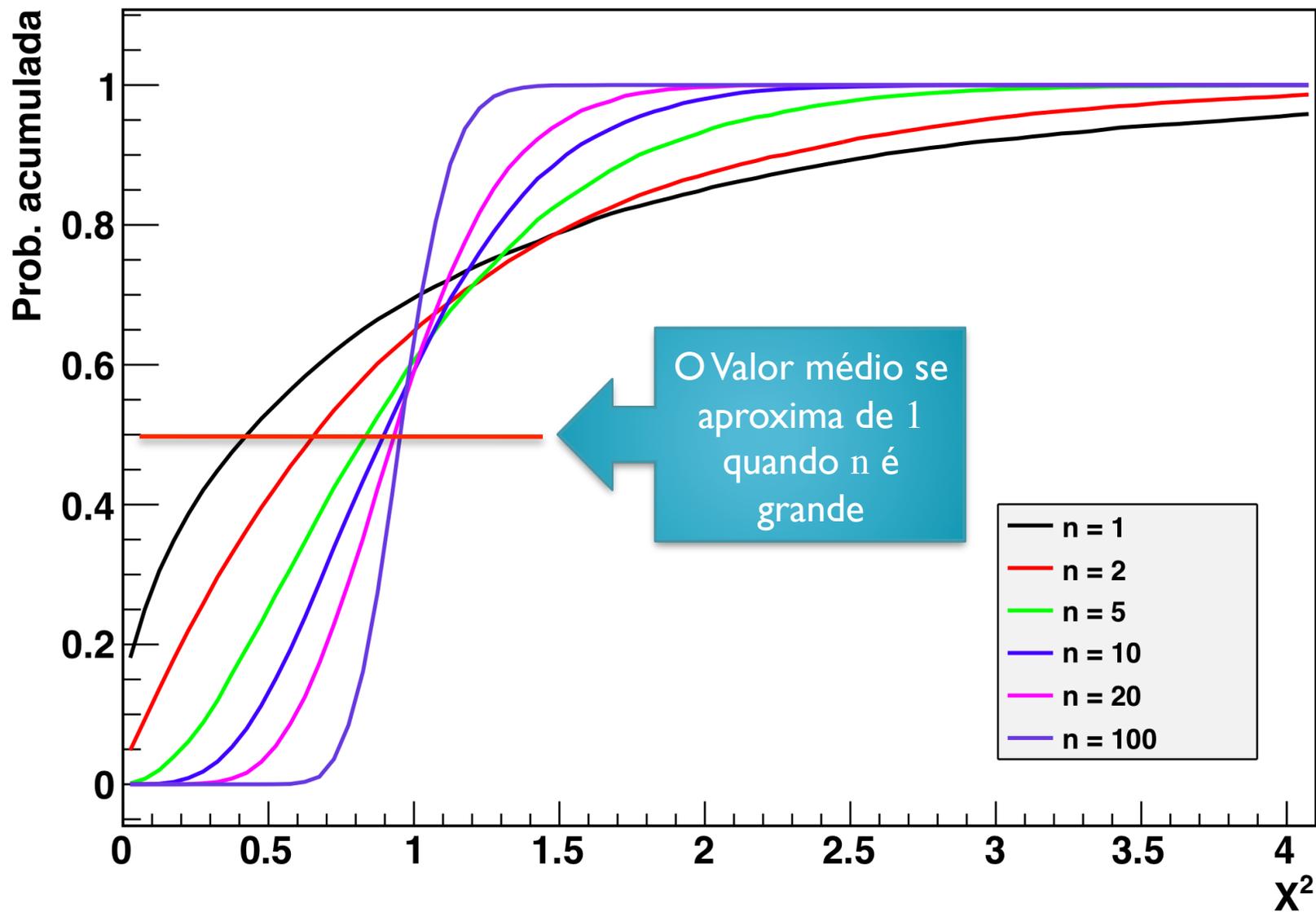
Probabilidade acumulada

- Podemos definir como probabilidade acumulada a grandeza:

$$P(x) = \int_{-\infty}^x p(t)dt \rightarrow \begin{cases} \text{Probabilidade da variável } t \\ \text{assumir um valor menor ou} \\ \text{igual a } x. \end{cases}$$

- Essa grandeza é particularmente útil para definir intervalos de confiança
 - Ex: qual o intervalo de 95% de confiança para a distribuição de X^2_{red} de um ajuste com 5 graus de liberdade?

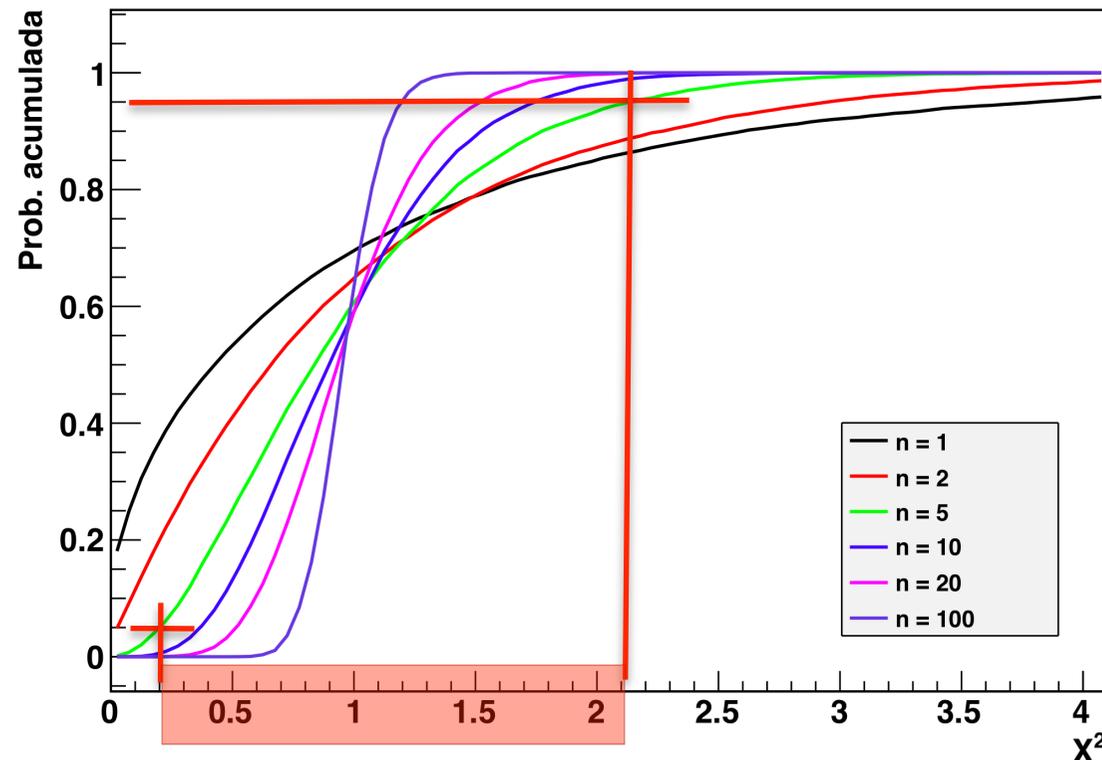
Probabilidade acumulada de X^2_{red} (ou σ)



Probabilidade acumulada de X^2_{red} (ou σ)

- Se eu faço um ajuste de 5 graus de liberdade, qual o intervalo esperado de X^2_{red} com 95% de confiança?

$$0,2 < X^2_{red} < 2,1$$



Porque tudo isso?

- Conhecer as distribuições de probabilidade faz com que o grau de confiança na análise realizada seja maior
 - Será que o ajuste está bom?
 - Será que a variância calculada é razoável?
- Como eu comparo um valor medido com uma expectativa teórica?

$$z = \left| \frac{\text{valor} - \text{teoria}}{\text{incerteza}} \right| \Rightarrow \text{bom se } z < 3$$

- Será que isso é sempre bom ou só uma estimativa grosseira?

Leituras recomendadas.

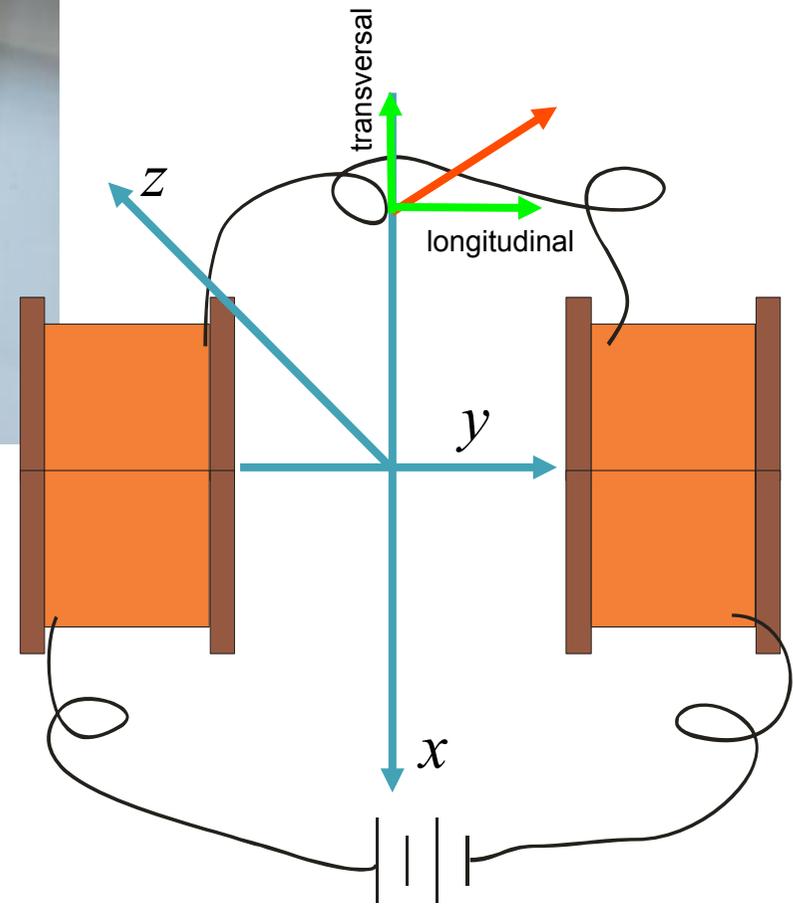
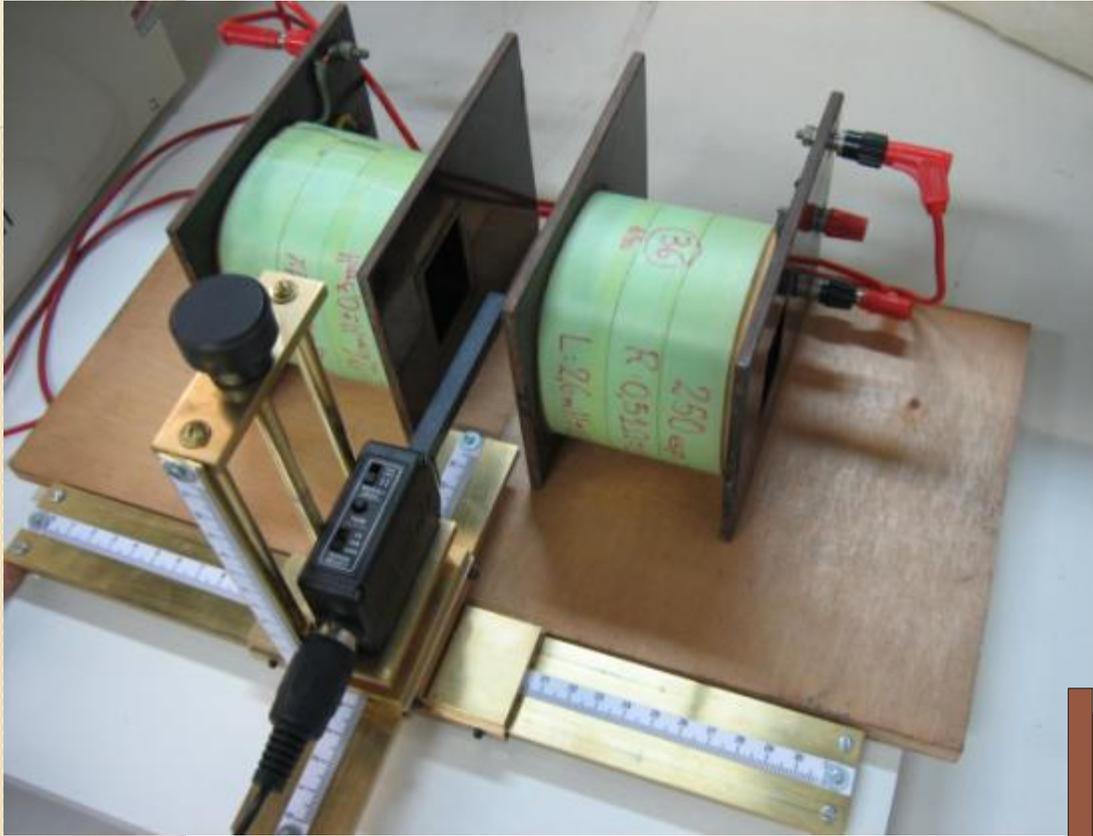
- Textos básicos
 - Tratamento estatístico de dados em física experimental (O. Helene e V. Vanin)
 - Fundamentos da teoria de erros (J. H. Vuolo)
- Texto mais avançado
 - Análise estatística de medidas em ciências exatas (V. Vanin, P. Gouffon, O. Helene)
- Há algo interessante na wikipedia, mas eu não tive tempo de ler com cuidado. Só use como referência depois de familiarizado com conceitos importantes
 - http://en.wikipedia.org/wiki/Central_limit_theorem
 - http://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution
 - http://en.wikipedia.org/wiki/Chi-square_distribution
 - http://en.wikipedia.org/wiki/Cumulative_distribution_function
 - http://en.wikipedia.org/wiki/Two-tailed_test



De volta ao experimento...

Semana passada

Mapeamento de campos





Comentários comuns

- Sistema de referência?
- Acurácia e precisão de uma medida
 - Importante na comparação teórica
- Simulação do experimento

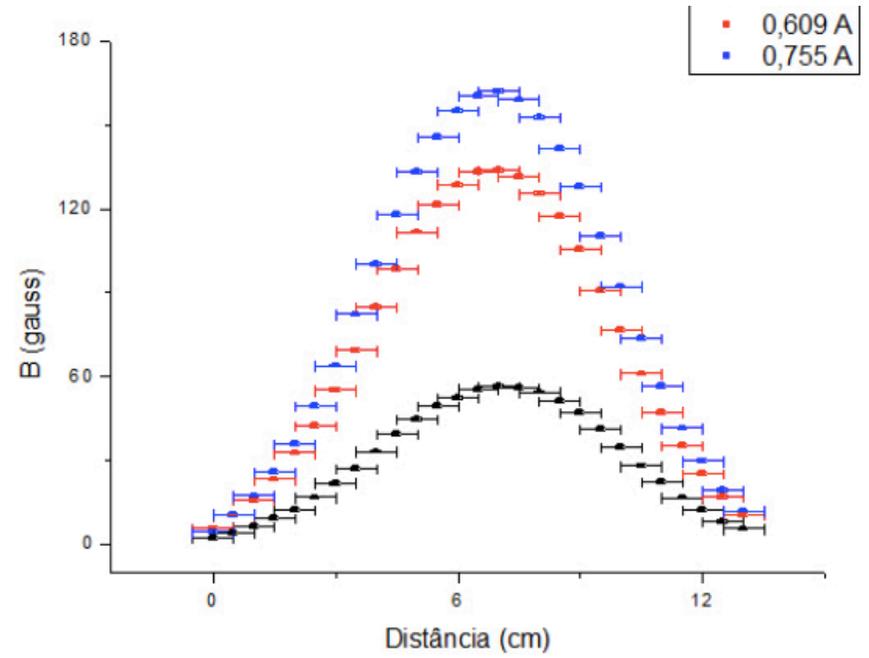
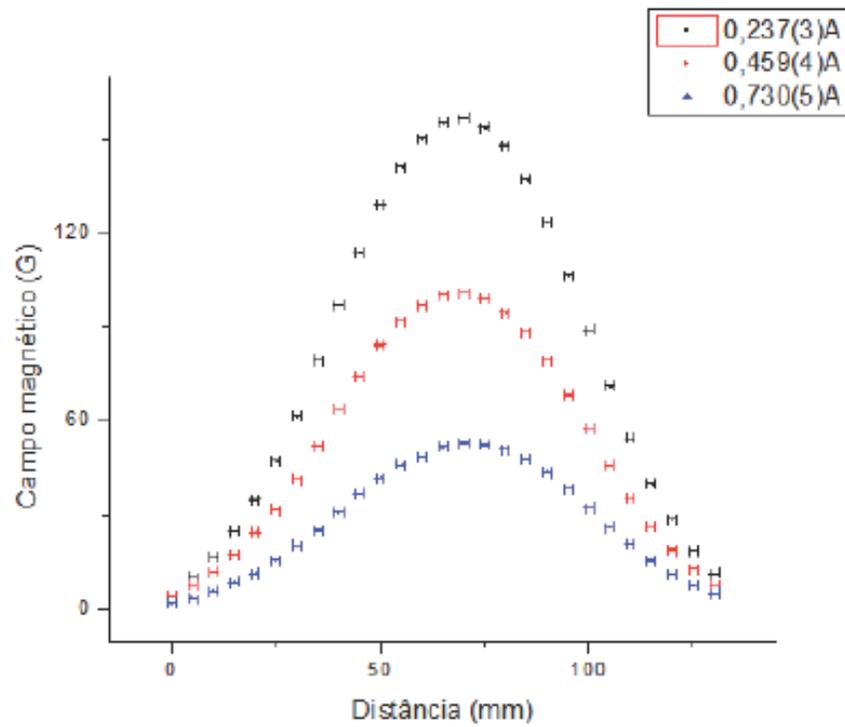
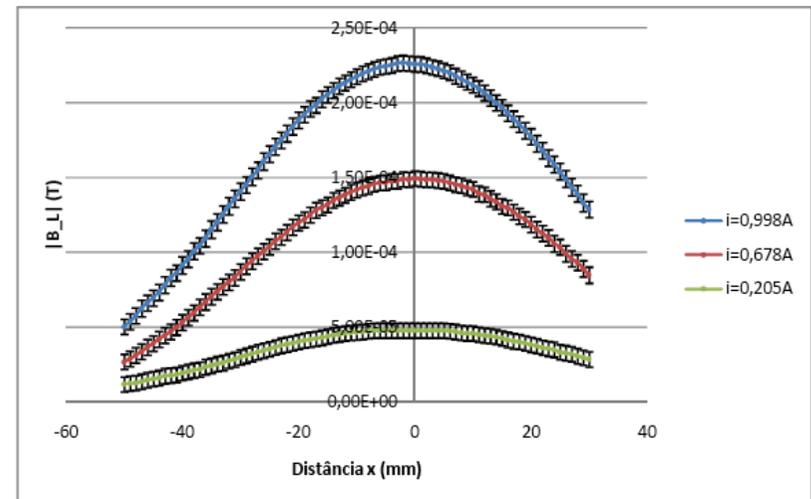
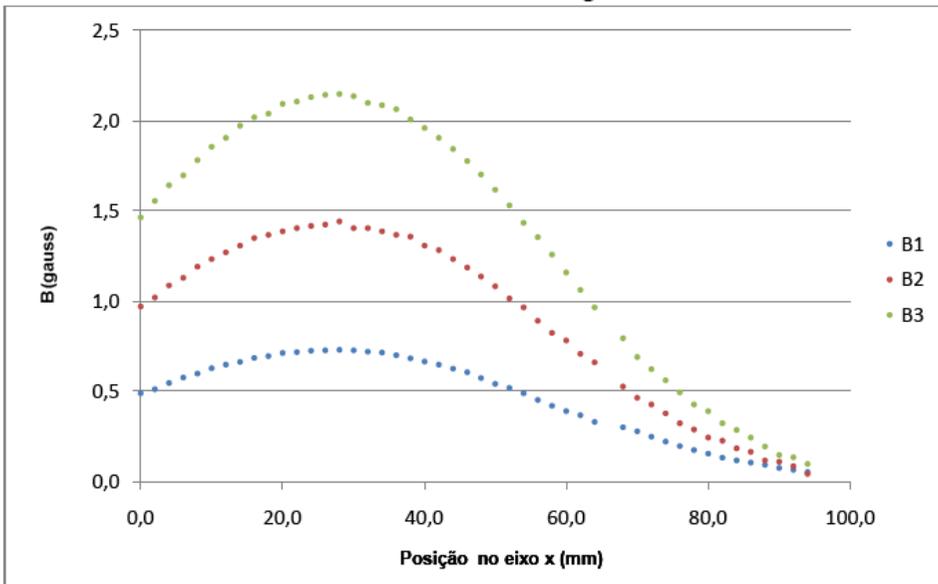


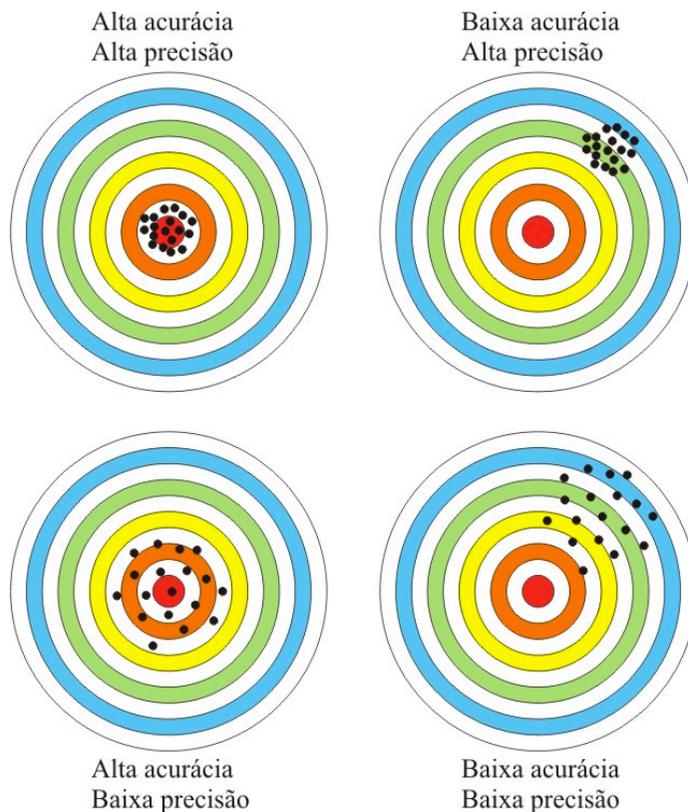
Gráfico 1 – Valores de B ao longo do eixo x



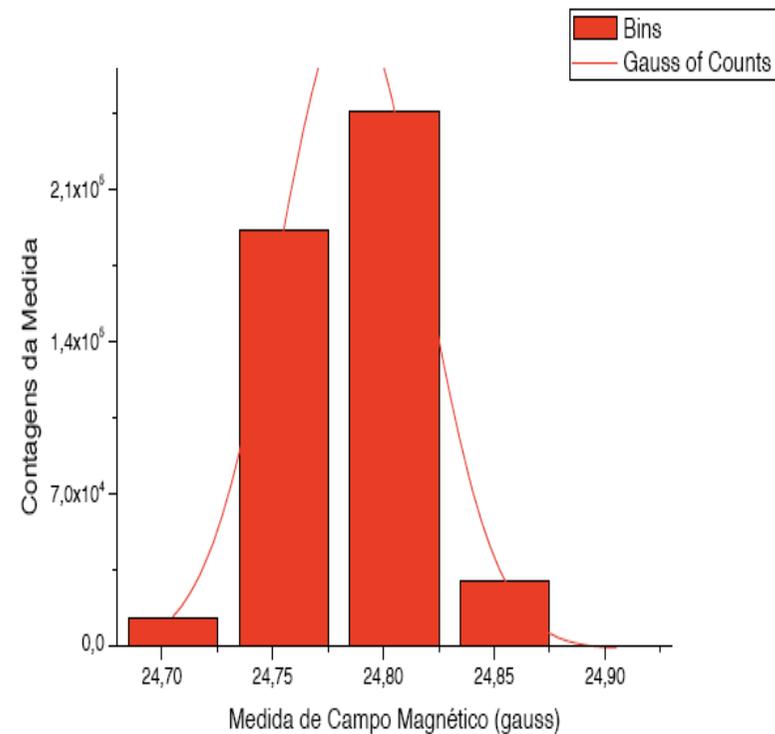
Incertezas nas medidas

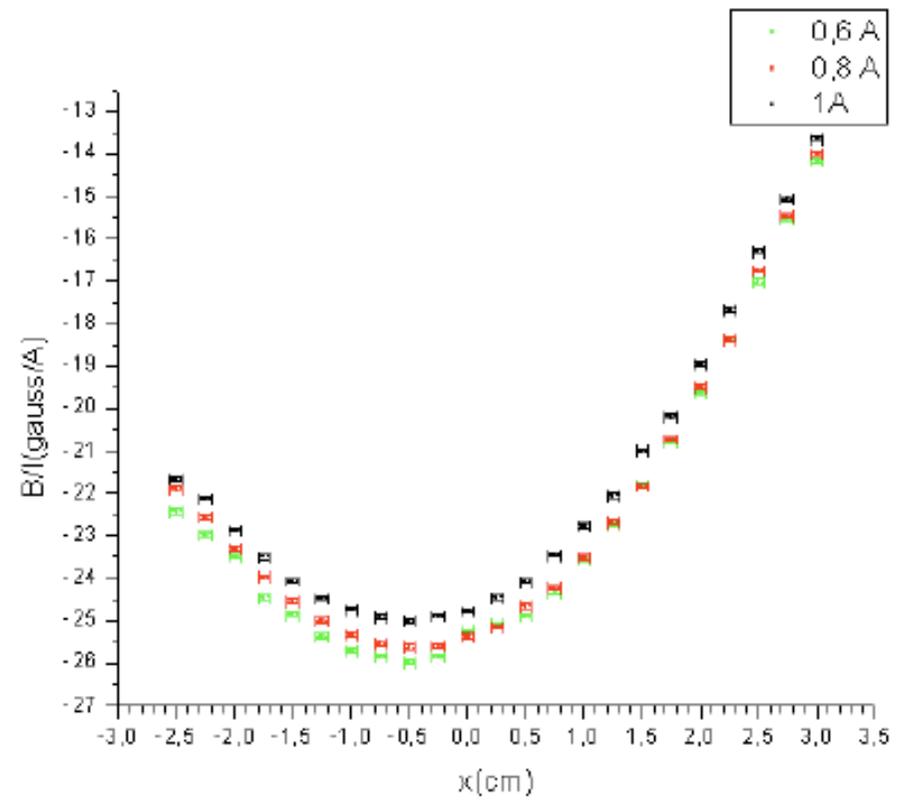
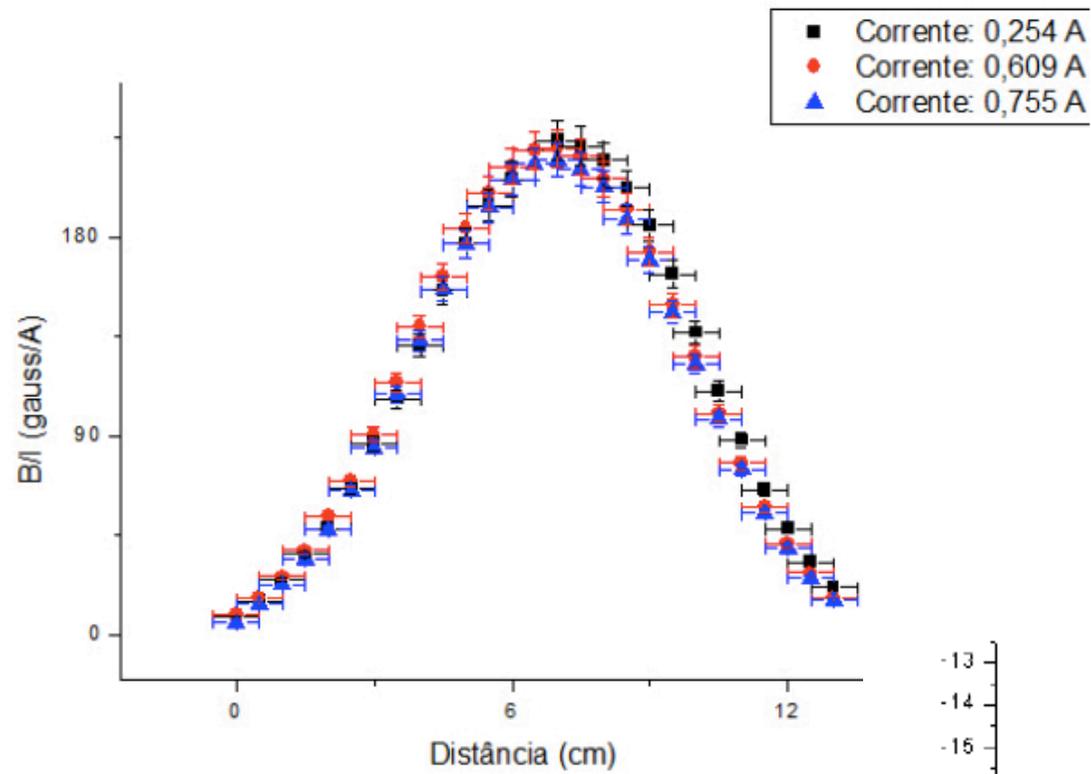
Table 1
Magnetic Sensor Specification Chart

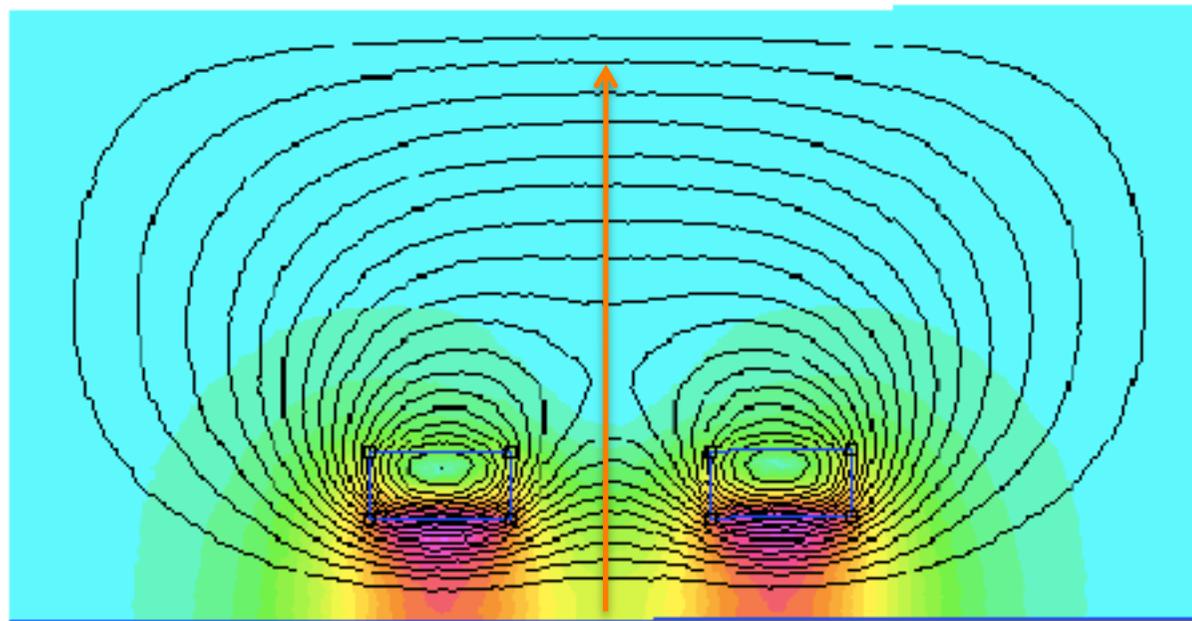
Range	Gain	Resolution	Accuracy	Calibration Factor
±1000 gauss	1X	0.5 gauss	100 gauss	100 gauss/volt
±100 gauss	10X	0.05 gauss	10 gauss	10 gauss/volt
±10 gauss	100X	0.050 gauss	1 gauss	1 gauss/volt



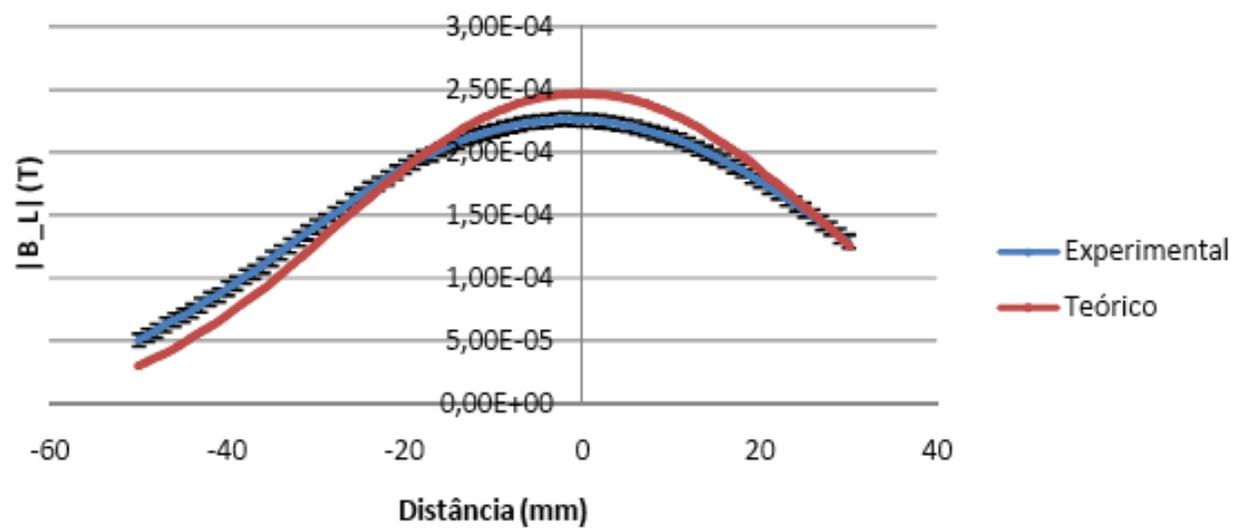
B) Gráfico 2.1: Histograma com ajuste Gaussiano para medidas perto de 24,80 gauss.







Comparação Resultados Teóricos e Experimentais para $i = 0,998A$



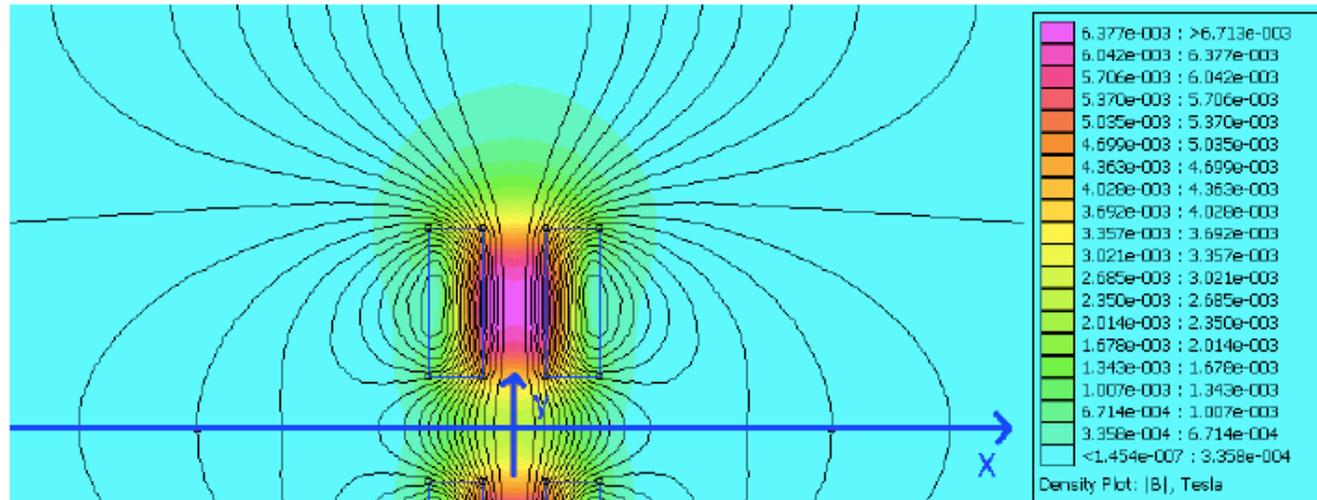
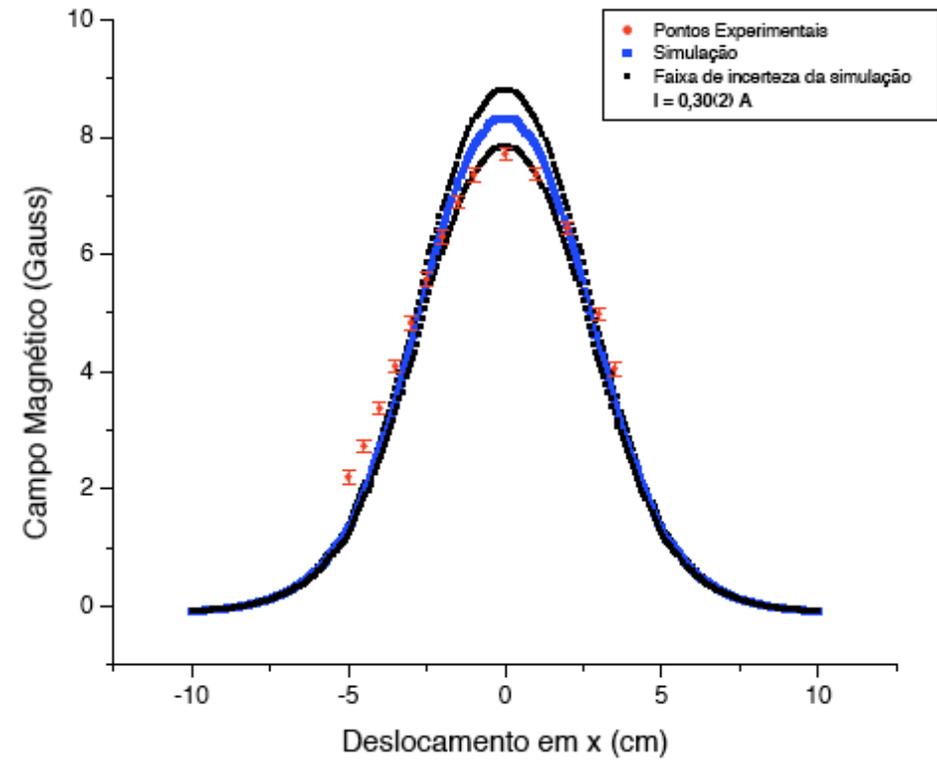


Figura 4 – Campo obtido no FEMM para $J = 0,271 \text{ MA/m}^2$, espelhado (já que é simétr



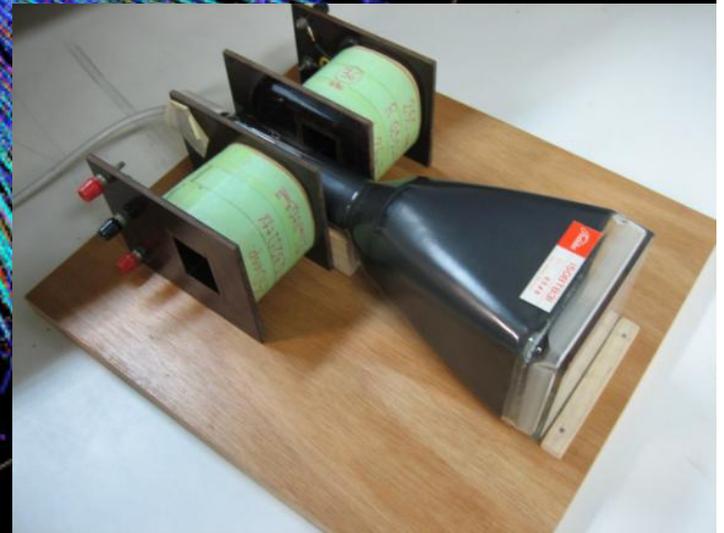
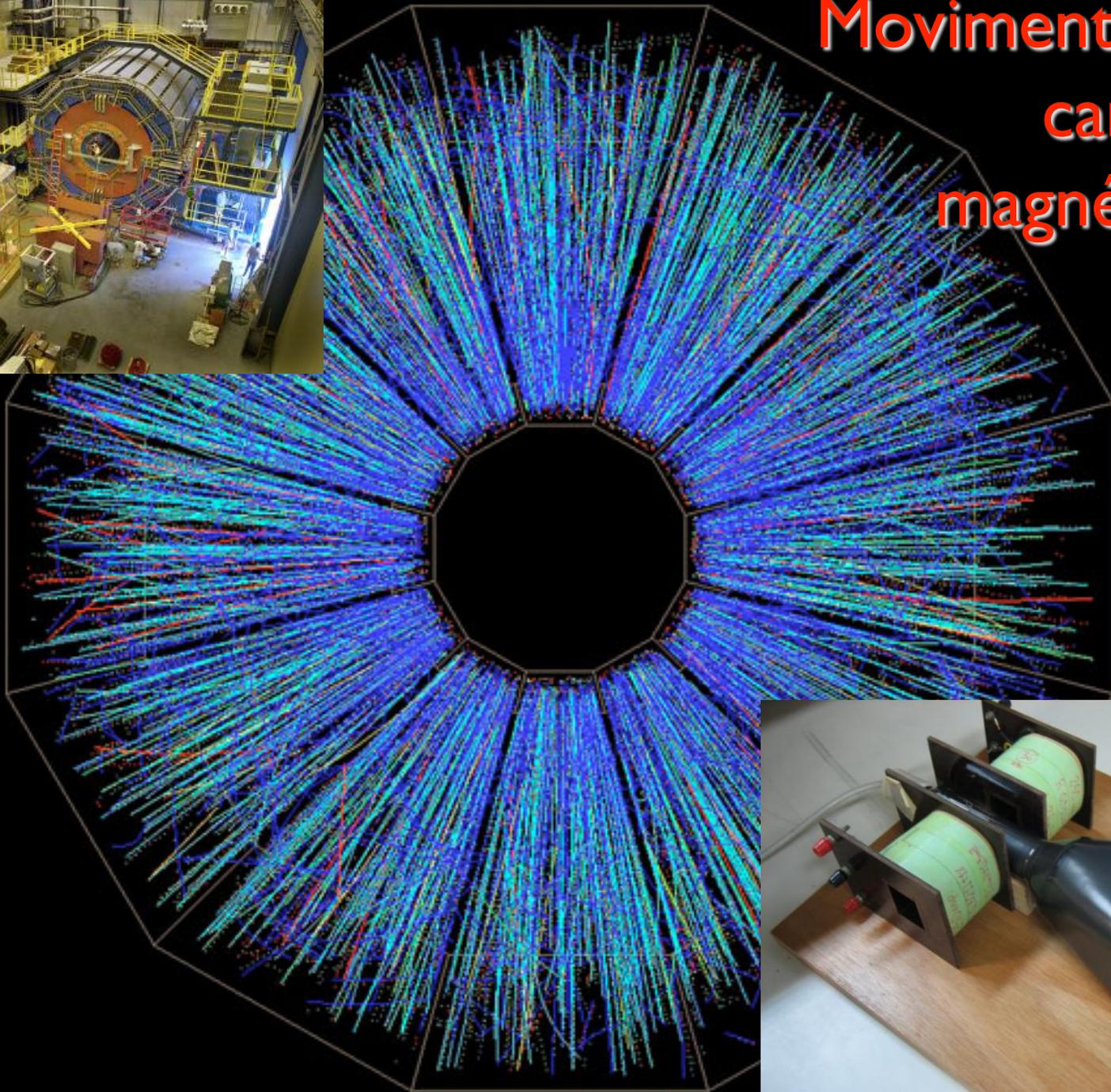
Quem é B/i ?

- Nós vimos que o campo magnético é proporcional à corrente elétrica

$$\beta = \beta(x, y, z) = \frac{B}{i}$$

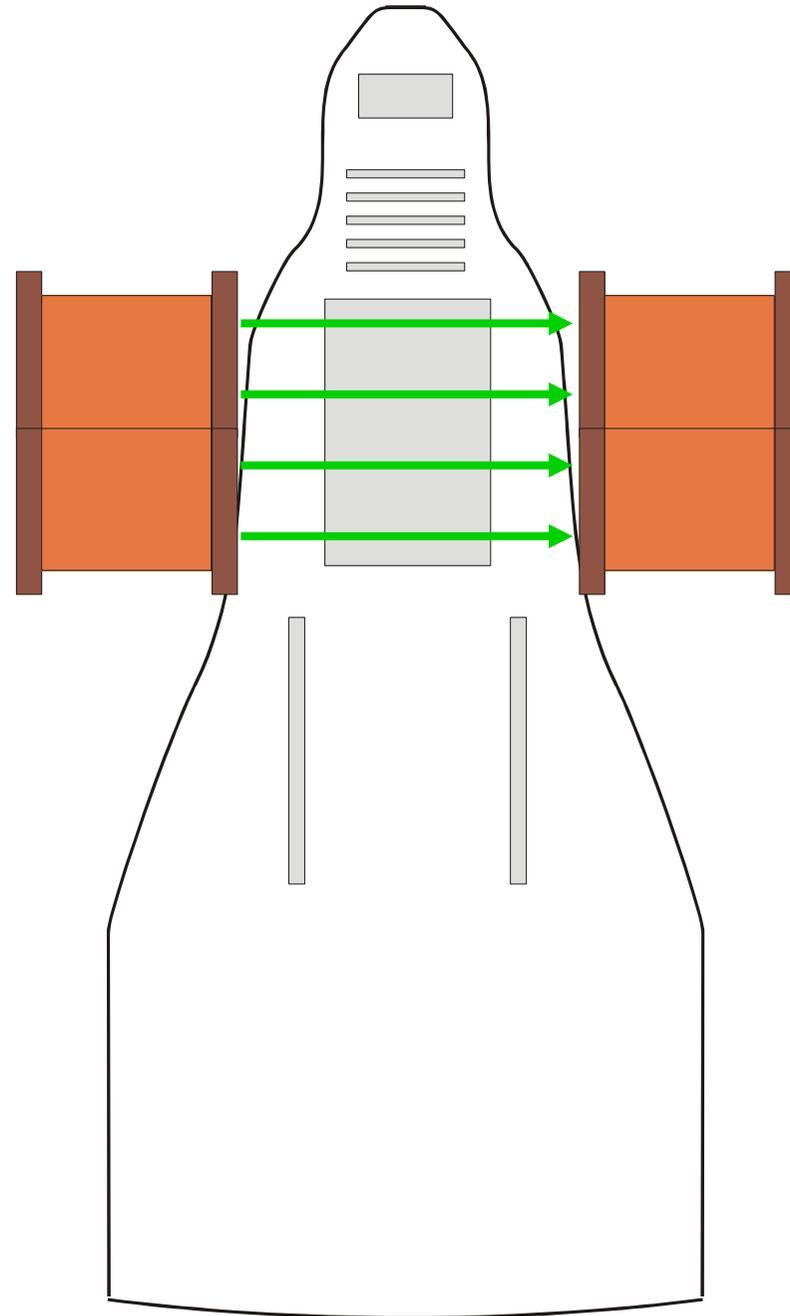
- Quem é β ?
 - Depende apenas da configuração espacial do problema
 - Conhecendo β eu sei o campo em qualquer posição do espaço para qualquer corrente.

Movimento em campos magnéticos



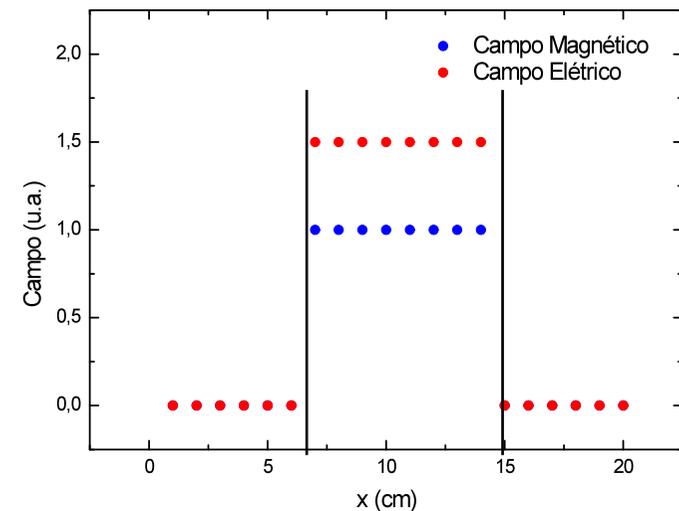
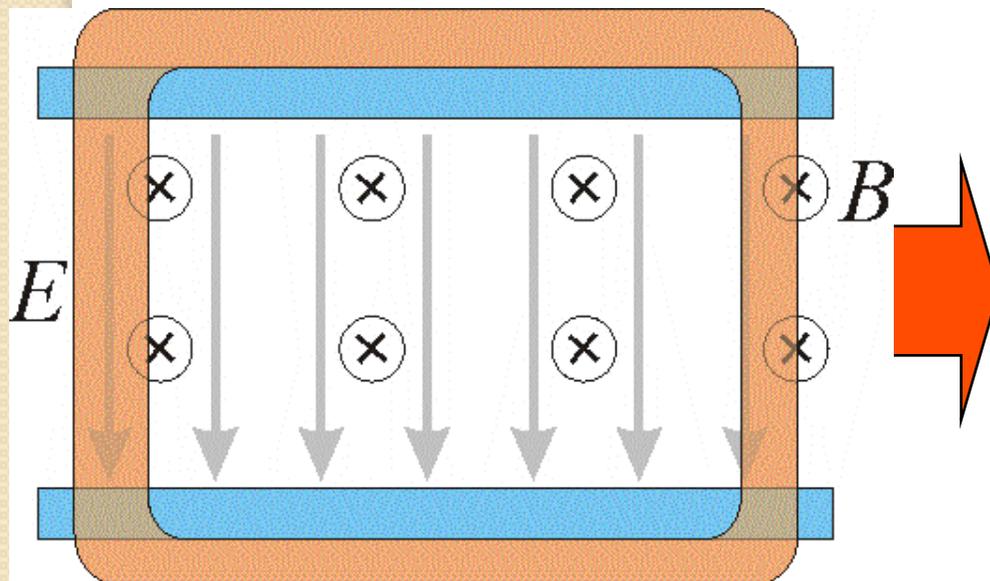
O nosso seletor de velocidades

- Tubo de raios catódicos para a parte de campo elétrico
- Duas bobinas em série para fazer o campo magnético



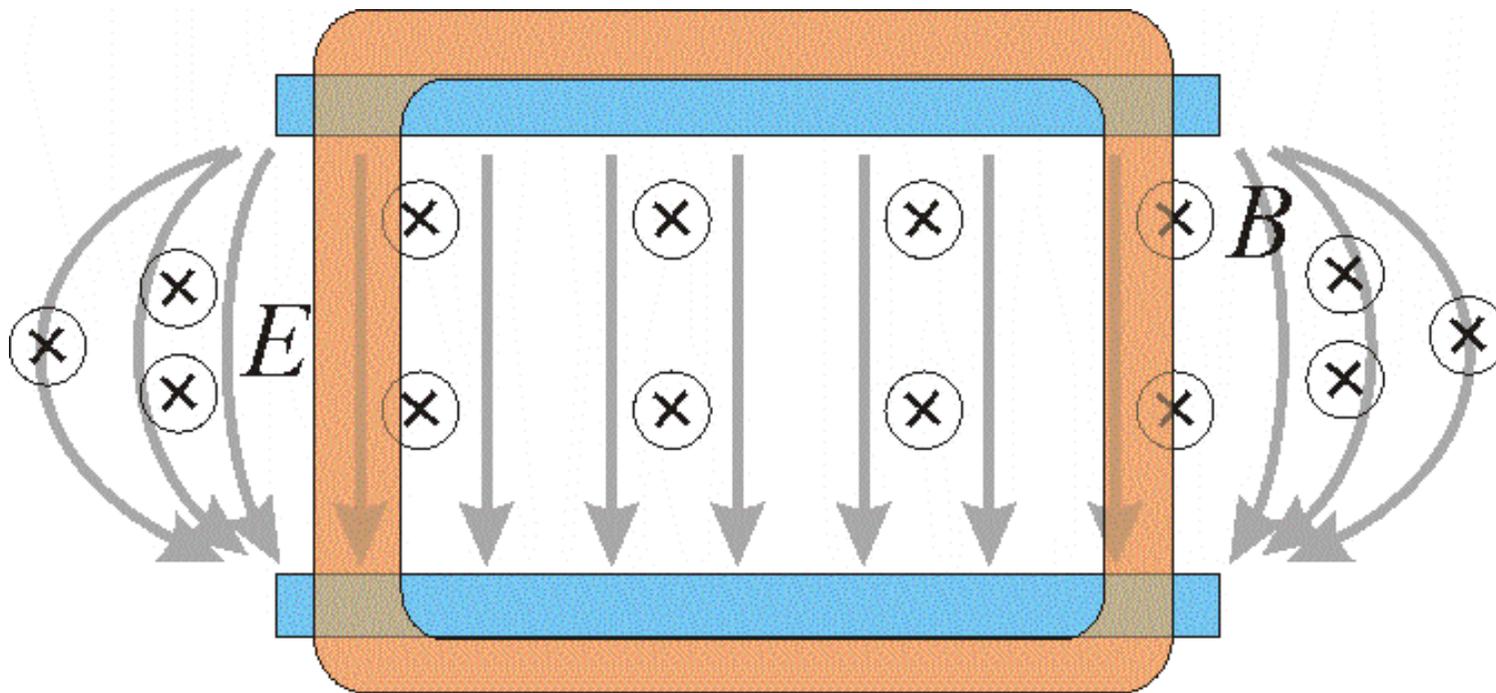
O seletor de velocidades ideal

- Equipamento composto de um campo elétrico e magnético cruzados (perpendiculares), uniformes, contantes e superpostos



O seletor de velocidades real

- Campos não ficam contidos na região das placas e das bobinas

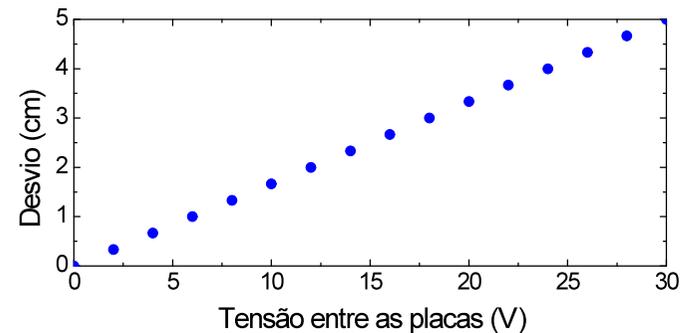
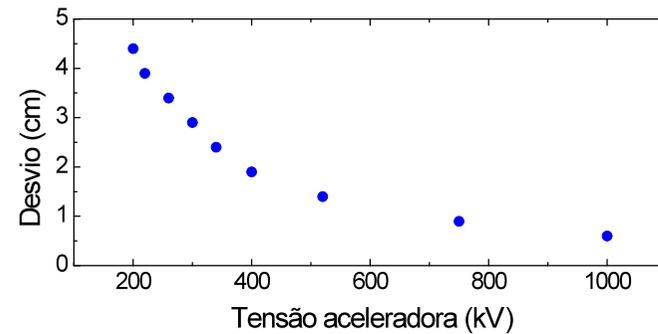


Estudo do campo elétrico

- Medidas experimentais indicaram que, dentro da precisão experimental, podemos aproximar o campo para uma configuração ideal

$$h = \frac{L_P V_P}{2dV_{AC}} \left(\frac{L_P}{2} + D_{PS} \right)$$

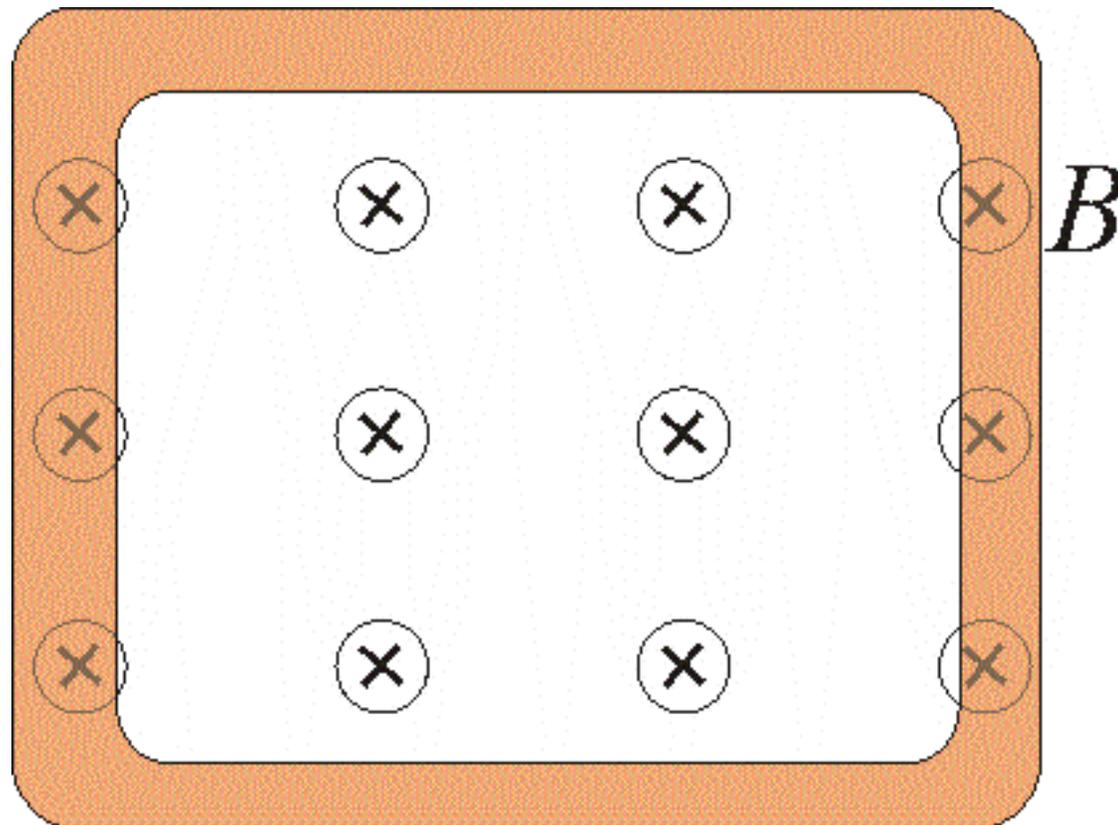
Obtivemos o tamanho e distância efetiva das placas



- Podemos fazer o mesmo para o campo magnético?

Modelo para o campo magnético

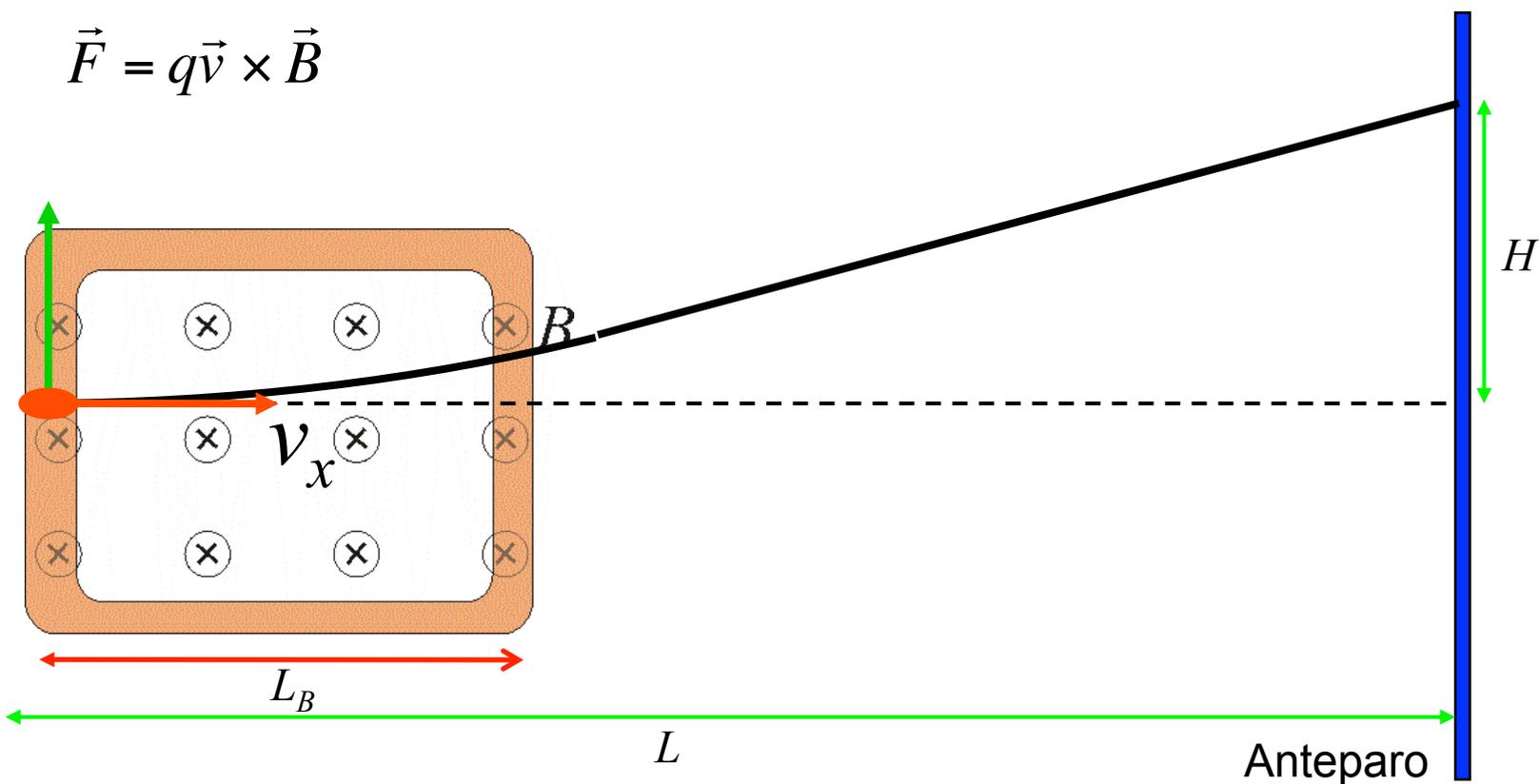
- Campo uniforme e constante entre as bobinas e nulo fora das bobinas



Movimento de uma partícula neste campo idealizado

- Campo uniforme e constante entre as bobinas e nulo fora das bobinas

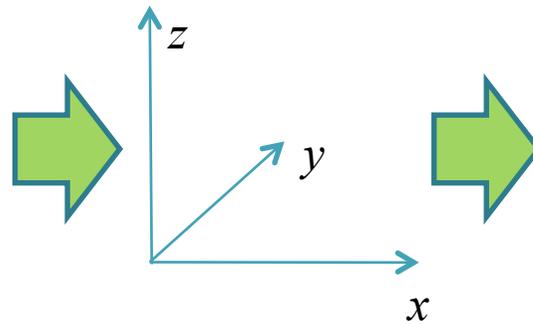
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$



Movimento de uma partícula neste campo idealizado

- Vamos resolver o movimento dentro da bobina

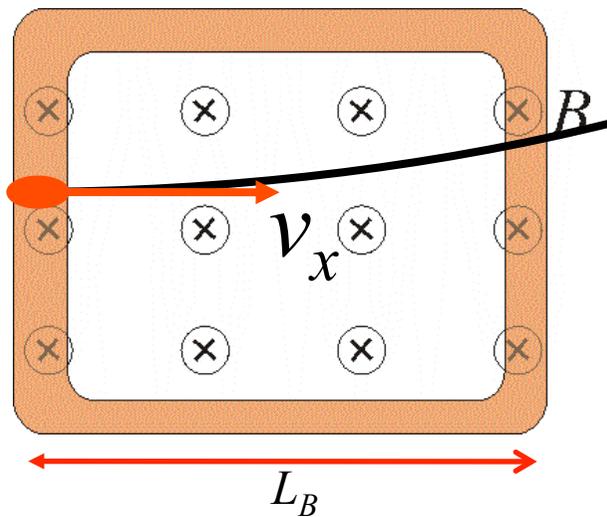
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$



$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

$$\vec{B} = B\hat{j}$$

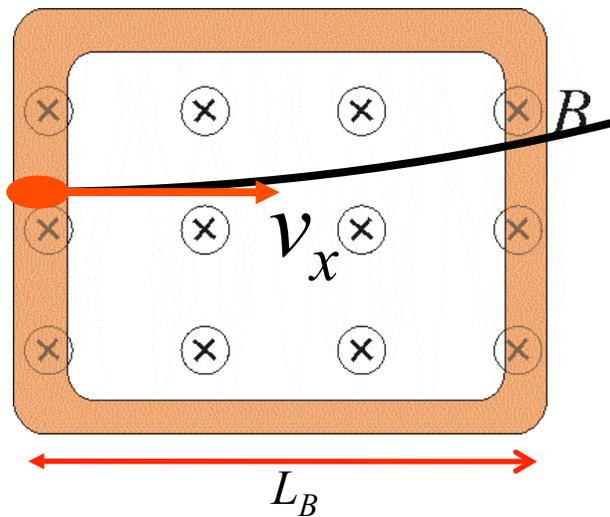



$$\vec{F} = q \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & B & 0 \end{vmatrix}$$

Movimento de uma partícula neste campo idealizado

- Vamos resolver o movimento dentro da bobina

$$\vec{F} = q \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & B & 0 \end{vmatrix} = qB(v_x \hat{k} - v_z \hat{i}) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} F_x &= -qBv_z \\ F_z &= qBv_x \end{aligned}$$



$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} v_x &= -\frac{qB}{m} v_z \\ \frac{d}{dt} v_z &= \frac{qB}{m} v_x \end{aligned} \right\} \omega = \frac{qB}{m} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} v_x &= -\omega v_z \\ \frac{d}{dt} v_z &= \omega v_x \end{aligned} \right.$$

Movimento de uma partícula neste campo idealizado

- Vamos resolver o movimento dentro da bobina

$$\frac{d}{dt}v_x = -\omega v_z$$

$$\frac{d}{dt}v_z = \omega v_x$$

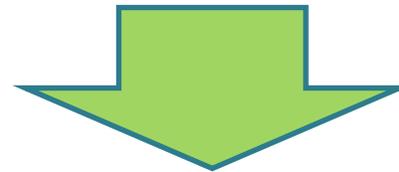


$$\frac{d^2}{dt^2}v_x = -\omega \frac{d}{dt}v_z$$

$$\frac{d}{dt}v_z = \omega v_x$$



$$\frac{d^2}{dt^2}v_x = -\omega^2 v_x$$

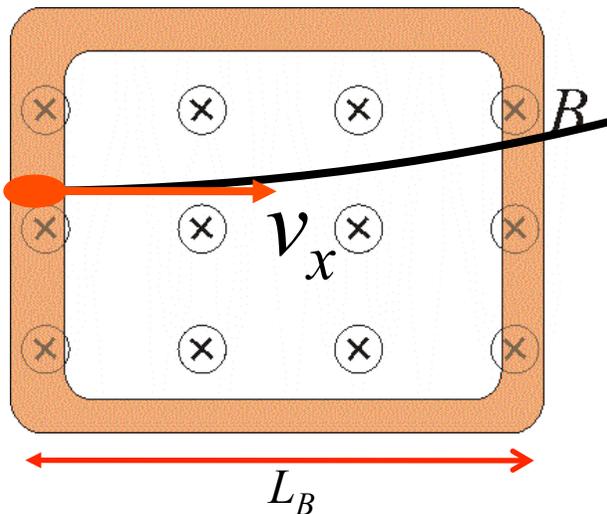


$$v_x = v_{0x} \cos(\omega t)$$

$$v_z = -\frac{1}{\omega} \frac{d}{dt}v_x$$



$$v_z = v_{0x} \sin(\omega t)$$



Movimento de uma partícula neste campo idealizado

- Vamos resolver o movimento dentro da bobina

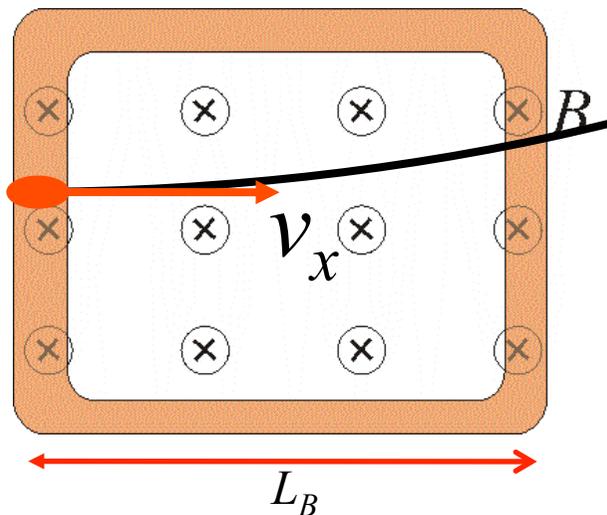
$$v_x = v_{0x} \cos(\omega t)$$

$$v_z = v_{0x} \sin(\omega t)$$



$$x = \frac{v_{0x}}{\omega} \sin(\omega t)$$

$$z = -\frac{v_{0x}}{\omega} \cos(\omega t)$$



Qual é a trajetória descrita por estas equações?

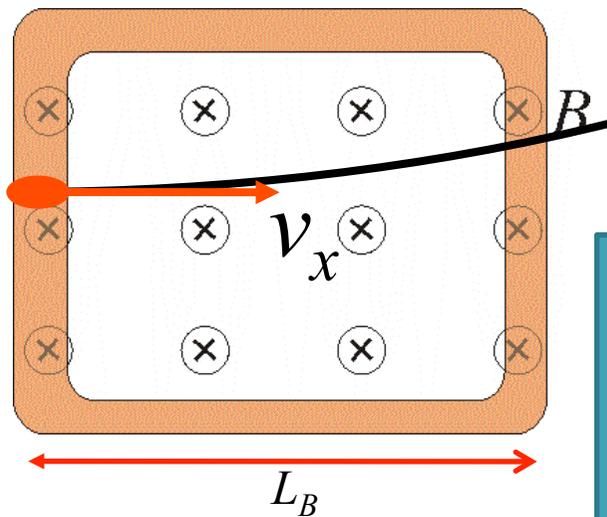
Vamos calcular, como se não soubesse a resposta, a grandeza $z^2 + x^2$

Movimento de uma partícula neste campo idealizado

- Vamos resolver o movimento dentro da bobina

$$x^2 + z^2 = \left(\frac{v_{0x}}{\omega} \right)^2$$

Equação de uma circunferência de raio v_{0x}/ω



$$R = \frac{v_{0x}}{\omega} = \frac{mv_{0x}}{qB}$$

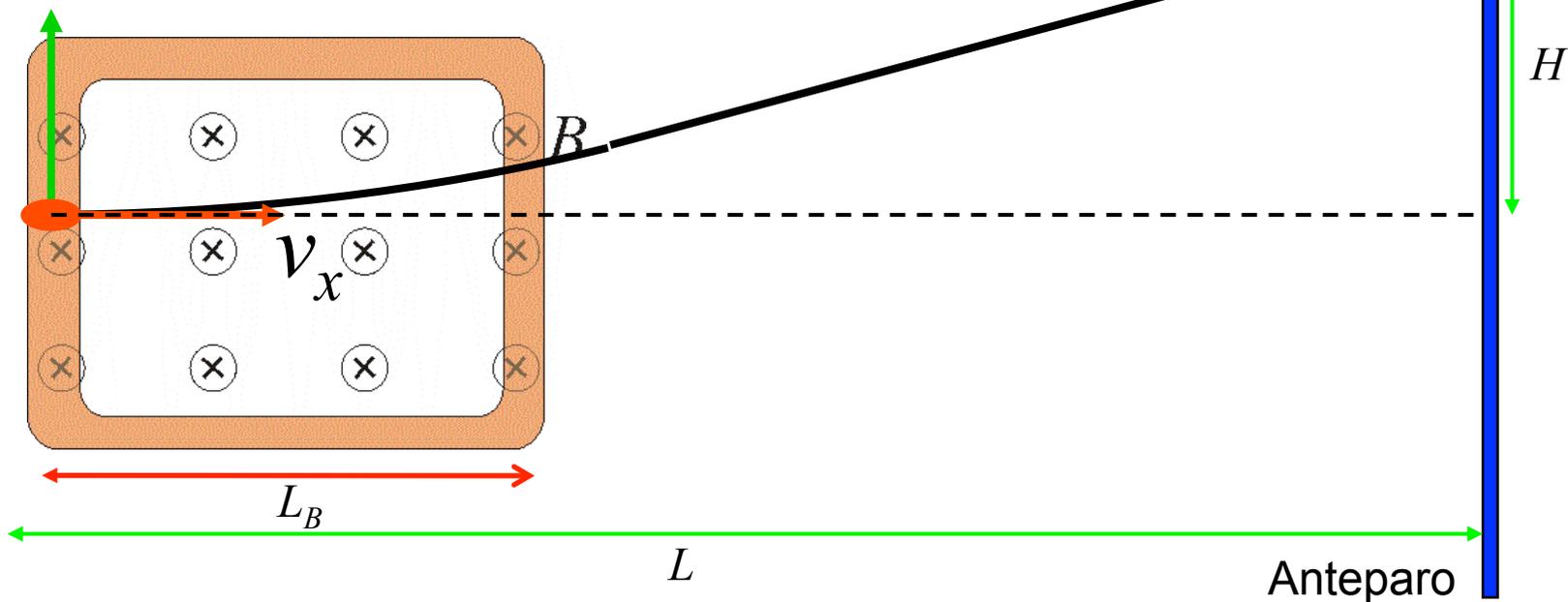
O resultado é bastante intuitivo!
Sendo a força magnética perpendicular à velocidade ela é centrípeta e a trajetória é “circular”

Movimento de uma partícula neste campo idealizado

- Trajetória circular na região do campo magnético

$$R = \frac{mv_{0x}}{qB}$$

- Qual é o deslocamento H na tela do TRC?
- Temos que usar geometria

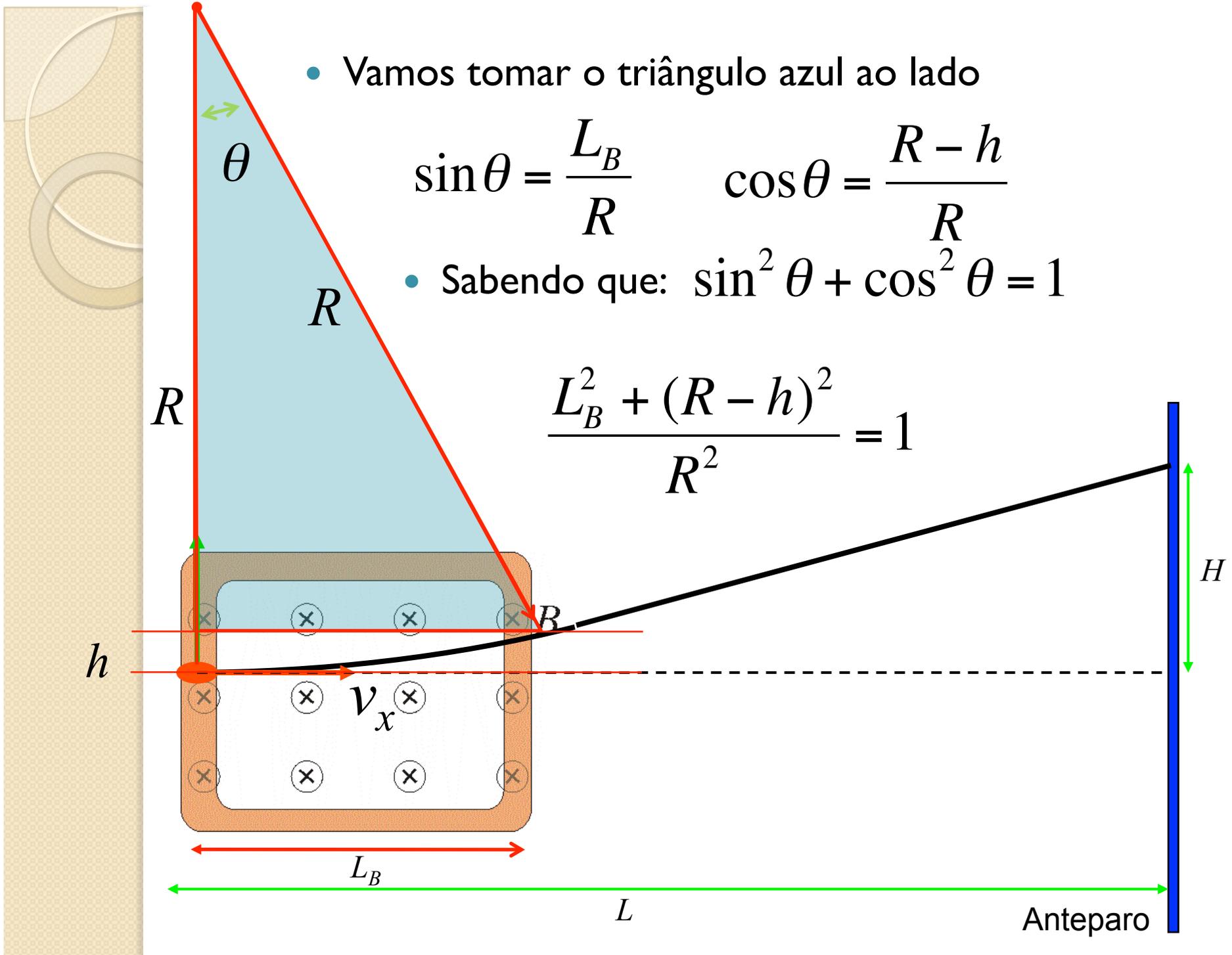


- Vamos tomar o triângulo azul ao lado

$$\sin \theta = \frac{L_B}{R} \quad \cos \theta = \frac{R-h}{R}$$

- Sabendo que: $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$$\frac{L_B^2 + (R-h)^2}{R^2} = 1$$



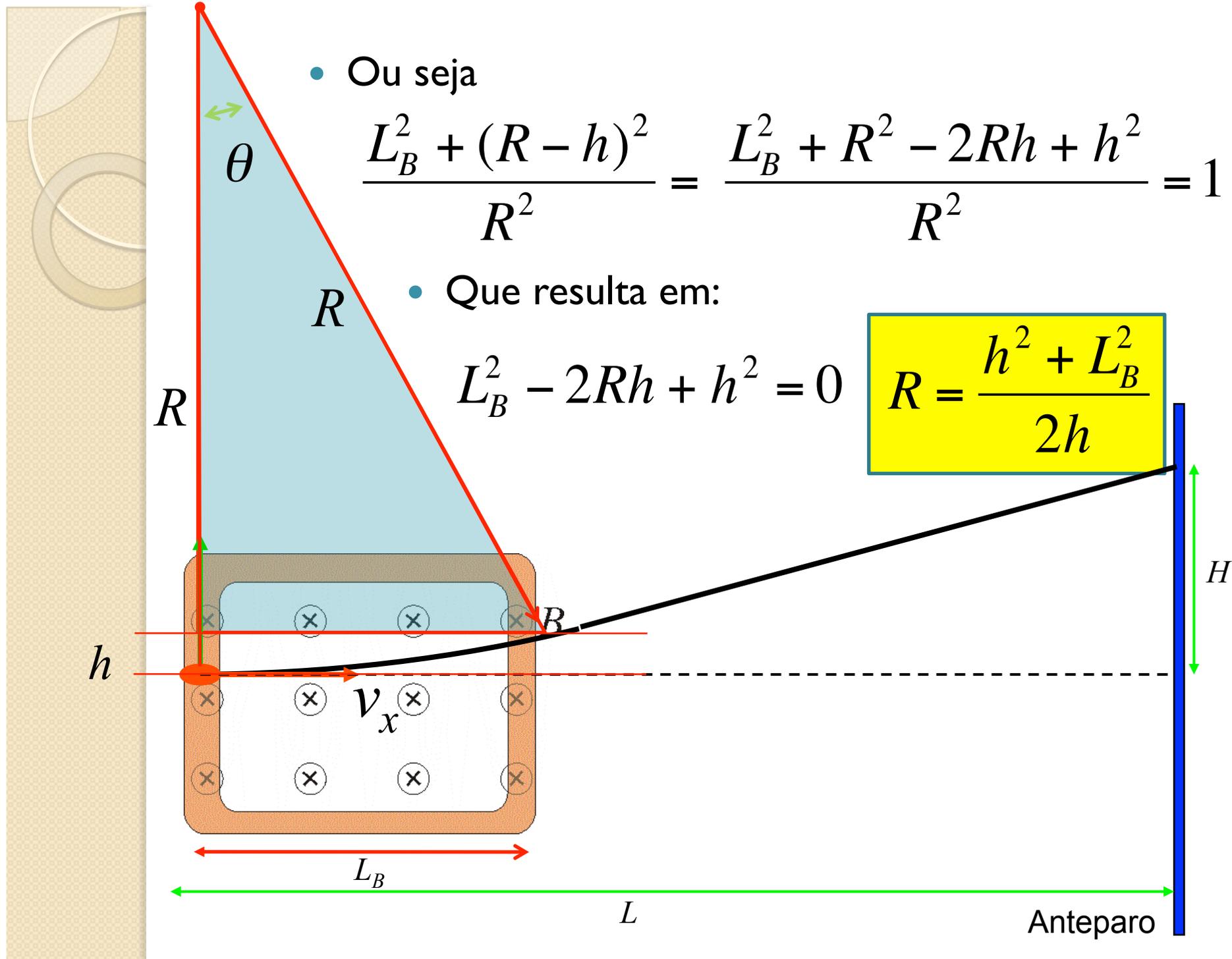
- Ou seja

$$\frac{L_B^2 + (R - h)^2}{R^2} = \frac{L_B^2 + R^2 - 2Rh + h^2}{R^2} = 1$$

- Que resulta em:

$$L_B^2 - 2Rh + h^2 = 0$$

$$R = \frac{h^2 + L_B^2}{2h}$$

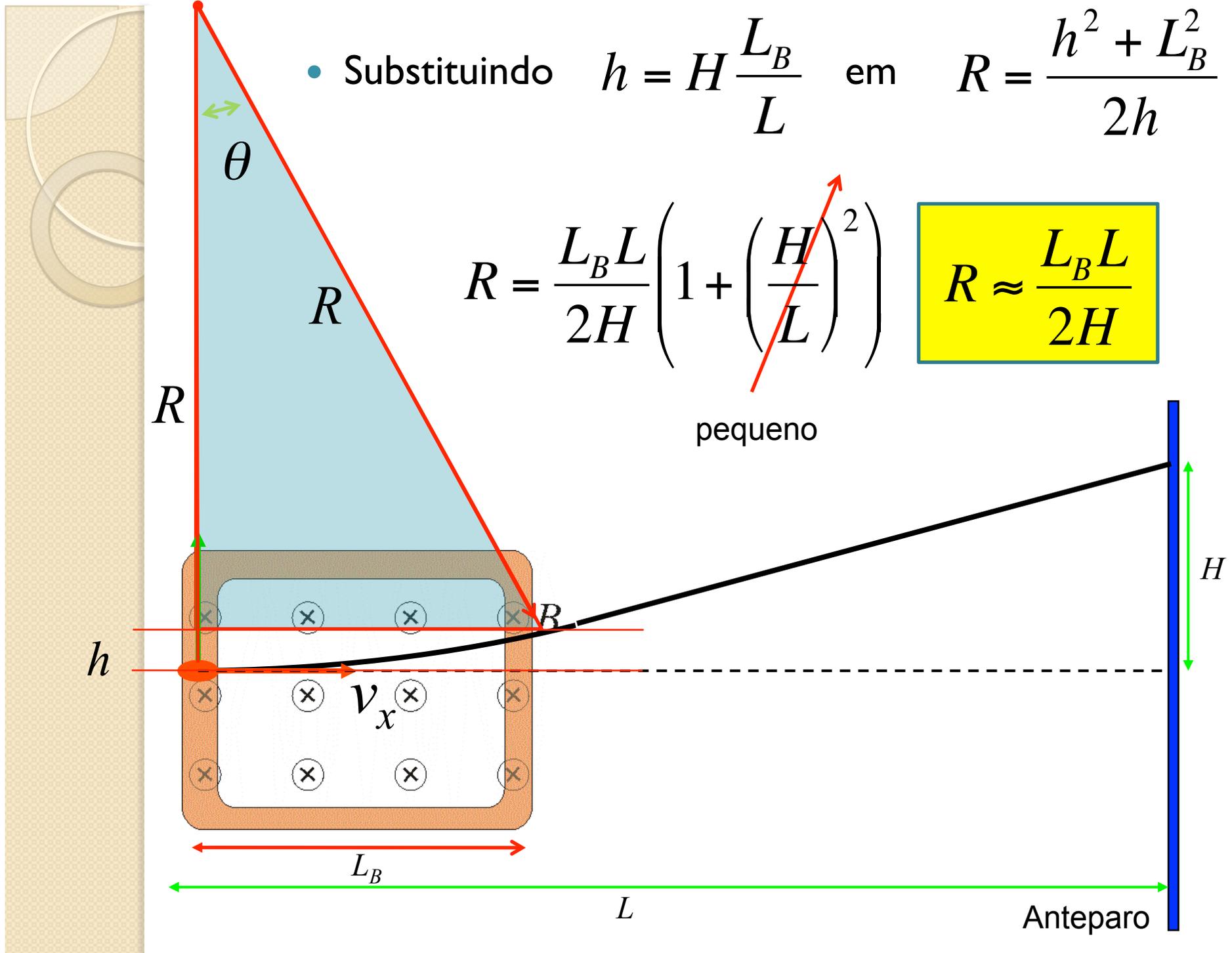


- Substituindo $h = H \frac{L_B}{L}$ em $R = \frac{h^2 + L_B^2}{2h}$

$$R = \frac{L_B L}{2H} \left(1 + \left(\frac{H}{L} \right)^2 \right)$$

$$R \approx \frac{L_B L}{2H}$$

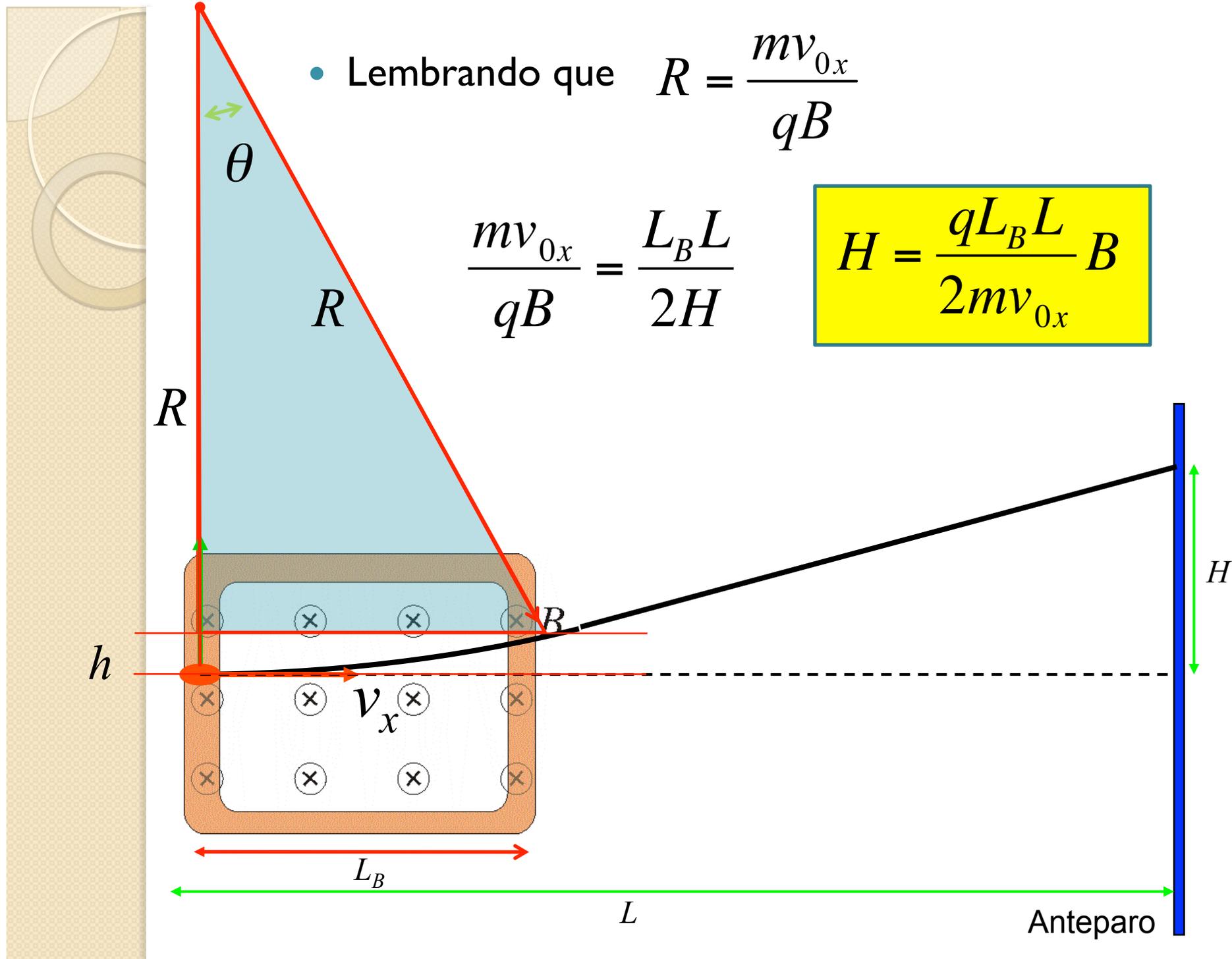
pequeno



- Lembrando que $R = \frac{mv_{0x}}{qB}$

$$\frac{mv_{0x}}{qB} = \frac{L_B L}{2H}$$

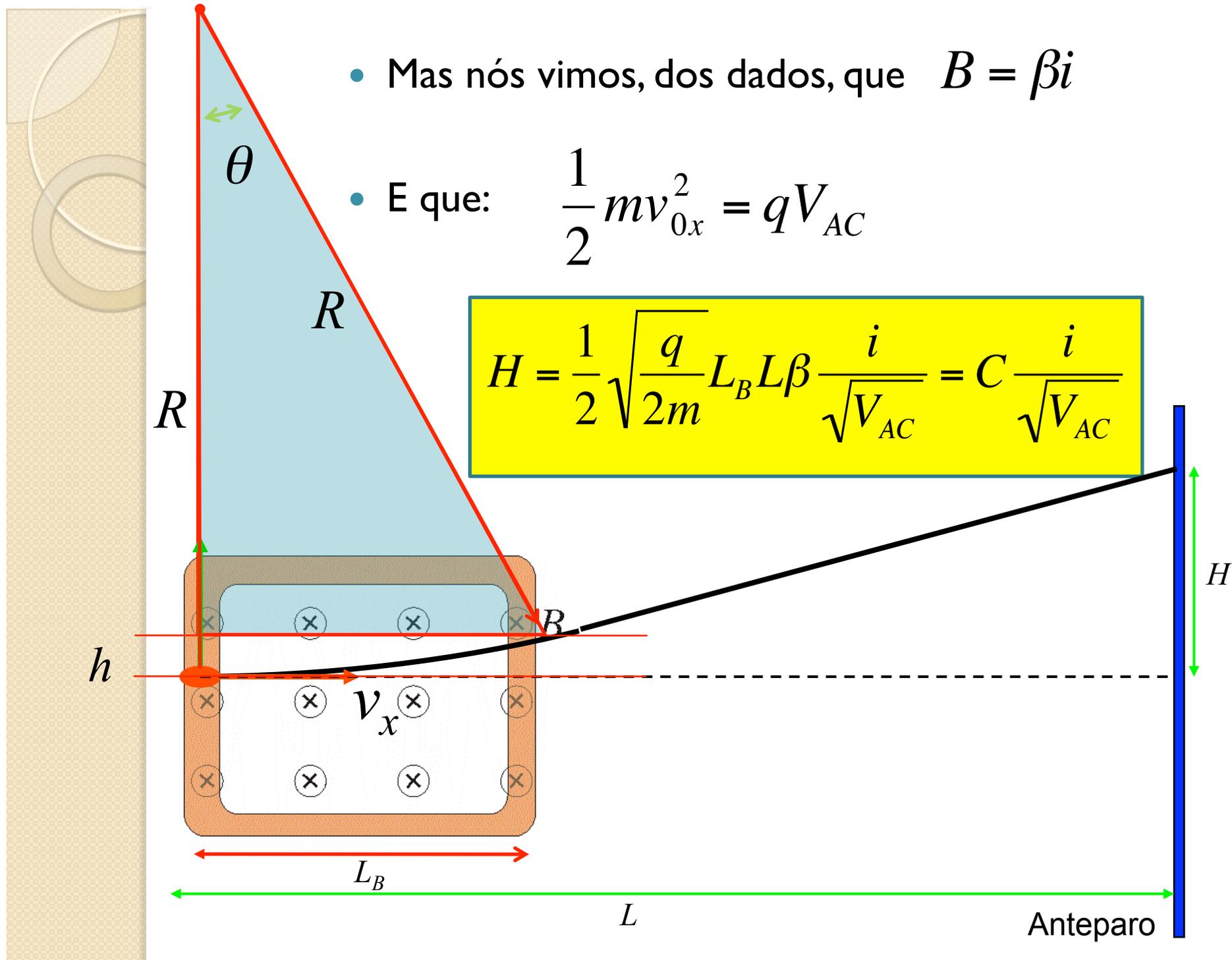
$$H = \frac{qL_B L}{2mv_{0x}} B$$



- Mas nós vimos, dos dados, que $B = \beta i$

- E que: $\frac{1}{2} m v_{0x}^2 = q V_{AC}$

$$H = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{q}{2m}} L_B L \beta \frac{i}{\sqrt{V_{AC}}} = C \frac{i}{\sqrt{V_{AC}}}$$



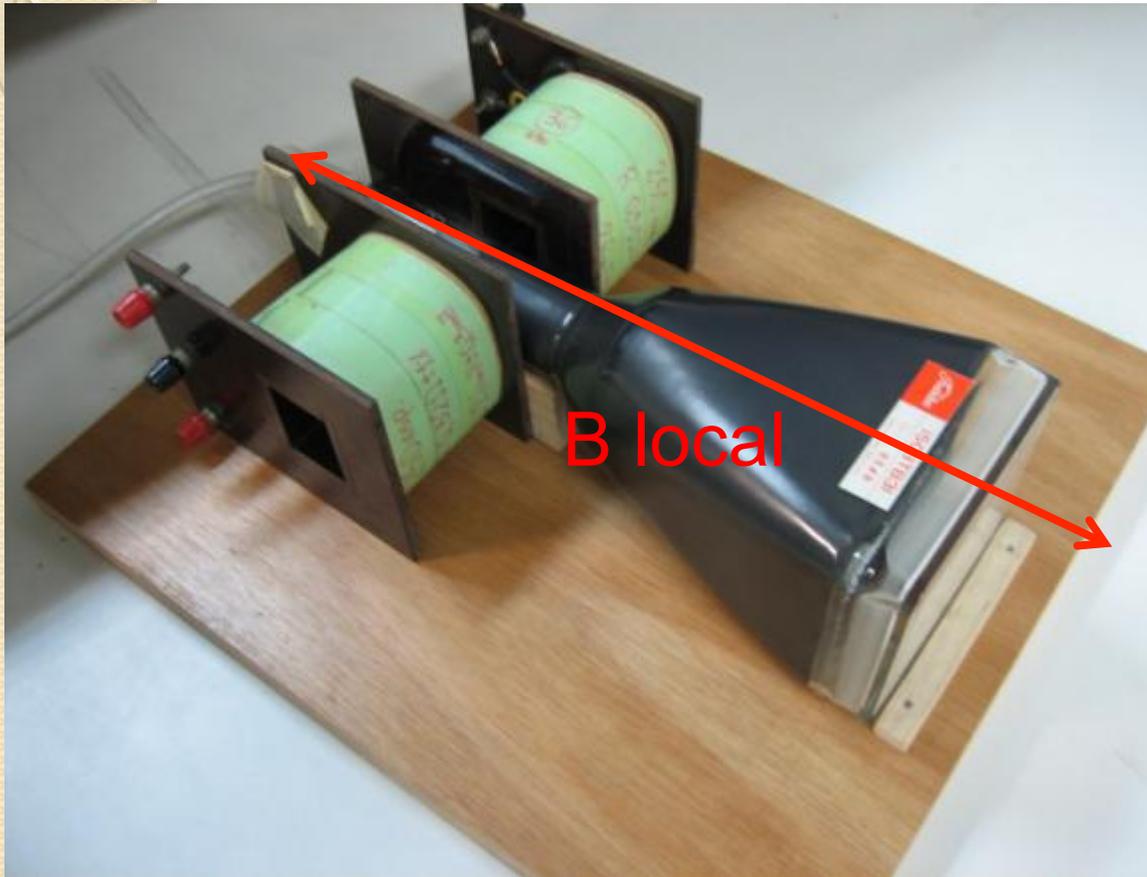
Objetivos da semana

- Testar a aproximação teórica de campo constante, ou seja, testar que:

$$H = C \frac{i}{\sqrt{V_{AC}}}$$

- H depende linearmente da corrente
- H depende do inverso da raiz da tensão de aceleração
- Obter a constante C e, sabendo a constante β que relaciona a corrente com o campo, determinar o comprimento efetivo da bobina (L_B) através dos ajustes dos dados
 - Dica: vai ser necessário determinar o valor médio de β .

Cuidados experimentais



- Alinhar com B local
- Definir o zero quando a corrente nas bobinas e V entre as placas for nula
 - Lembre-se que H é a distância em relação ao ponto que NÃO há influência das bobinas.

Tarefas a serem entregues

- Dependência de H em função da corrente com ajuste apropriado segundo modelo teórico
- Dependência de H em função da tensão de aceleração com ajuste e escala apropriada segundo o modelo teórico
- Obter a constante C e o comprimento efetivo da bobina (L_B) através dos ajustes efetuados e dos dados da semana passada.
- Você pode medir o campo magnético local usando apenas o TRC? Justifique a sua resposta.
 - Se a resposta for afirmativa, meça o campo magnético local com o TRC. Compare com outros grupos.