



Física Experimental III

Notas de aula: www.if.usp.br/suaide

LabFlex: www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex

Aula 13

Prof. Alexandre Suaide

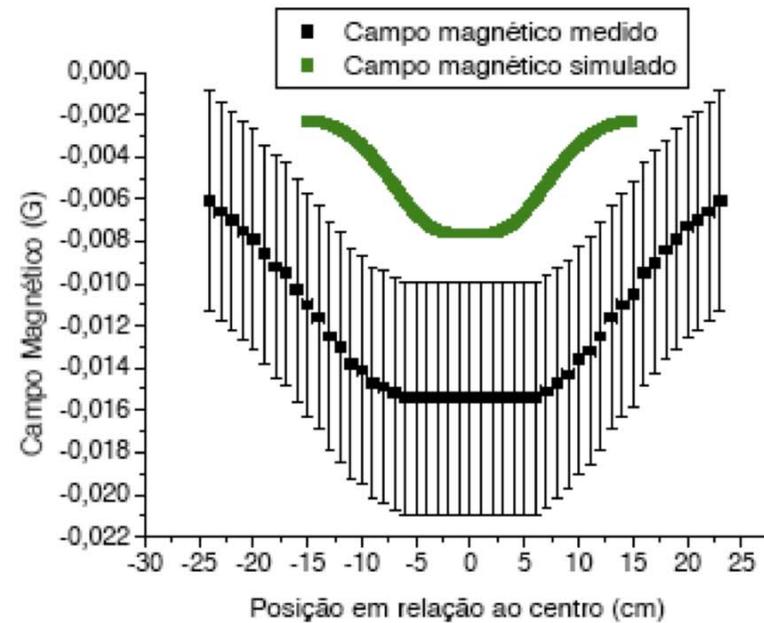
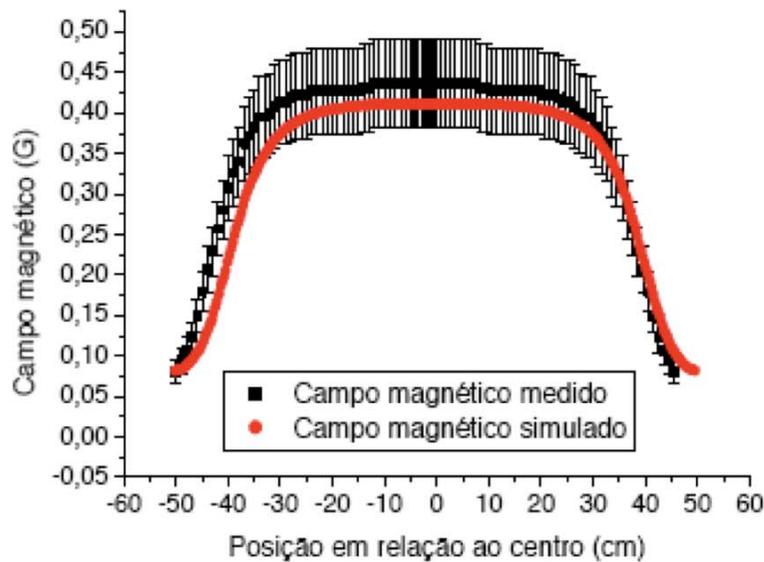
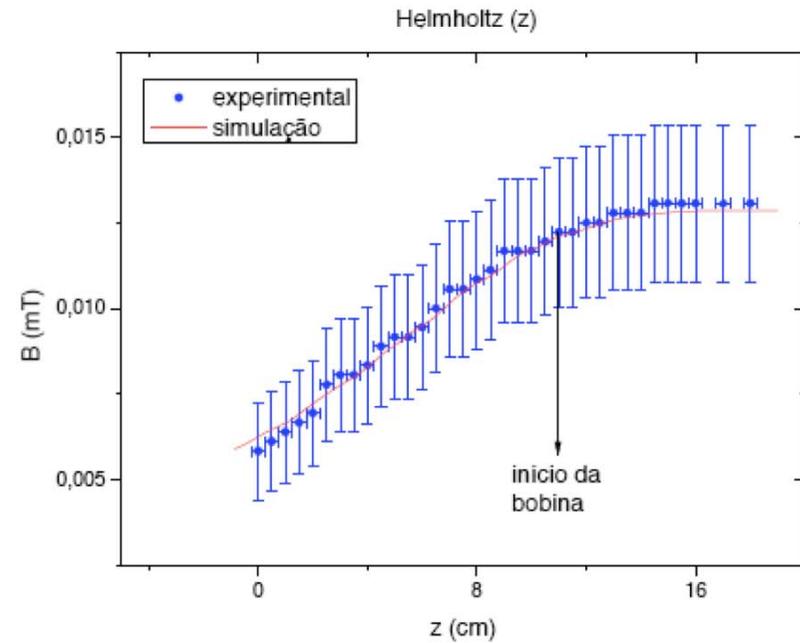
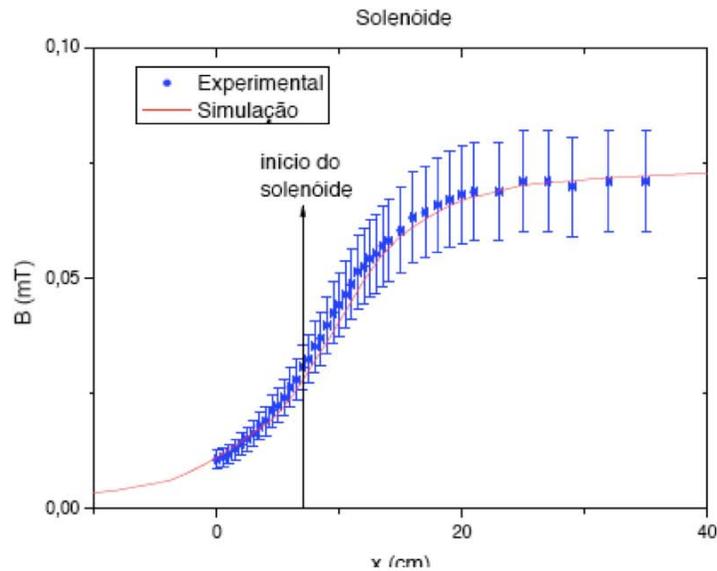
Ramal: 7072

Ed. Oscar Sala (Pelletron), sala 246

Objetivos da semana anterior

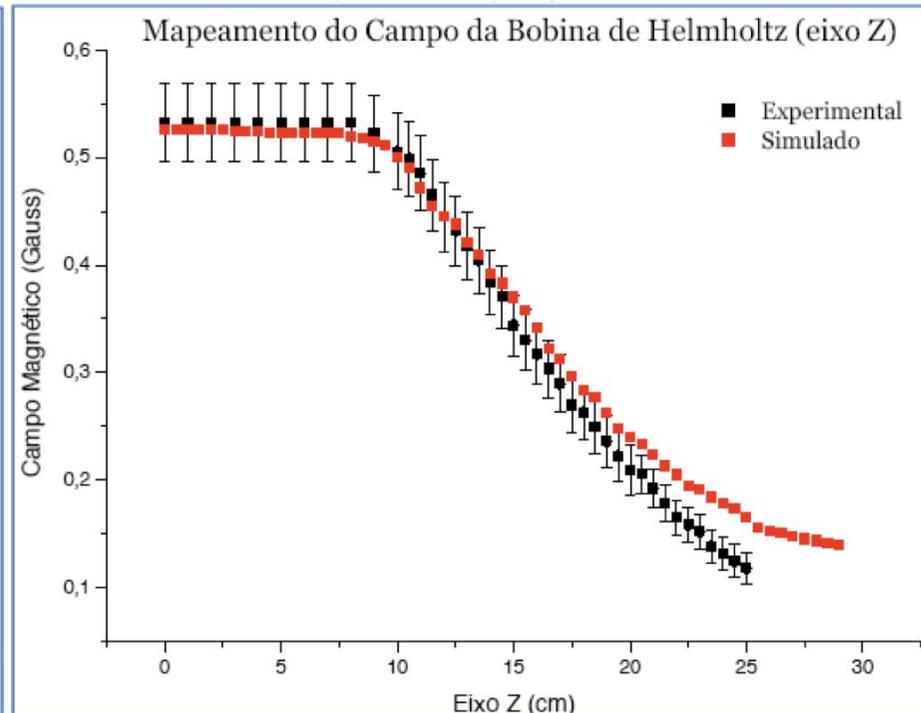
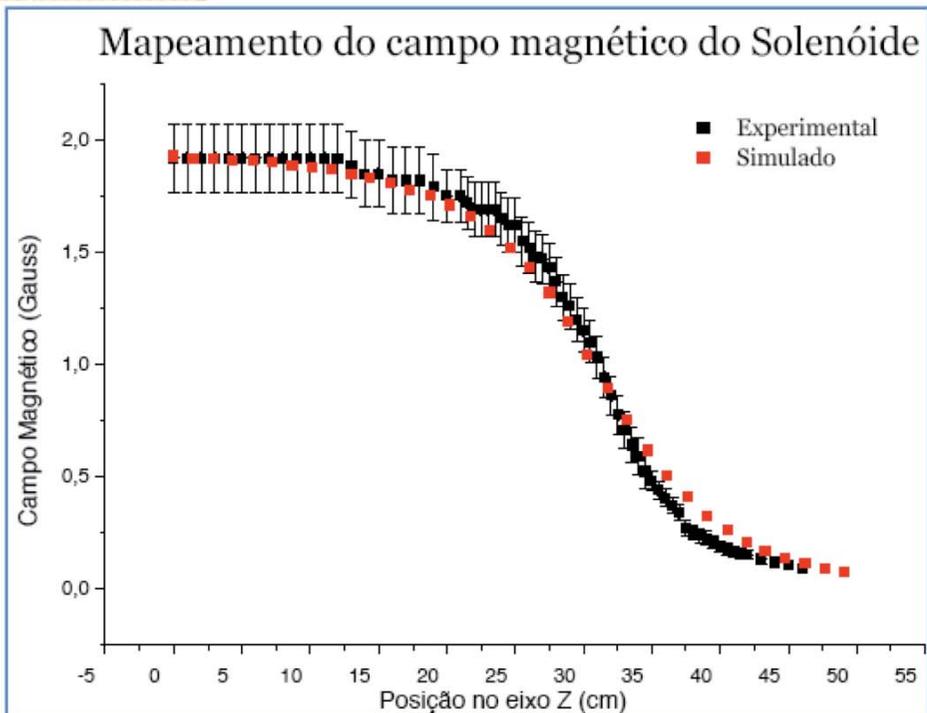
- Mapear os campos magnéticos de um solenóide finito e de uma bobina de Helmholtz
- Comparar os resultados com previsões teóricas ou simulações

Resultados



Incertezas das medidas? Quais as origens?

Resultados



De imediato podemos notar que as incertezas dos dados experimentais estão grandes. As incertezas desses pontos vêm da propagação de incerteza da segunda equação, fizemos uma análise nas incertezas; primeiro variamos a incerteza da frequência de 5 para 20, tivemos como resultado tivemos uma variação de $1 \cdot 10^{-7}$ na incerteza dos dados, depois variamos a incerteza do F.E.M., notamos que a incerteza do campo se alterava em torno de $1 \cdot 10^{-6}$ para uma variação de 0,001 na incerteza do F.E.M., por último variamos a incerteza da área efetiva e tivemos o mesmo resultado que o anterior. Com isso concluímos que as altas incertezas são devidas as medições feita no osciloscópio, sabemos que o osciloscópio é um instrumento muito preciso, podemos dizer que o método que estamos utilizando para achar as incertezas está superestimando-as.

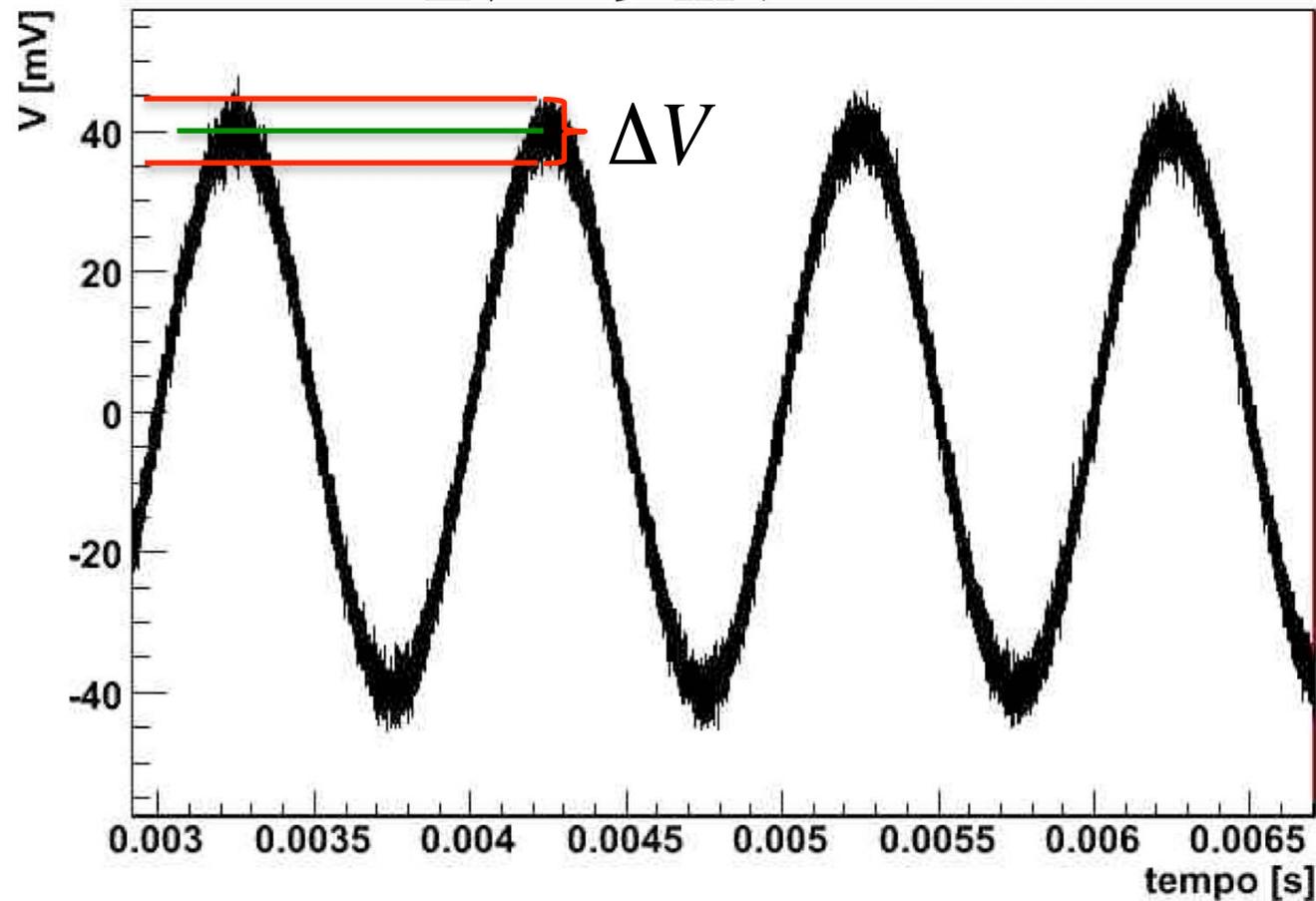
Dúvida

- fazendo a síntese desta semana reparei que assim como na anterior, ocorreu o problema da incerteza. Esclarecendo isso, queria conferir o que foi feito por mim e minha dupla no experimento: Para adequarmos a incerteza da voltagem medida no osciloscópio, pegamos a espessura da onda e, sendo ela constante em todas as ordens de grandezas das medidas, a incerteza é a metade deste tamanho.
- Acontece que esta espessura é da ordem de 8mV e a incerteza fica por volta de 4mV para as medidas, o que comparada com as medidas tomadas gera uma incerteza aparentemente superestimada. Fazendo o mapeamento do campo magnético desta semana fica muito claro isso.
- Se possível, agradeço um conselho para lidar com esse impasse.

Qual a amplitude do sinal?

$$V = 40,0 \pm ??? \text{ mV}$$

$$\Delta V \sim 9 \text{ mV} \sim 2\sigma ????$$

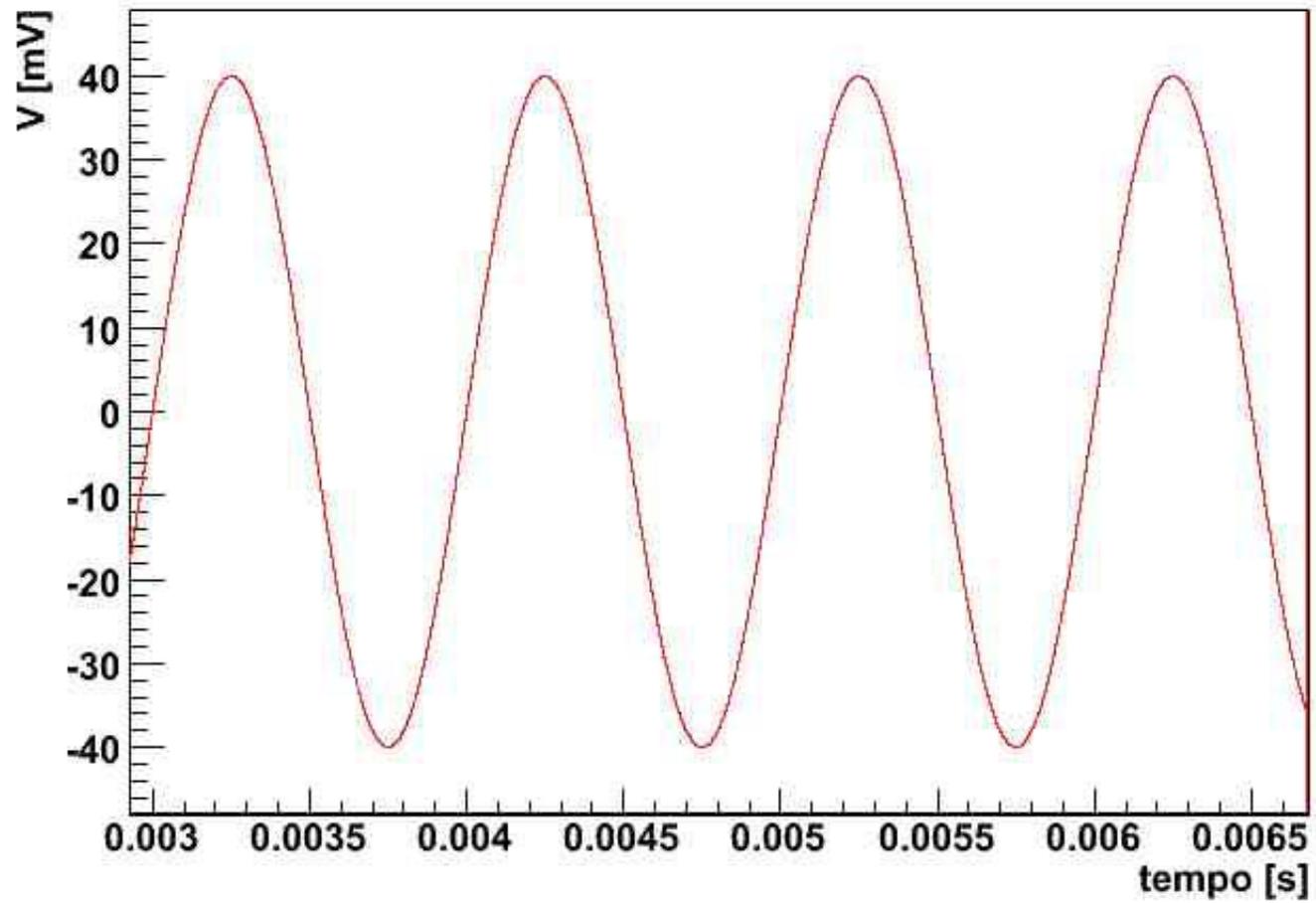


Simulando uma medida no osciloscópio

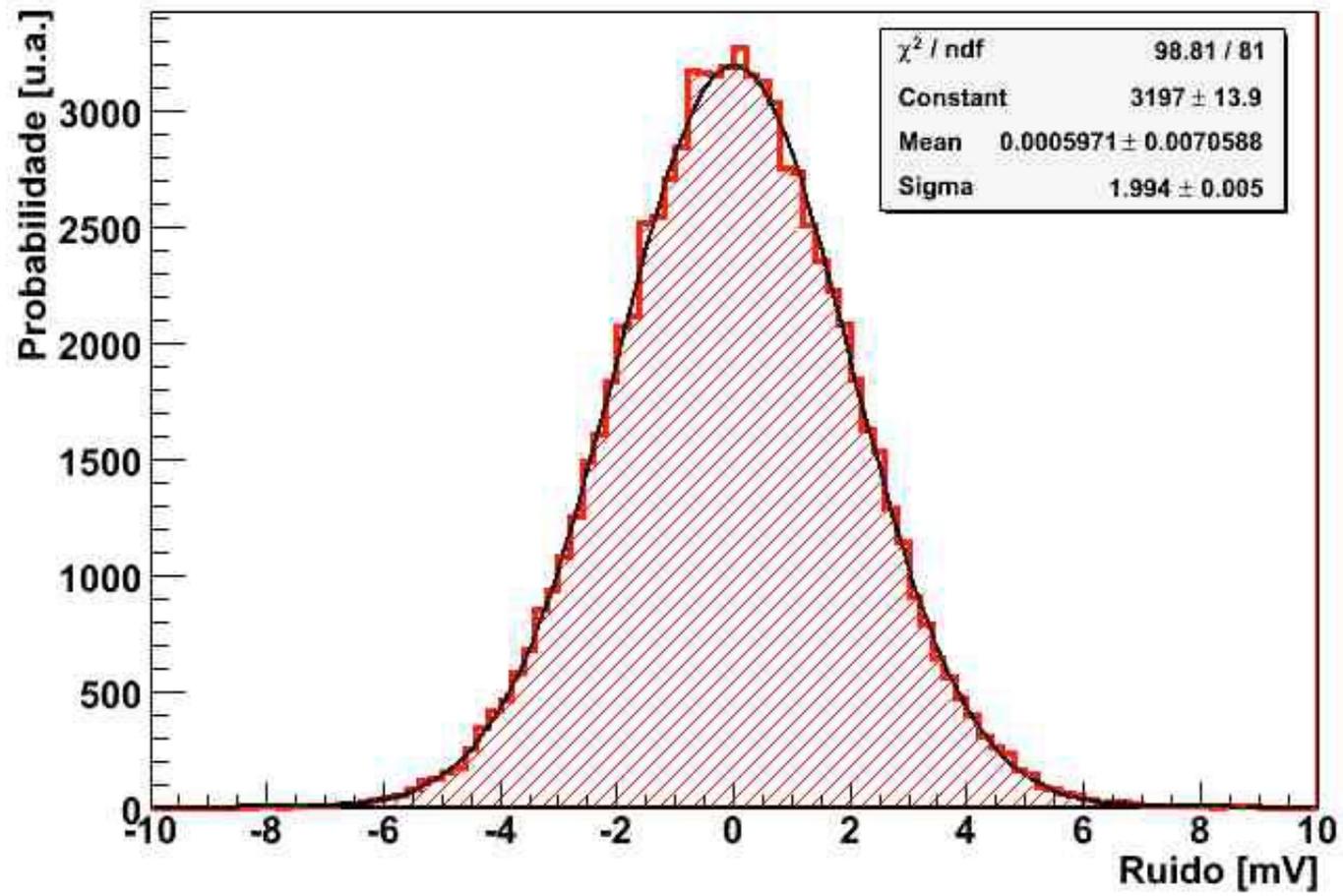
- Vamos supor que queremos medir um sinal senoidal de $V_0 = 40$ mV e 1 kHz de frequência
- Mas há um ruído de alta frequência com distribuição gaussiana e desvio padrão de $\sigma = 2$ mV.
- Como estes 2 mV de incerteza devido ao ruído se refletem no sinal visualizado no osciloscópio? Como avaliar isto?
 - Simulações: Vamos simular uma onda senoidal com um termo gaussiano de alta frequência

$$V_{osc}(t) = V_0 \sin(\omega t) + \text{aleatório}_{\text{gaussiano}}(\sigma)$$

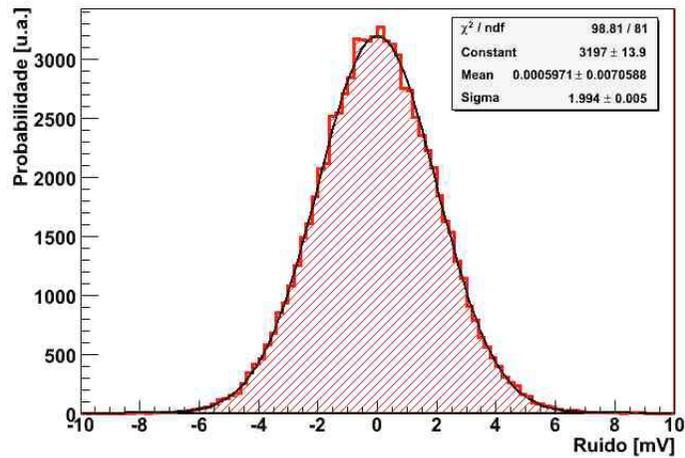
Sinal a ser simulado



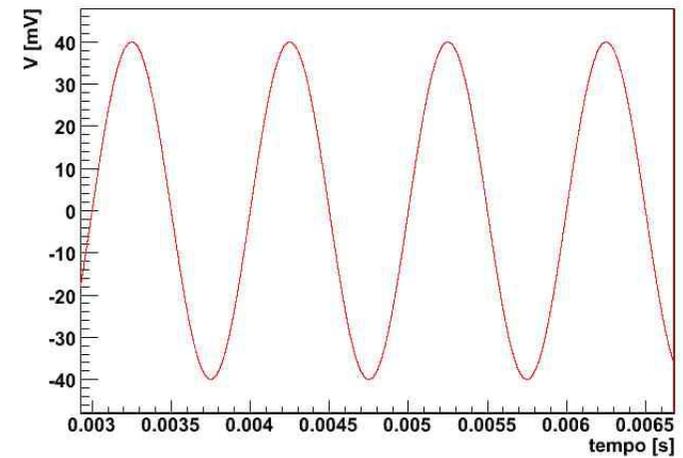
Distribuição do ruído



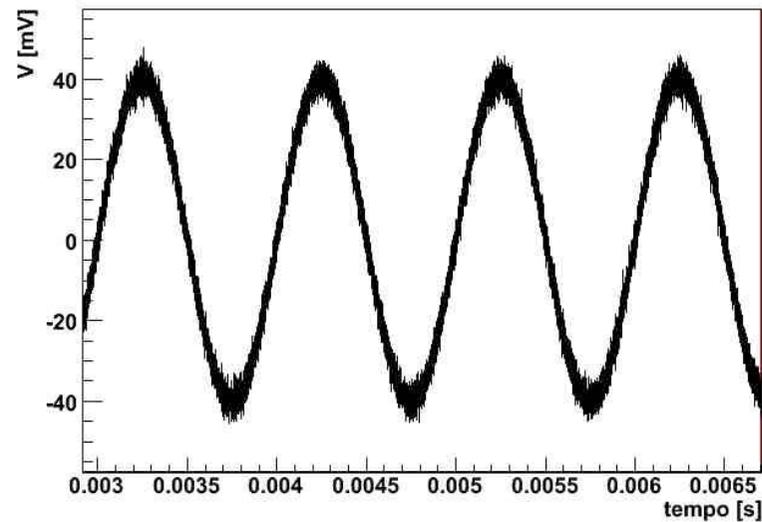
Compondo sinal com ruído



+



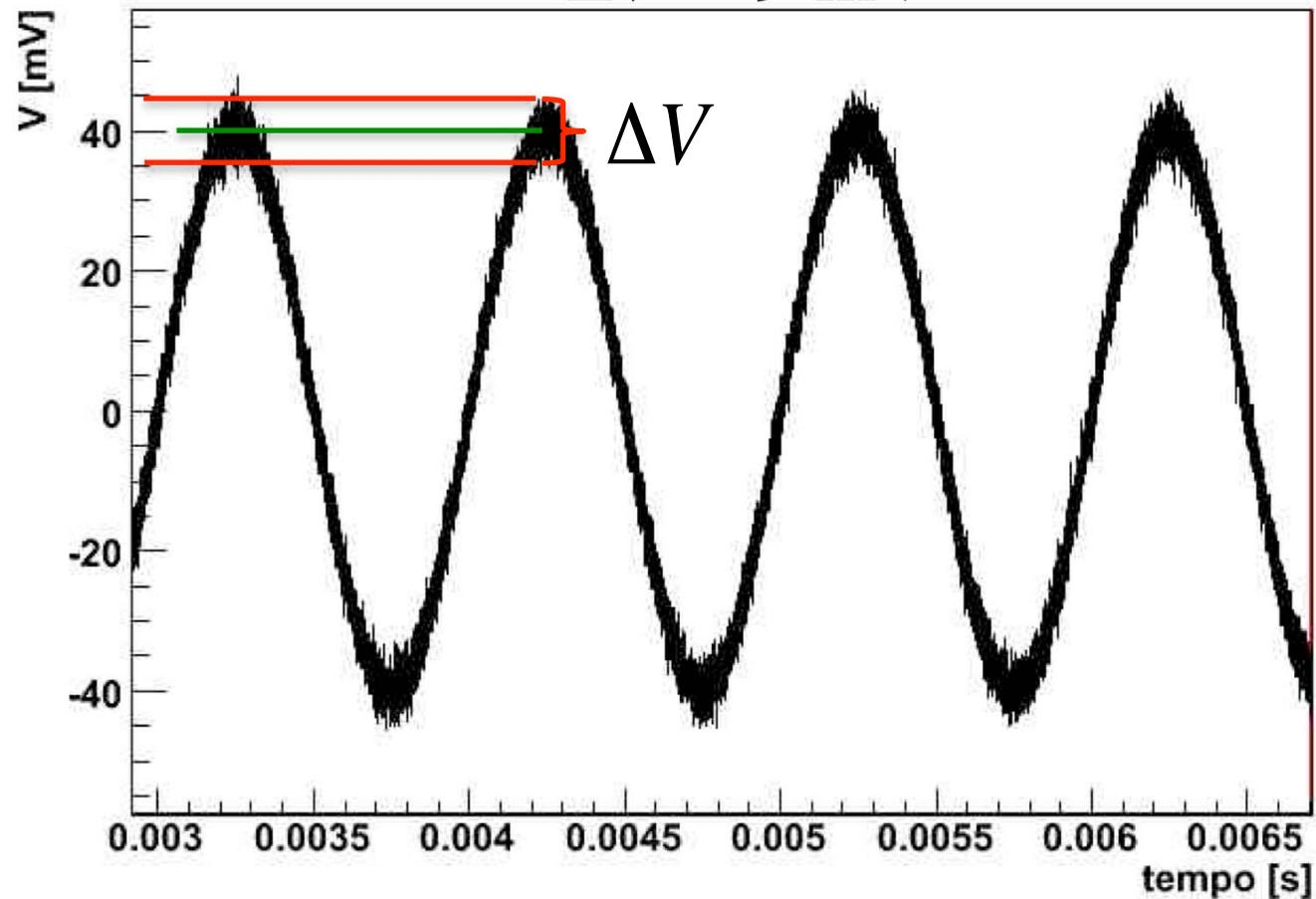
=



Composição dos sinais

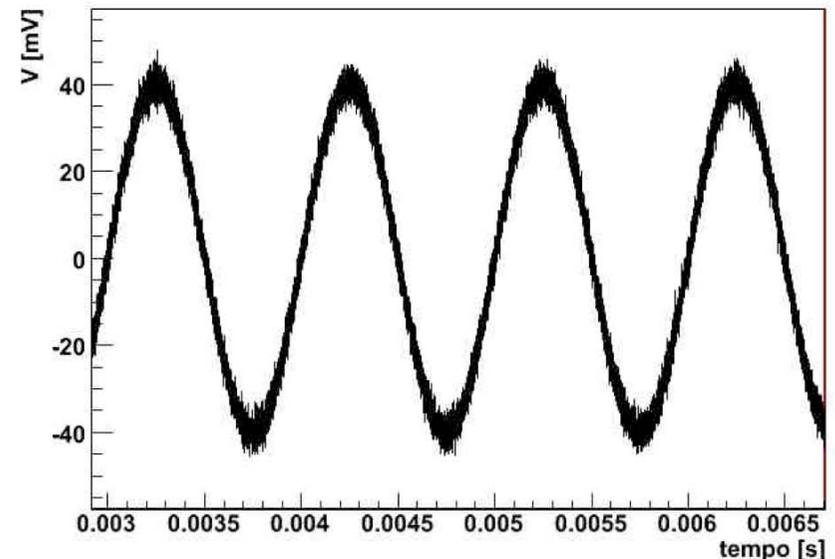
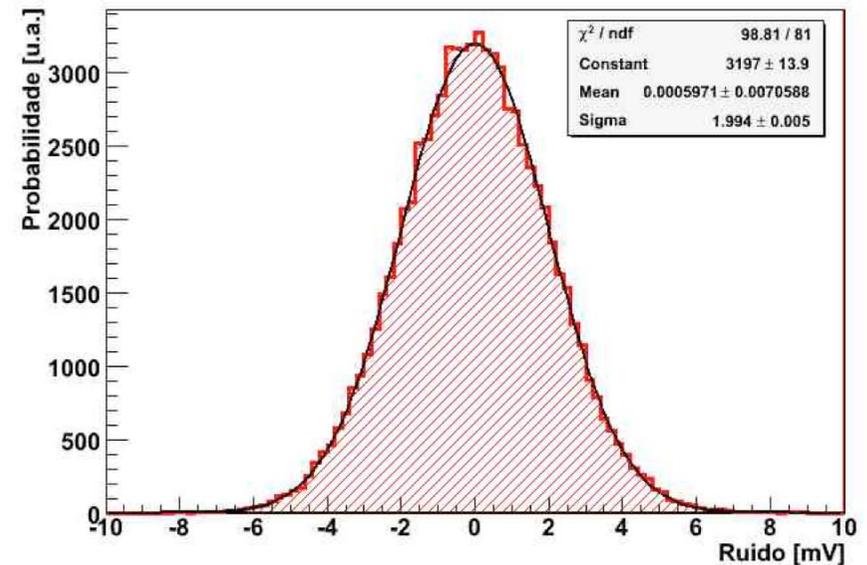
$$V = 40,0 \pm ??? \text{ mV}$$

$$\Delta V \sim 9 \text{ mV}$$



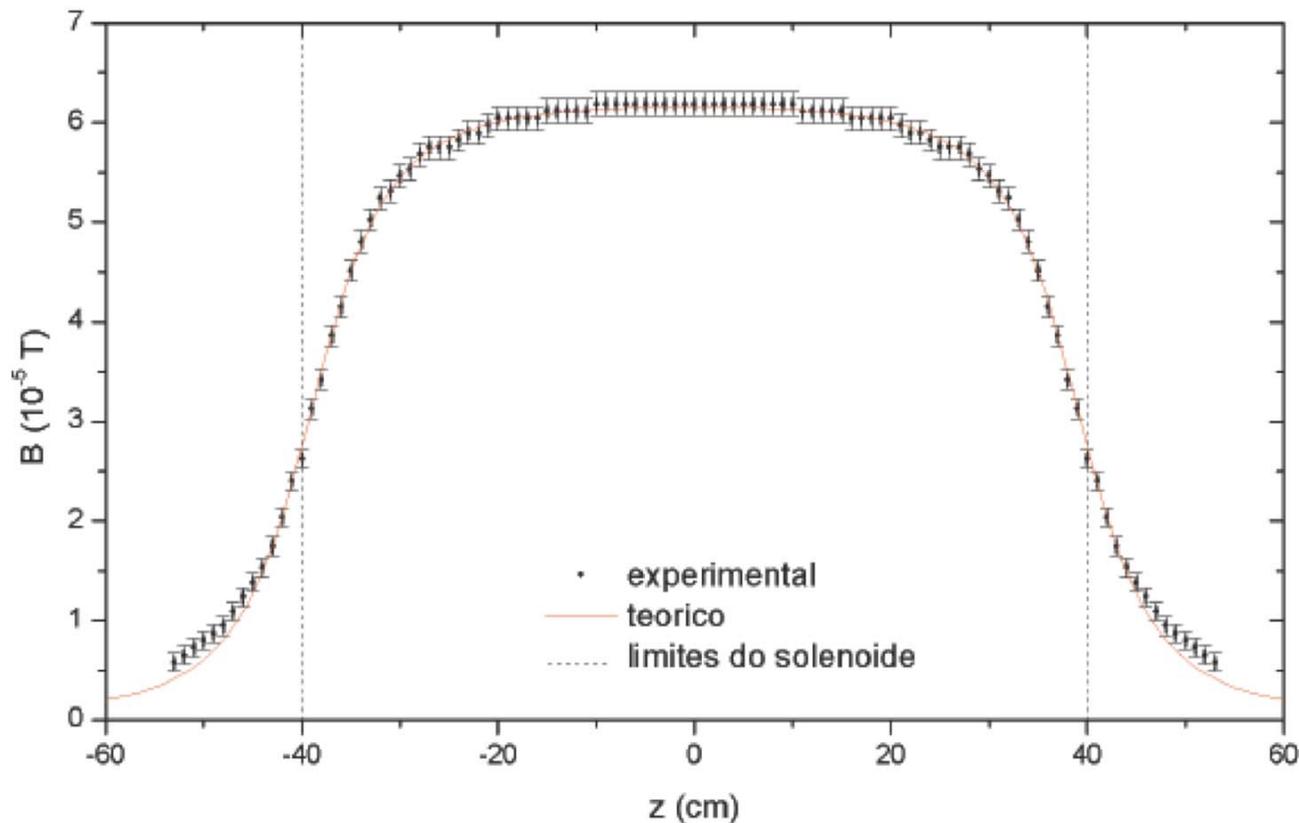
Ou seja...

- Eu meço uma flutuação no sinal de aproximadamente $\Delta V = 9 \text{ mV}$ para um ruído com distribuição gaussiana com largura de $\sigma = 2 \text{ mV}$.
- Fazer $\Delta V = 2\sigma$ claramente superestima a incerteza da medida
- Como o ruído é gaussiano, a nossa percepção visual é de provavelmente 95% a 98% de todas as possibilidades de ruído, ou seja, o ΔV medido deve corresponder a, no mínimo, algo entre 4 (95%) e 6 (99%) σ .



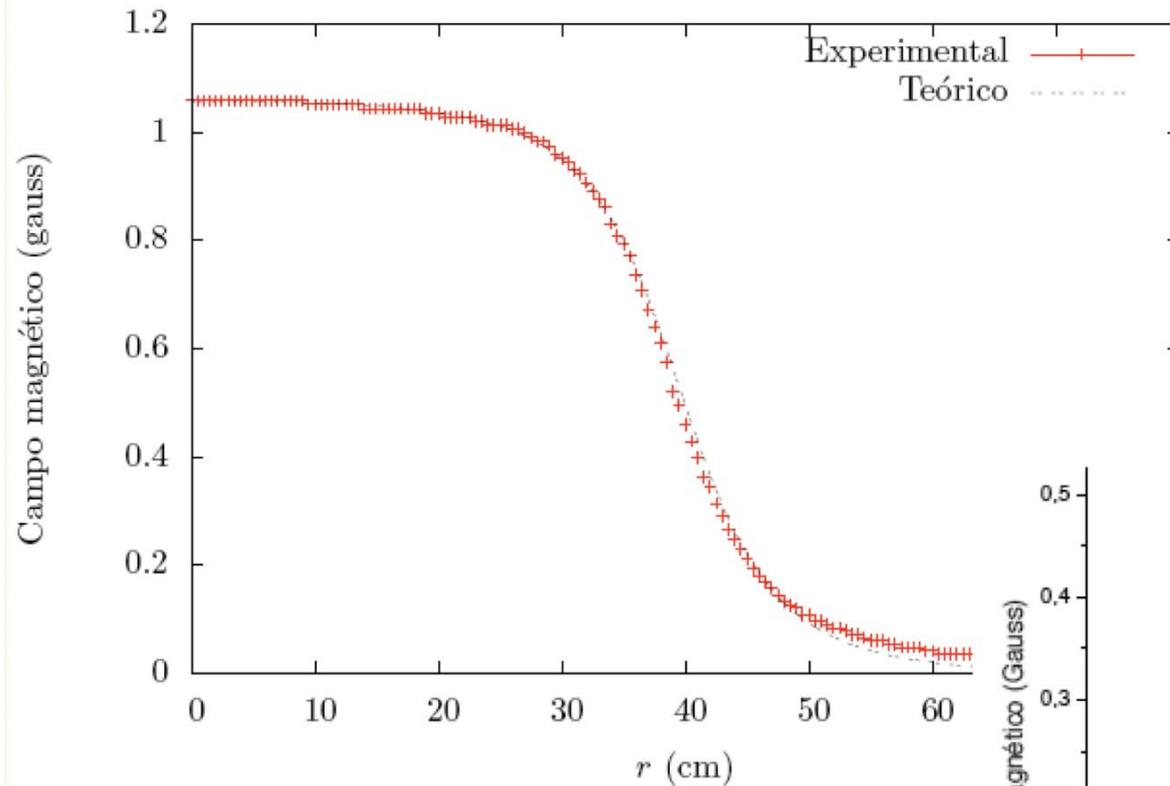
Mapeamento do solenóide

$$B = \frac{\mu_0 N}{2L} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) i \quad \cos \theta_1 = \frac{L/2 + z}{\sqrt{(L/2 + z)^2 + R^2}} \quad \cos \theta_2 = \frac{L/2 - z}{\sqrt{(L/2 - z)^2 + R^2}}$$

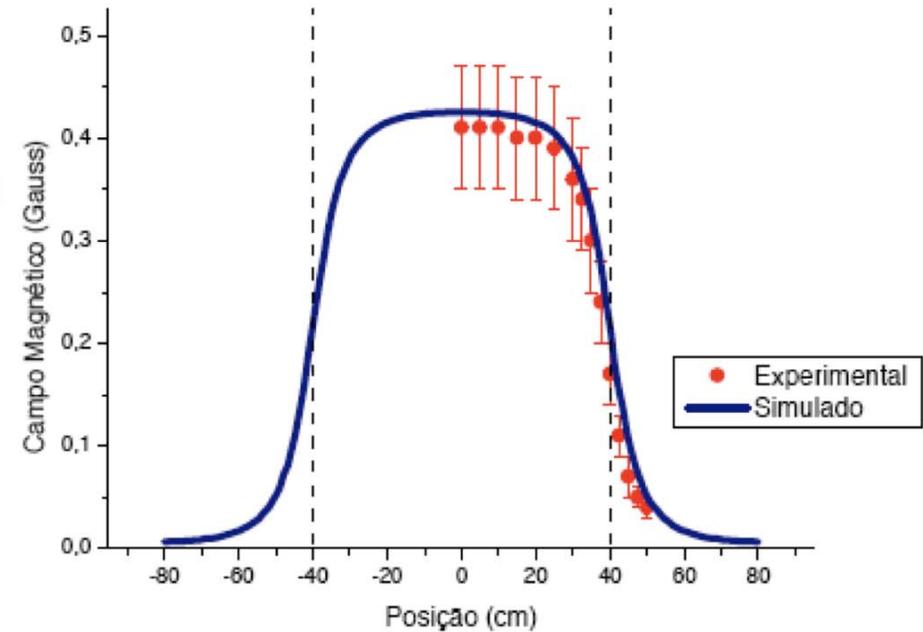


Mapeamento do solenóide

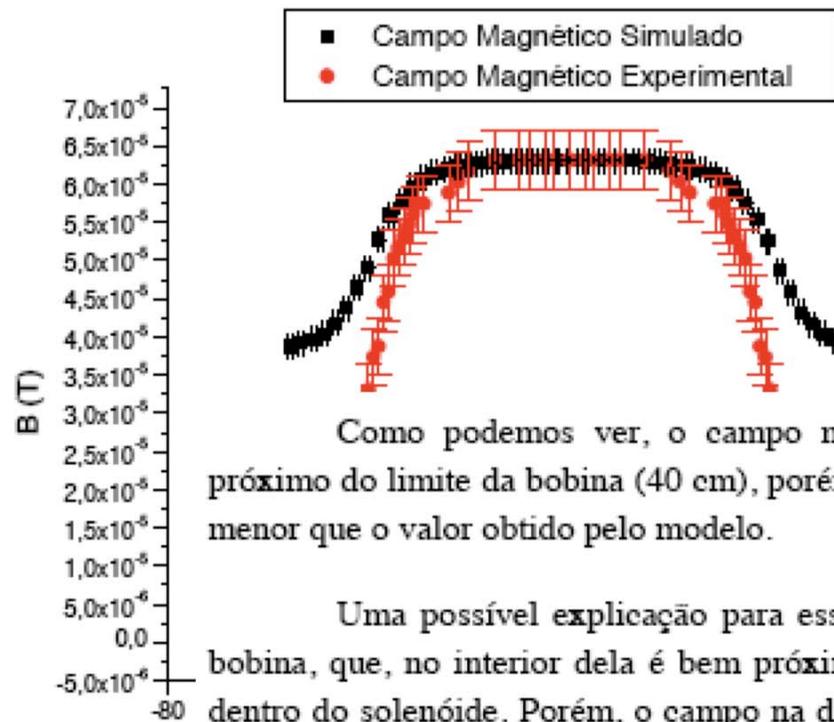
Solenóide - Campo na direção axial



Campo Magnético de um Solenóide Finito

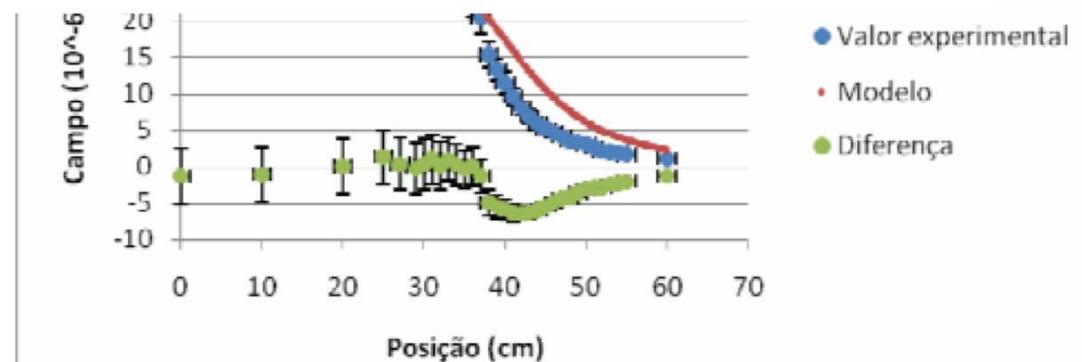


Comparação entre dados e simulação

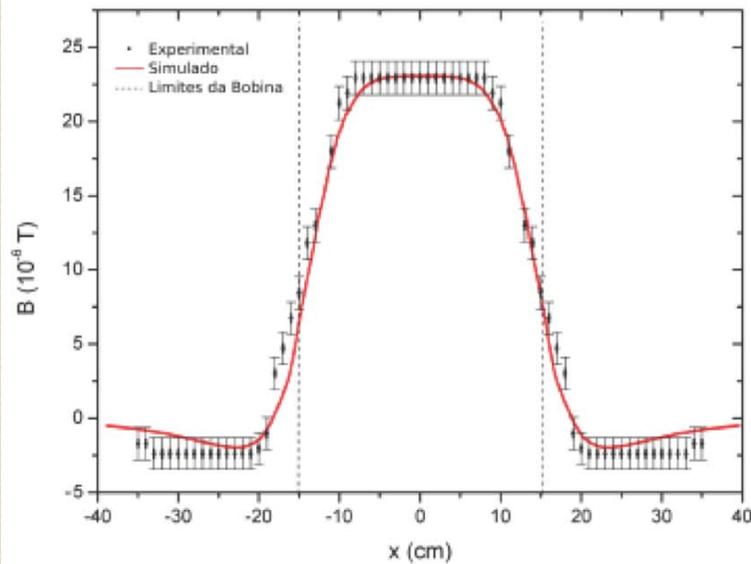
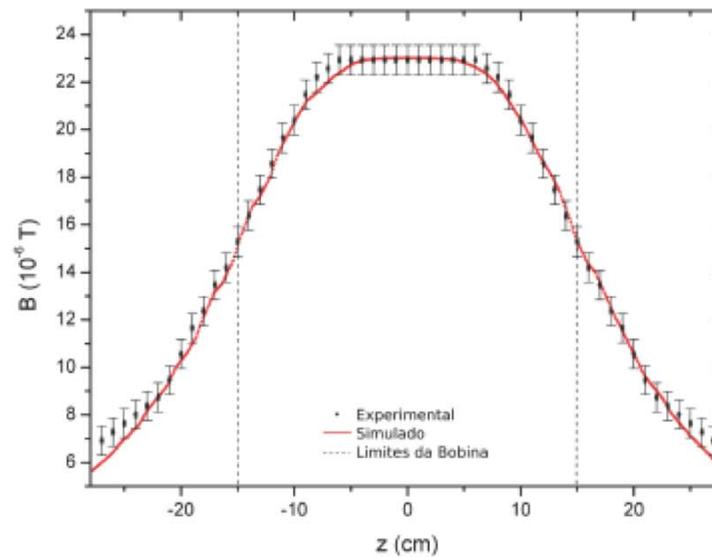
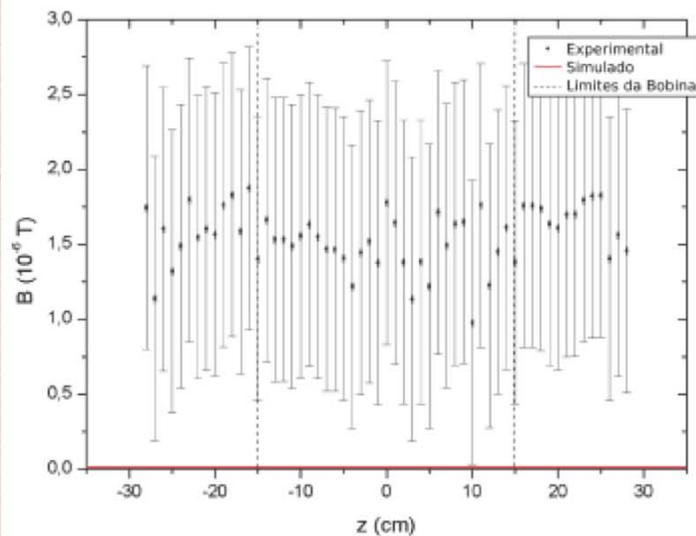


Como podemos ver, o campo medido experimentalmente é compatível com o modelo até próximo do limite da bobina (40 cm), porém para o exterior dela, vemos que o campo é sistematicamente menor que o valor obtido pelo modelo.

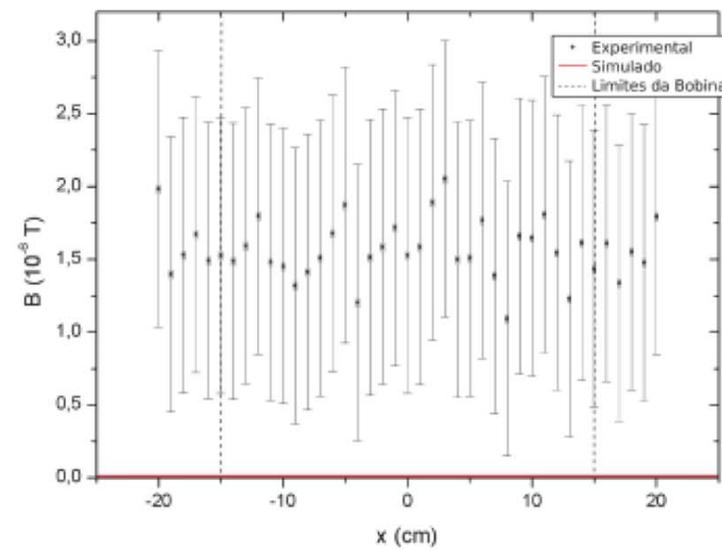
Uma possível explicação para esse erro é que o modelo descreve o campo no eixo central da bobina, que, no interior dela é bem próximo ao campo em um eixo deslocado do centro, porém ainda dentro do solenóide. Porém, o campo na direção x na região externa do solenóide varia bastante quando deslocamos o eixo em relação ao eixo central. Isso pode ser visto melhor na figura 2, onde vemos que as linhas de campo são paralelas no centro do solenóide e se curva na região externa.



Mapeamento da B.H.



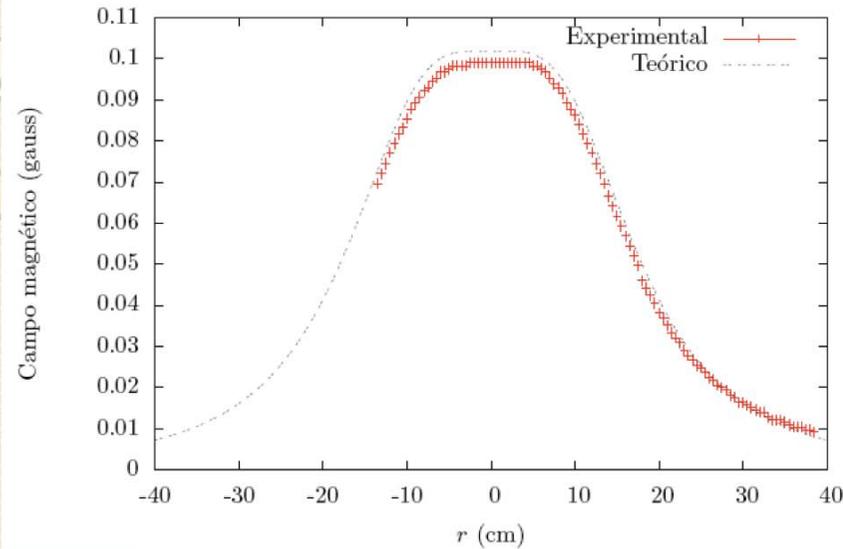
(a) Componente Transversal



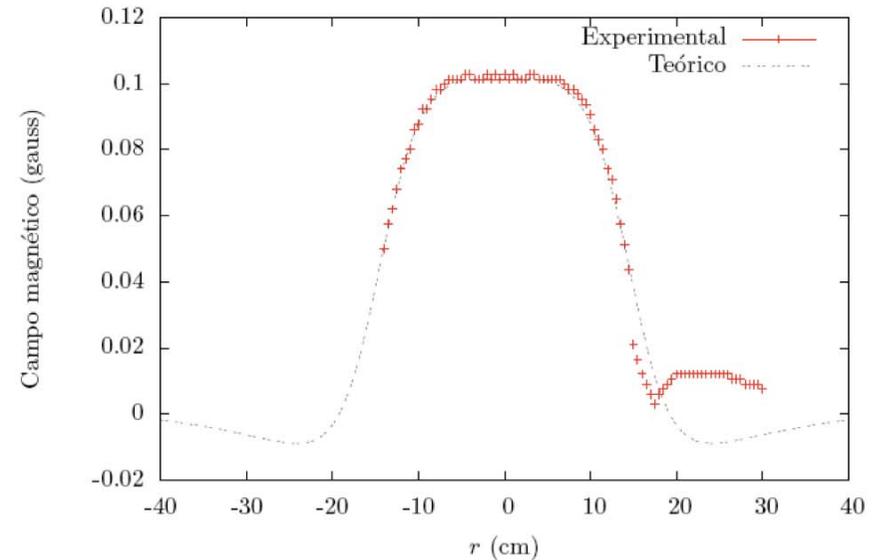
(b) Componente Longitudinal

Mapeamento da B.H.

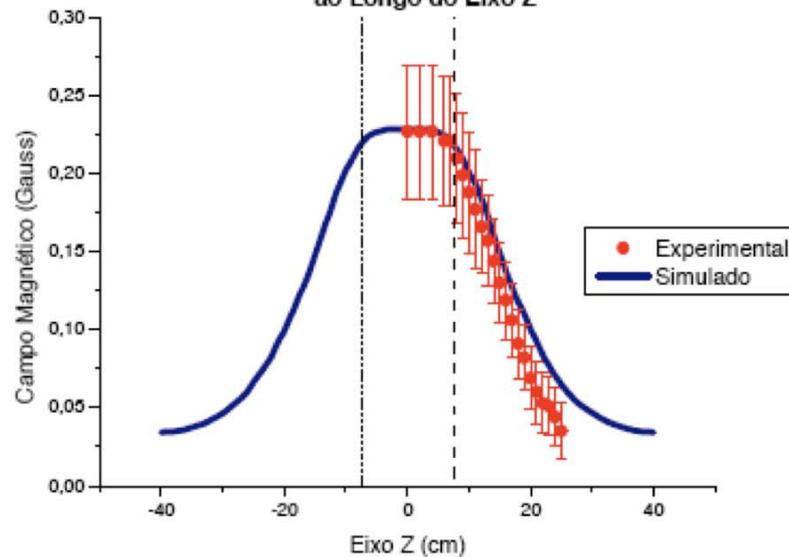
Bobina de Helmholtz - Campo na direção axial



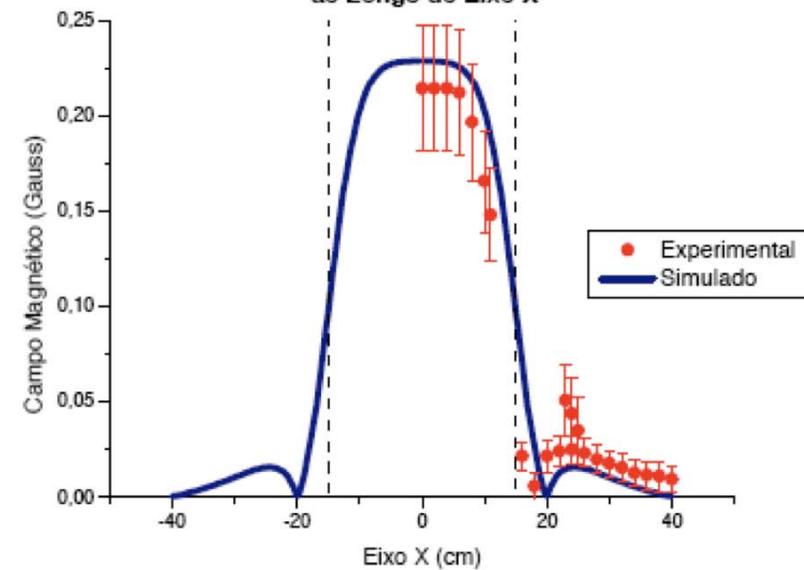
Bobina de Helmholtz - Campo na direção radial



Campo Magnético de uma Bobina de Helmholtz ao Longo do Eixo Z



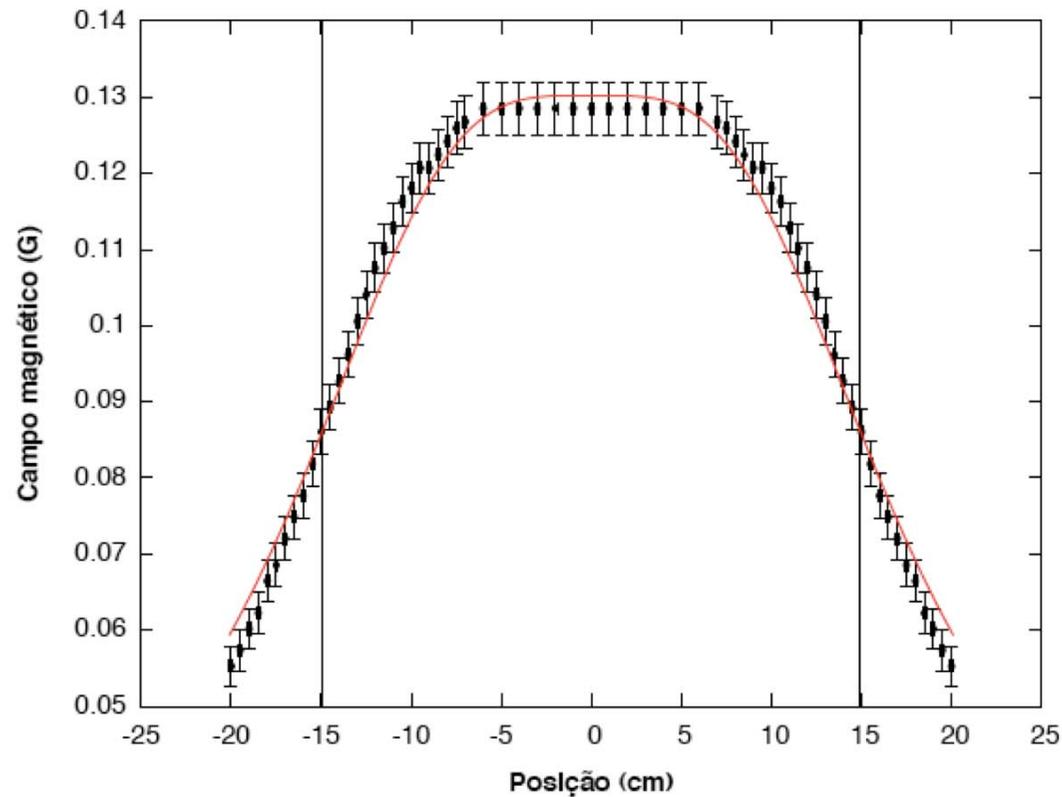
Campo Magnético de uma Bobina de Helmholtz ao Longo do Eixo X



Mapeamento da B.H.

Sendo a o raio da bobina, é possível calcular diretamente o valor do campo magnético ao longo do eixo de simetria (eixo z) da bobina de Helmholtz, pela expressão

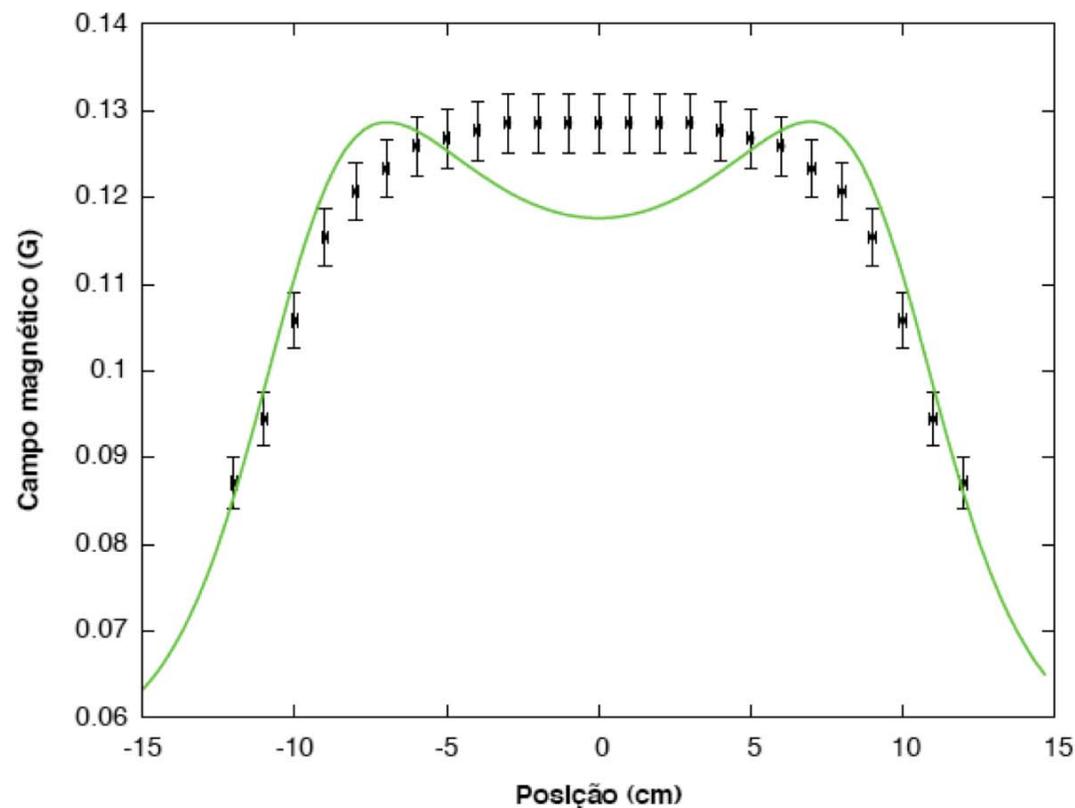
$$B = \frac{\mu_0 a^2 I}{2} \left[\frac{1}{\left((z - \frac{a}{2})^2 + a^2 \right)^{3/2}} + \frac{1}{\left((z + \frac{a}{2})^2 + a^2 \right)^{3/2}} \right]$$



Mapeamento da B.H.

Na direção radial (eixo x), no entanto, não é possível obter uma expressão elementar para o campo magnético; resta-nos utilizar integração numérica para obter o campo em cada ponto.

Os dados obtidos foram reunidos na figura 3. Percebe-se que em torno do centro entre as bobinas o campo também apresenta uma variação muito pequena (numa extensão pouco menor que nos outros dois casos), mostrando o mesmo comportamento de decaimento ao aproximar-se das bordas. Porém, em torno do centro, o campo mostrou-se bastante diferente do previsto pela curva teórica (embora não seja estritamente incompatível com ela). Seria necessário retomar a experiência, tentando repetir as medições com mais cautela a fim de verificar tal comportamento.



Comparação entre dados e simulação

Gráfico 1: Comparação para a Bobina de Helmholtz entre Campo experimental e Simulado no eixo Z

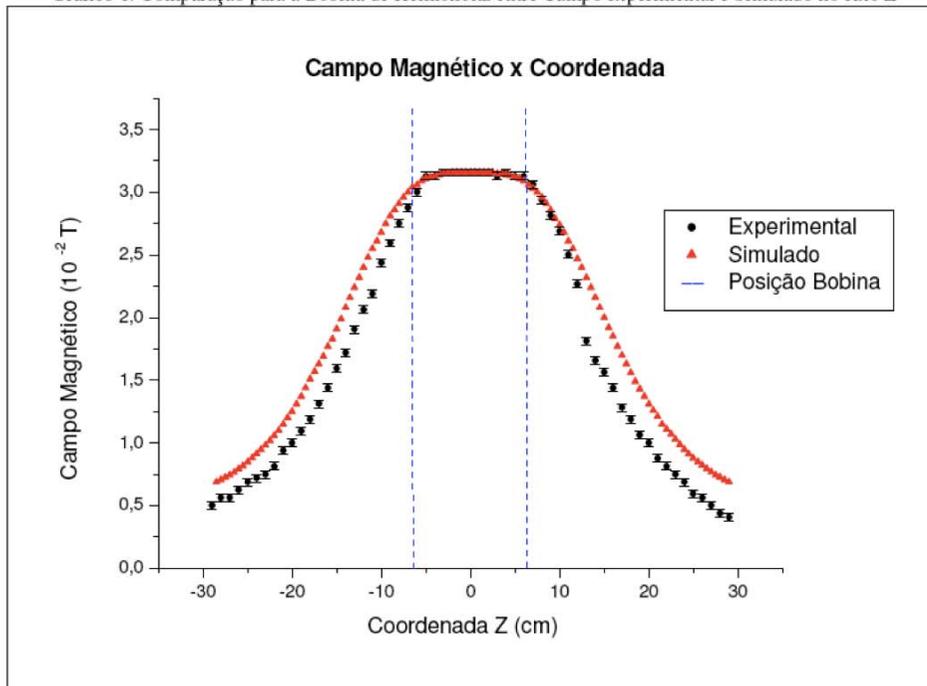
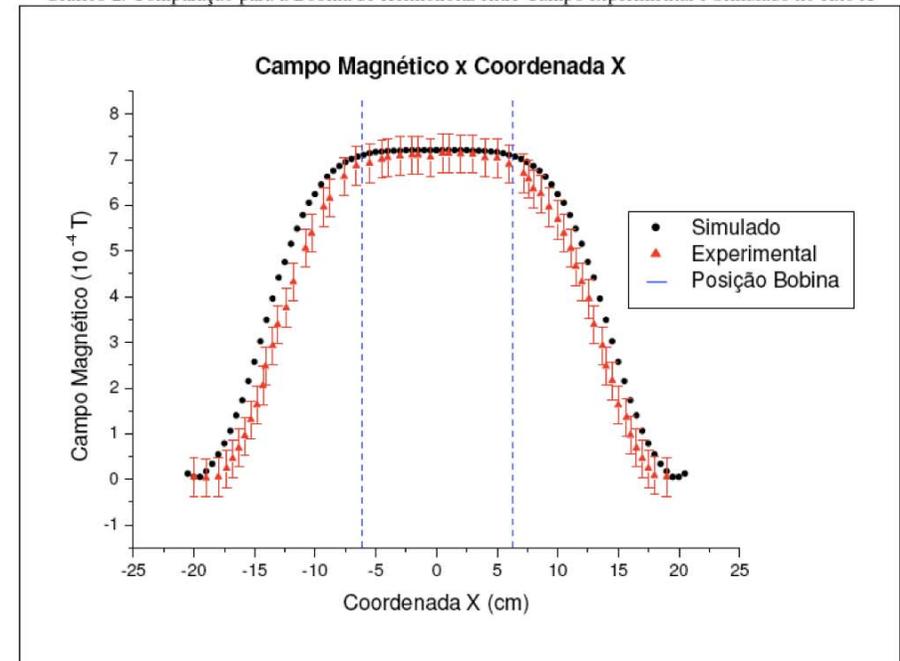


Gráfico 2: Comparação para a Bobina de Helmholtz entre Campo experimental e Simulado no eixo X



Lei de Faraday – auto indutância e indutância mútua

- A Lei de Faraday estabelece como uma variação de fluxo magnético pode induzir um potencial elétrico.

$$\varepsilon = - \frac{d\phi_B}{dt}$$

- Sempre que há variação de fluxo magnético, não importa a origem, há uma tensão induzida. Esta semana vamos estudar a tensão induzida pela bobina nela mesma e em outras
 - Auto indutância e indutância mútua

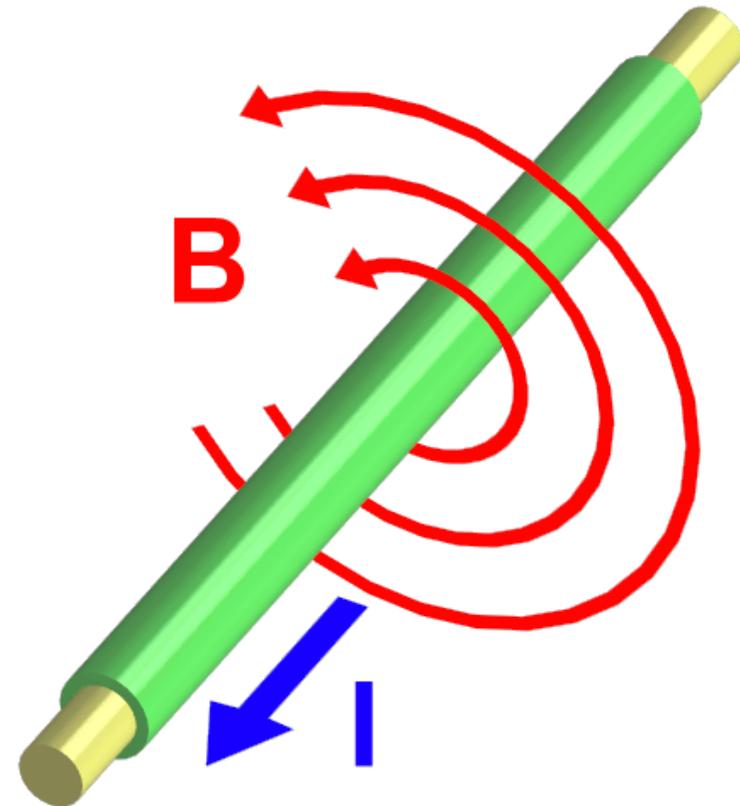
Campo magnético em um fio ideal

- Corrente passando pelo fio gera um campo magnético

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

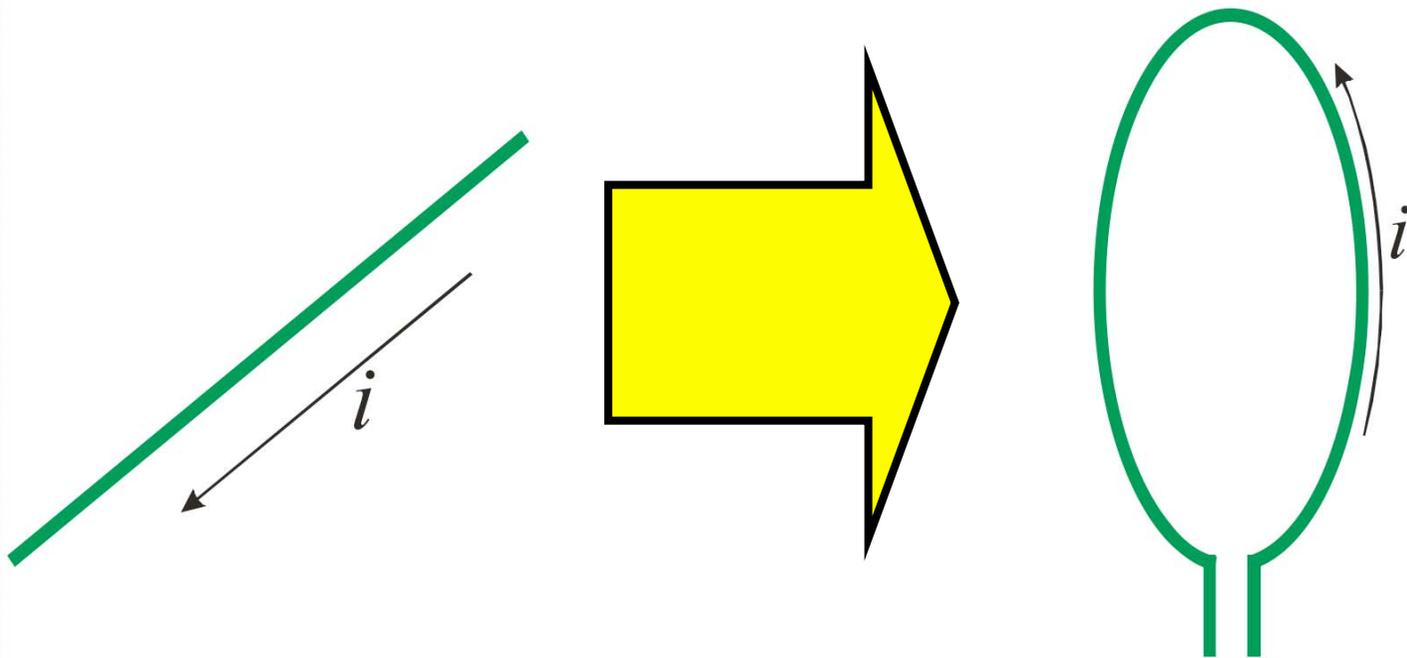
- Fio ideal $\rightarrow R = 0$
 - Tensão elétrica entre os terminais do fio é nula

$$V = Ri = 0$$



O que acontece se...

- ... agora esta corrente está passando sobre uma espira de área A ?

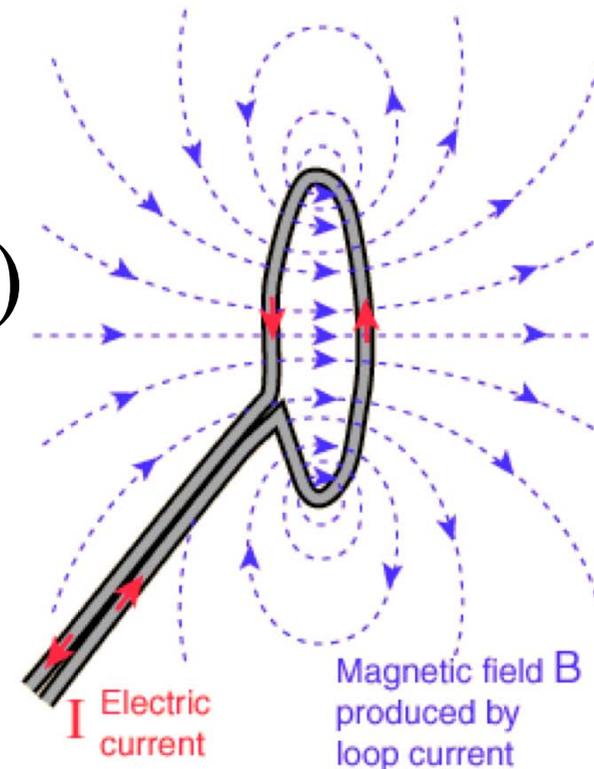


Campo magnético de uma espira ideal

- Corrente passando pela espira gera um campo magnético

$$B = \frac{\mu_0}{2} a^2 \frac{i}{r^3} \quad (\text{no eixo})$$

- Fio ideal $\rightarrow R = 0$
 - Tensão elétrica entre os terminais do fio é nula
 - Isto é verdade para uma espira?



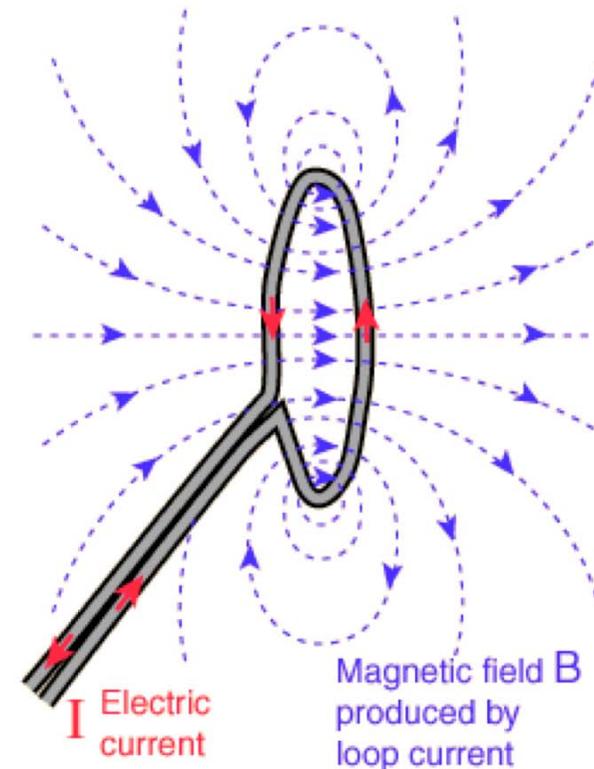
Campo magnético de uma espira ideal

- Fluxo magnético deste campo sobre a espira

$$\phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{a} \neq 0$$

- Fluxo diferente de zero, logo, pela Lei de Faraday temos uma tensão nos terminais da espira, se o campo for variável

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt} \phi_B \neq 0$$



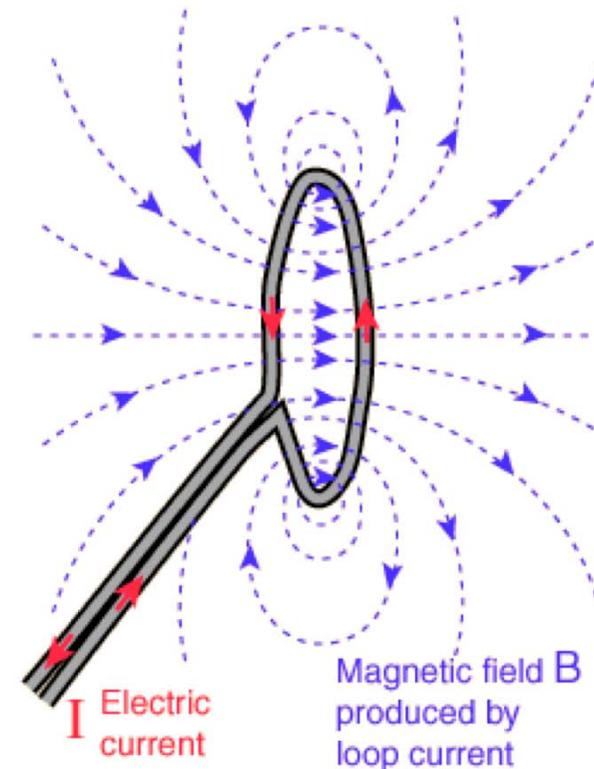
Auto-indutância

- Fluxo magnético deste campo sobre a espira

$$\begin{aligned}\phi_B &= \int \vec{B} \cdot d\vec{a} \\ &= \int i\vec{\beta} \cdot d\vec{a} = Li\end{aligned}$$

- A constante de proporcionalidade entre a corrente e o fluxo magnético na espira é chamada auto-indutância

$$\phi_B = Li$$



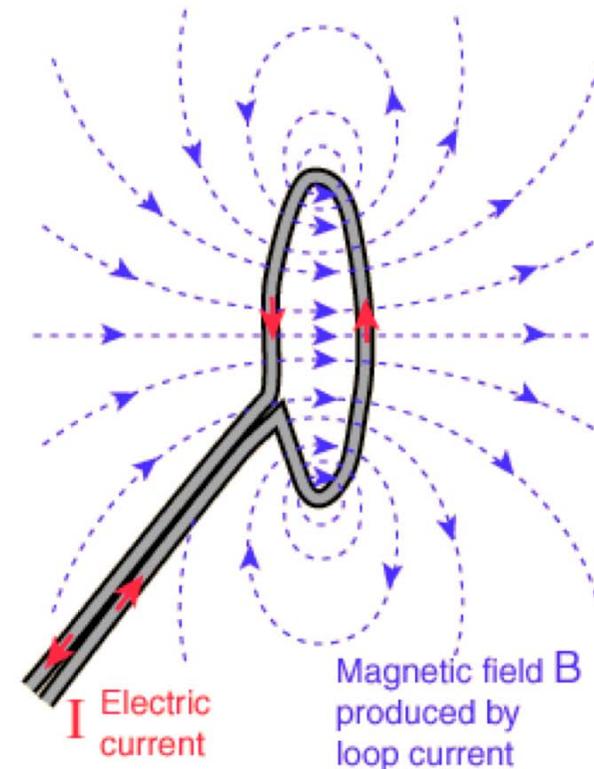
Auto-indutância

- O fato da espira criar um campo magnético e, conseqüentemente, um fluxo magnético nela mesma faz com que haja uma f.e.m. nos seus terminais

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \phi_B = -\frac{d}{dt} (Li)$$

$$\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt}$$

Somente a corrente varia



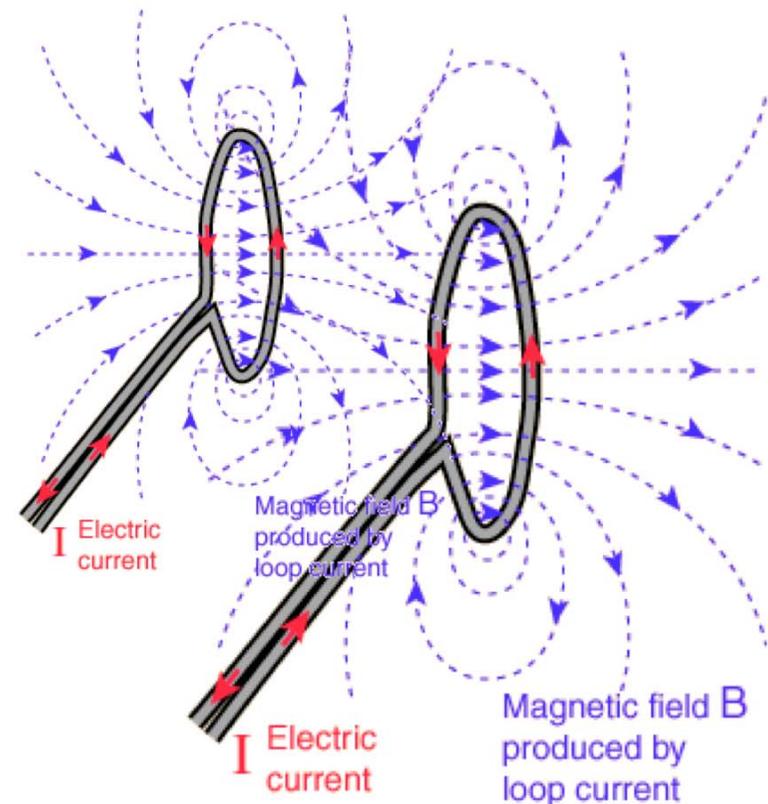
Indutância mútua

- Agora, o que acontece se tivermos duas espiras, cada uma com uma corrente distinta (i_1 e i_2)?
- Fluxo devido ao campo da bobina 1 na bobina 2 vale:

$$\begin{aligned}\phi_{21} &= \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{a}_2 \\ &= \int i_1 \vec{\beta}_1 \cdot d\vec{a}_2 = M_{21} i_1\end{aligned}$$

- Fluxo devido ao campo da bobina 2 na bobina 1 vale:

$$\begin{aligned}\phi_{12} &= \int \vec{B}_2 \cdot d\vec{a}_1 \\ &= \int i_2 \vec{\beta}_2 \cdot d\vec{a}_1 = M_{12} i_2\end{aligned}$$

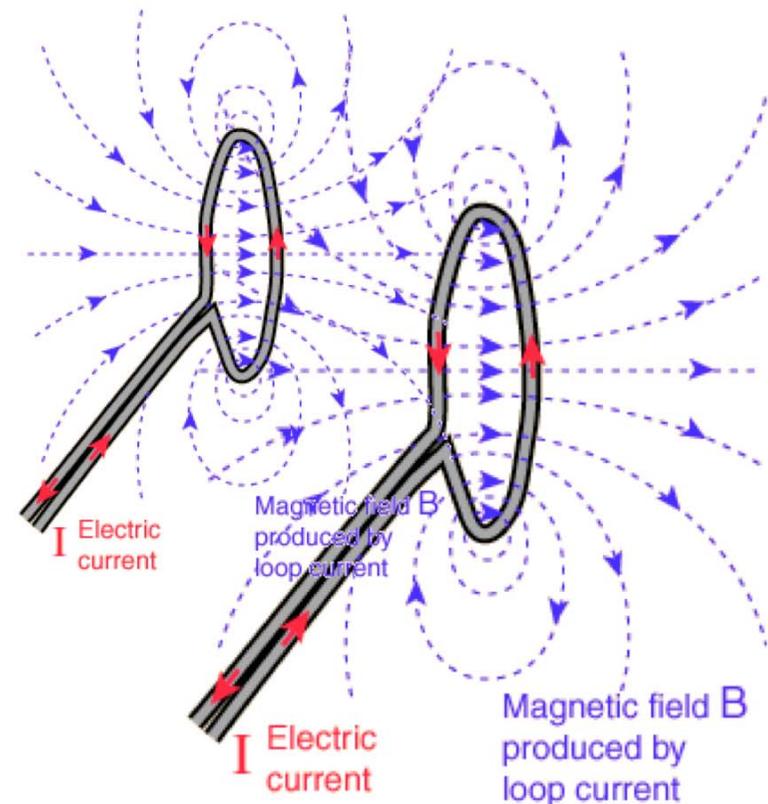


Indutância mútua

- Pode-se mostrar que, por razões de simetria que (ver Moysés III, por exemplo)

$$M_{12} = M_{21} = M$$

- M é denominada indutância mútua entre as duas espiras
- Qual é a tensão induzida nas bobinas considerando o efeito de auto-indutância e indutância mútua?



f.e.m. em um sistema de duas espiras

- Auto-indutância

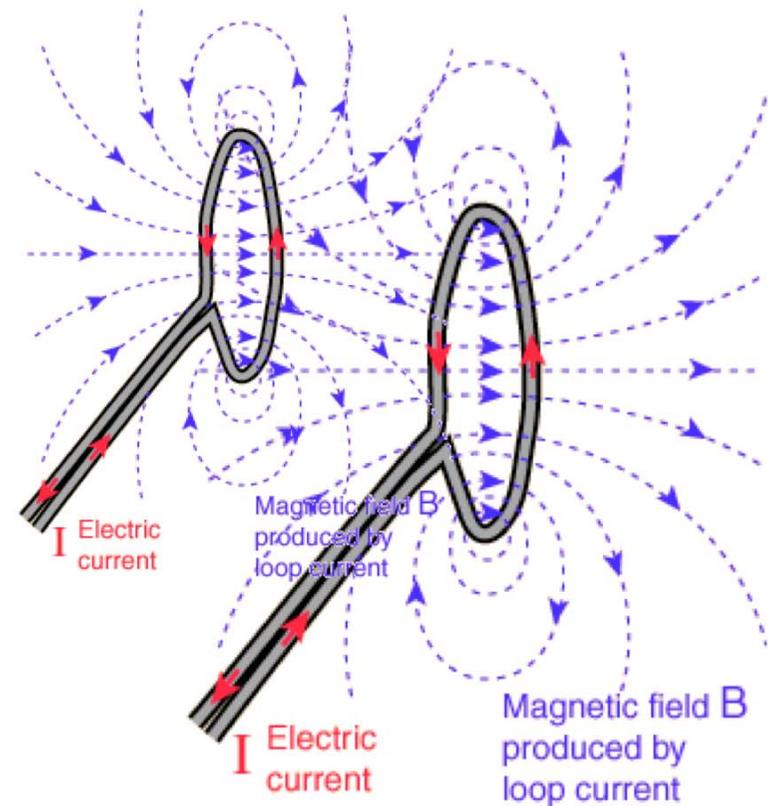
$$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{d}{dt} i_1$$

$$\varepsilon_2 = -L_2 \frac{d}{dt} i_2$$

- Indutância mútua

$$\varepsilon_{12} = -M \frac{d}{dt} i_2$$

$$\varepsilon_{21} = -M \frac{d}{dt} i_1$$



f.e.m. em um sistema de duas espiras

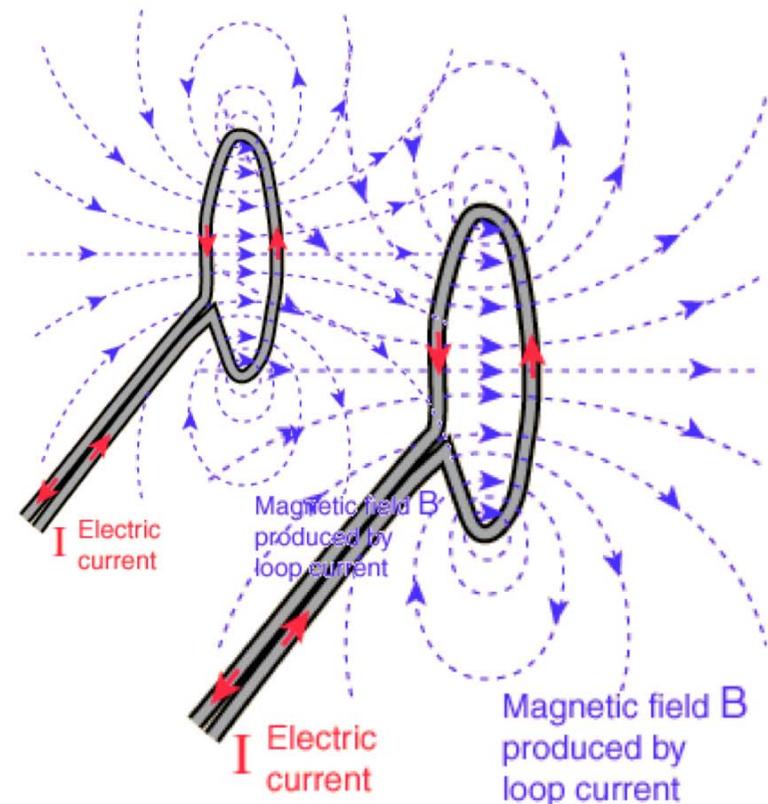
- fem induzida na bobina 1

$$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{d}{dt} i_1 - M \frac{d}{dt} i_2$$

- fem induzida na bobina 2

$$\varepsilon_2 = -L_2 \frac{d}{dt} i_2 - M \frac{d}{dt} i_1$$

- Neste caso, a tensão induzida em cada bobina depende das condições de ambas bobinas



Objetivos da semana

- Estudar o efeito de auto-indutância em um solenóide submetido a uma corrente elétrica harmônica

$$i_s(t) = i_s \sin(\omega t)$$

- Medir a indutância mútua entre o solenóide e uma bobina fornecida
- Comparar os resultados com valores obtidos teoricamente através da geometria do experimento

Situação experimental real

- Na nossa discussão sobre auto-indutância e indutância mútua nós consideramos as bobinas ideais, ou seja, sem resistência.
 - Na nossa situação real, as bobinas possuem resistência elétrica de tal forma que uma corrente sempre está associada a uma f.e.m.

$$V = Ri \neq 0$$

- Assim, no caso de uma única espira a tensão medida nos terminais da mesma é:

$$\varepsilon = Ri - L \frac{d}{dt} i$$

Situação experimental real

- Esta resistência não nula adiciona complicações ao problema.
 - Estudaremos isto em detalhes em Lab IV
- Para minimizar estes efeitos, usaremos altas frequências (~3000 Hz)
 - Neste caso, a fem devido aos efeitos de indutância é muito maior que aquela devido aos efeitos resistivos, podendo desprezá-los

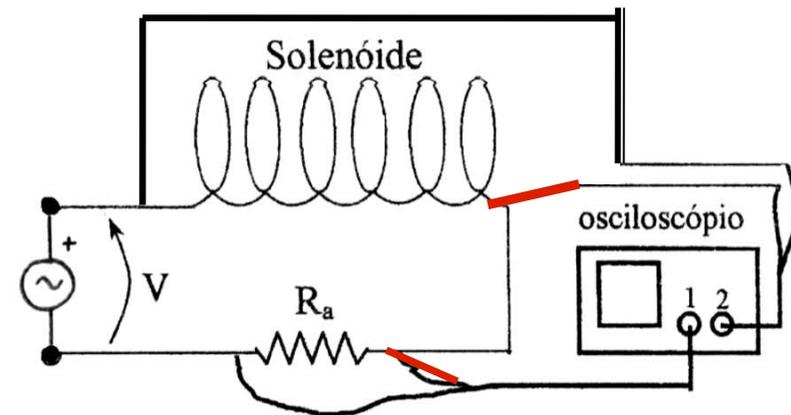
$$\varepsilon = Ri - L \frac{d}{dt} i \quad \begin{array}{l} \text{altas frequências} \\ > 3000 \text{ Hz} \end{array} \quad \rightarrow \quad \varepsilon \approx -L \frac{d}{dt} i$$

Procedimento experimental medida da auto-indutância do solenóide

- Montar o mesmo circuito da aula anterior
- Usar uma corrente harmônica de alta frequência

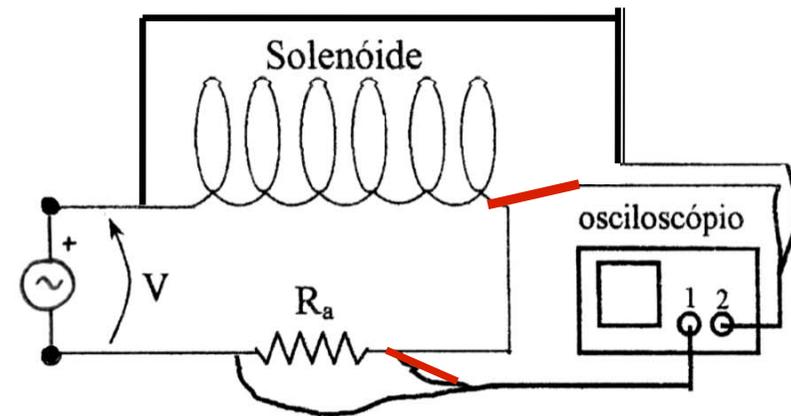
$$i_s(t) = i_s \sin(\omega t)$$

- Medir, a corrente (i_{sm}) com um resistor auxiliar e o osciloscópio
- Medir a tensão no solenóide com o osciloscópio



Procedimento experimental medida da auto-indutância do solenóide

- Terra único do osciloscópio
- Os elementos de circuito que estiverem entre os dois terras estarão em curto-circuito.
- Ligue apenas um terra. Cada canal estará medindo a tensão entre o ponto escolhido e o terra.



Procedimento experimental medida da auto-indutância do solenóide

- Quem é a tensão no solenóide?

$$\varepsilon_s(t) = -L \frac{d}{dt} i_s(t) = -L\omega i_s \cos(\omega t) = \varepsilon_s \cos(\omega t)$$

- Obter a auto-indutância (L) do solenóide a partir do gráfico de tensão no solenóide em função da sua corrente.
- Mas quem é L ?

$$\phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = Li \Rightarrow L = \frac{\int \vec{B} \cdot d\vec{a}}{i} \sim \frac{\langle B \rangle (N_s A_s)}{i}$$

Atividades da semana (parte I)

- Fazer gráfico de \mathcal{E}_s como função de i_s e obter o valor da auto-indutância do solenóide
 - Como eu tenho certeza que a frequência escolhida é tal que eu posso desprezar a resistência finita do fio do solenóide?
 - Dica: Se eu considerar $R = 0$, qual deveria ser a diferença de fase entre a tensão e corrente no solenóide. Meça esta diferença de fase e discuta o resultado.
- Obter L e comparar o valor obtido com o previsto teoricamente, a partir do conhecimento das dimensões do solenóide.

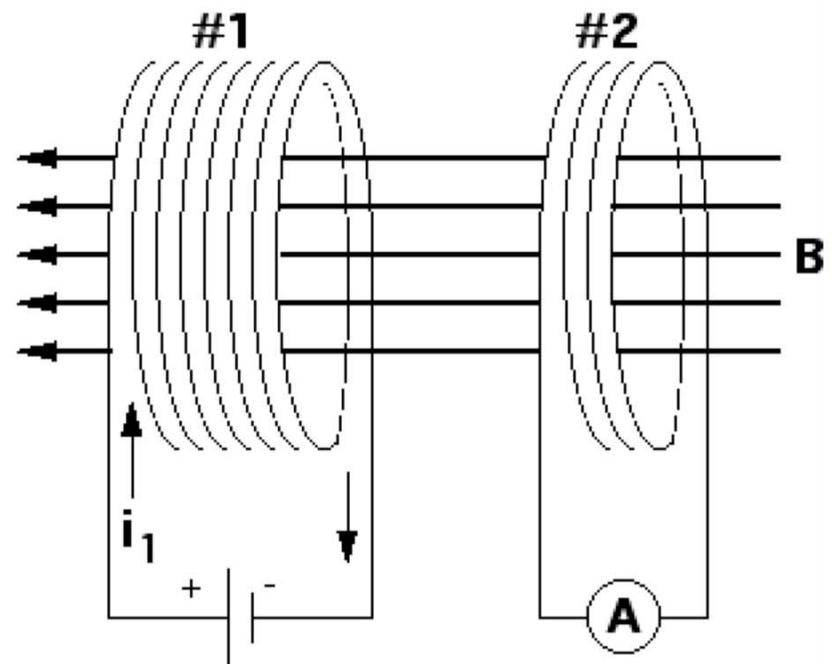
Procedimento experimental medida da indutância mútua entre duas bobinas

- Montar o mesmo circuito da aula anterior, com a bobina sonda conhecida
- Usar uma corrente harmônica de alta frequência no solenóide



$$i_s(t) = i_s \sin(\omega t)$$

- Medir, a corrente (i_{sm}) com um resistor no solenóide e a tensão na bobina sonda



Procedimento experimental medida da indutância mútua entre duas bobinas

- A tensão na bobina sonda é

$$\varepsilon_b(t) = -M \frac{d}{dt} i_s(t) = -M \omega i_s \cos(\omega t) = \varepsilon_b \cos(\omega t)$$

- Obter a indutância mútua entre a bobina sonda (M) e comparar com a previsão teórica.
- Mas quem é M ?

$$\phi_b = \int \vec{B}_s \cdot d\vec{a}_b = M i_s \Rightarrow M = \frac{\int \vec{B}_s \cdot d\vec{a}_b}{i_s} = \frac{B_s N_b A_b}{i_s}$$

Atividades da semana (parte II)

- Fazer gráfico de \mathcal{E}_b como função de \dot{i}_s e obter o valor da indutância mútua entre o solenóide e a bobina
- Obter M e comparar o valor obtido com o previsto teoricamente, a partir do conhecimento das dimensões do solenóide e da bobina sonda.