



Física Experimental III

Notas de aula: www.dfn.if.usp.br/~suaide

LabFlex: www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex

Aula 6

Prof. Alexandre Suaide

Ramal: 7072

Ed. Oscar Sala (Pelletron), sala 246

Movimento de uma partícula em um campo eletromagnético

- A trajetória de uma partícula qualquer pode ser descrita resolvendo-se as equações de movimento

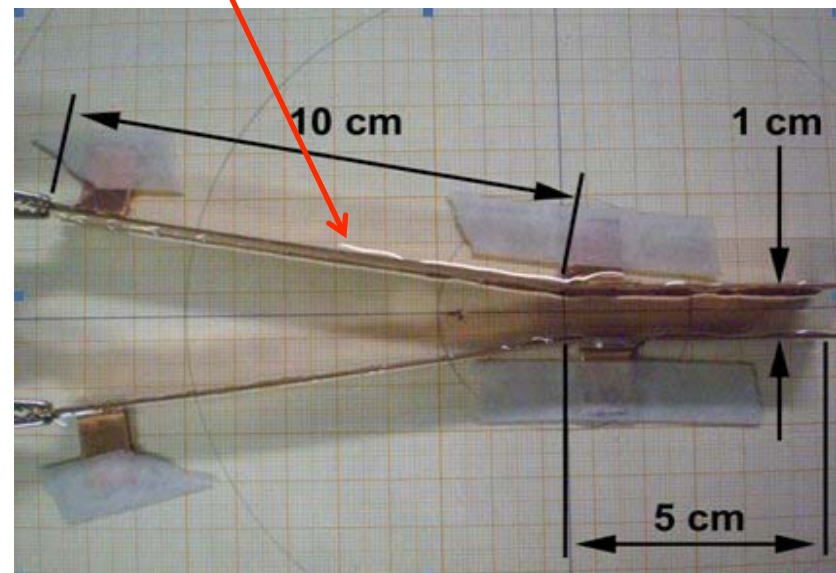
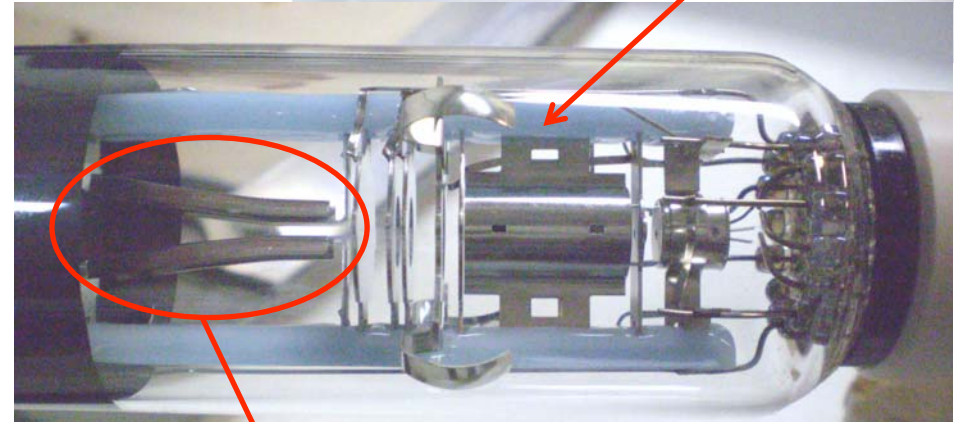
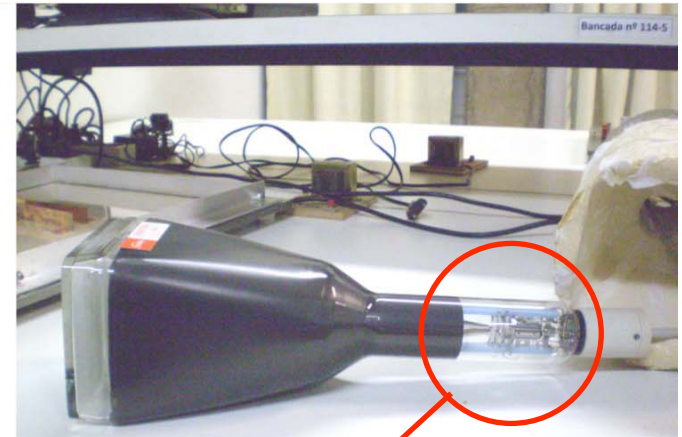
$$\vec{F} = m\vec{a}$$

- Ou seja, no campo EM:

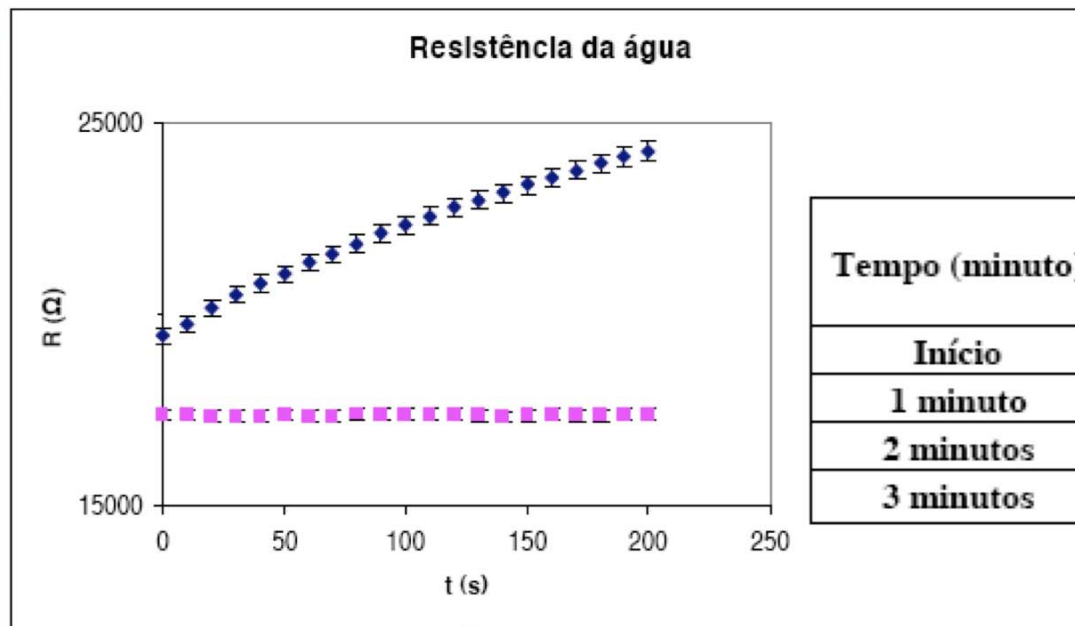
$$m \frac{d}{dt} \vec{v} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

Precisamos conhecer o campo entre as placas

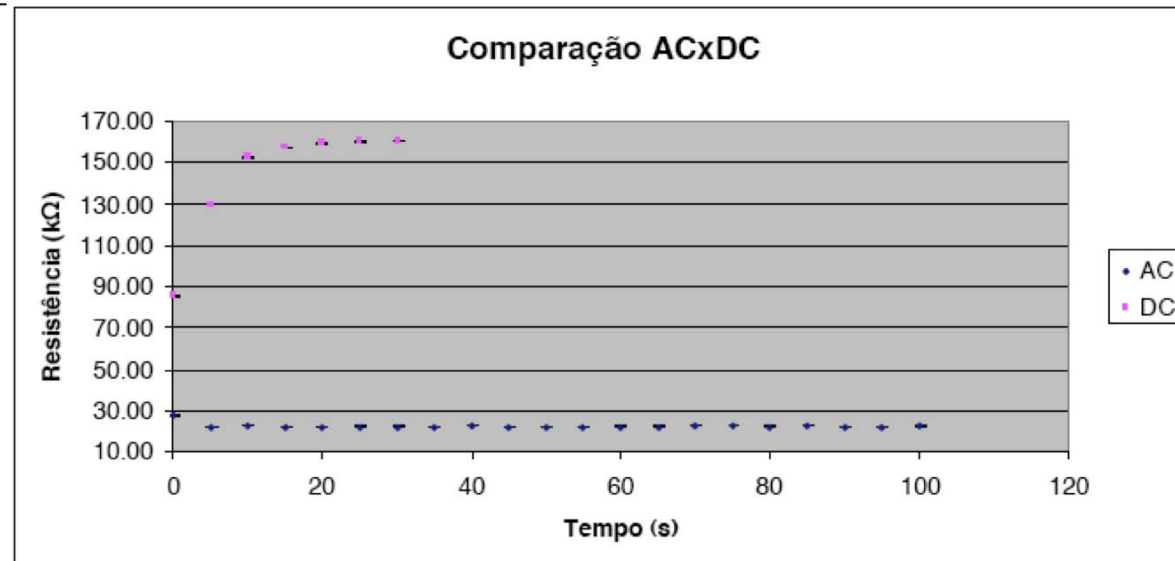
- Modelo em escala
- Como é o campo?
- É uniforme?
- Efeitos de borda?
- Quais são as superfícies equipotenciais?



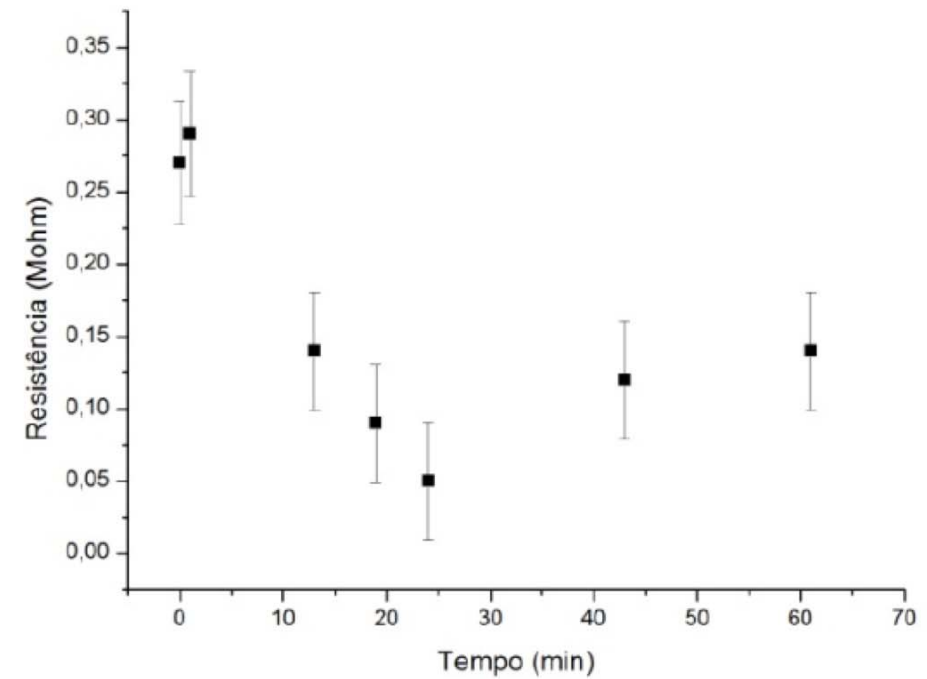
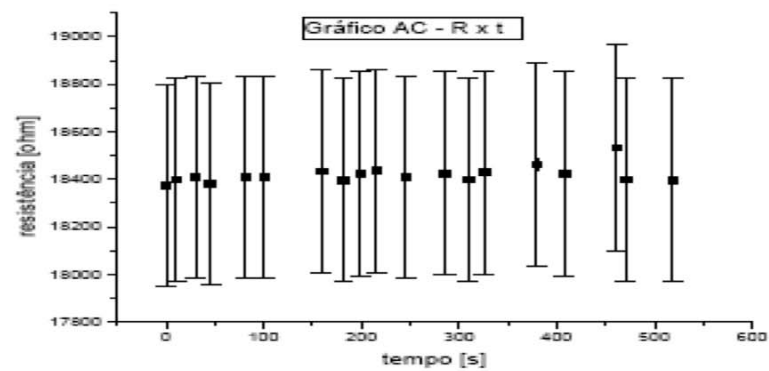
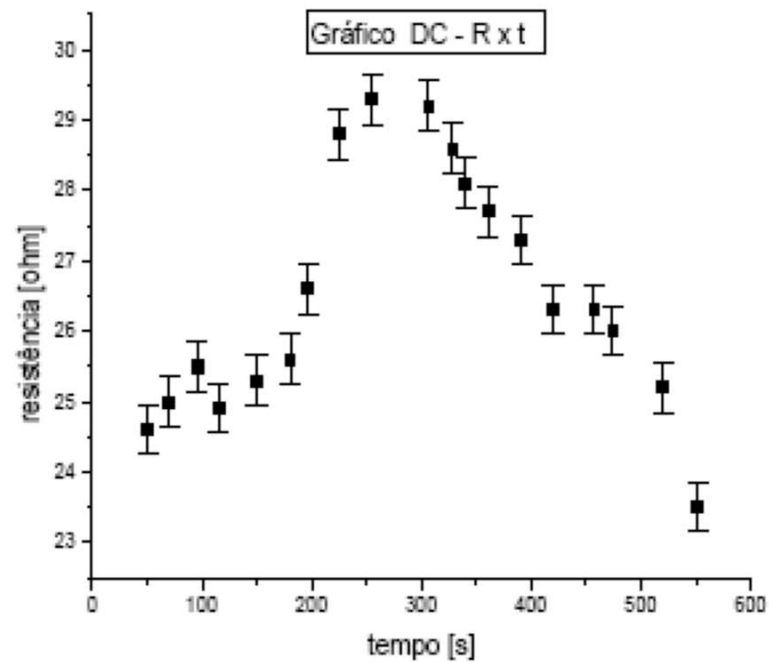
Resistência da água em AC e DC



| Tempo (minuto) | Resistência da água em corrente contínua | $\sigma_{\text{contínua}}$ |
|----------------|--|----------------------------|
| Início | 386,2 k Ω | 4,3 k Ω |
| 1 minuto | 2,96 M Ω | 0,07 M Ω |
| 2 minutos | 1,83 M Ω | 0,06 M Ω |
| 3 minutos | 1,061 M Ω | 0,05 M Ω |

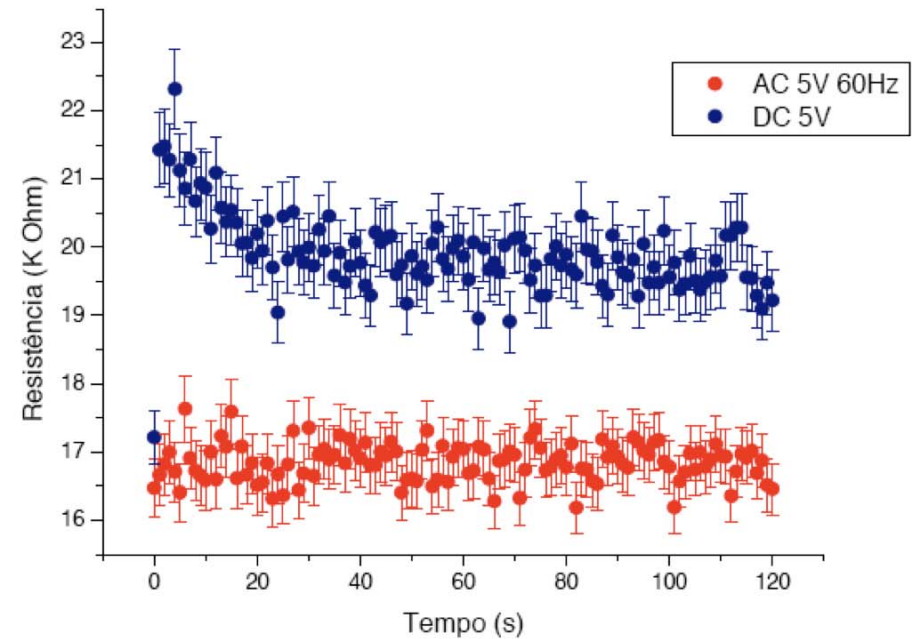
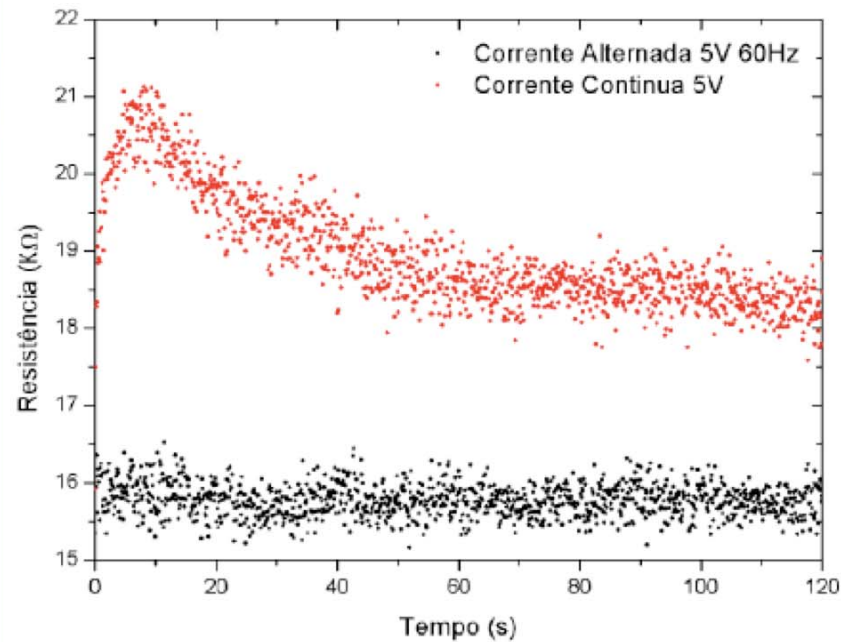


Resistência da água em AC e DC

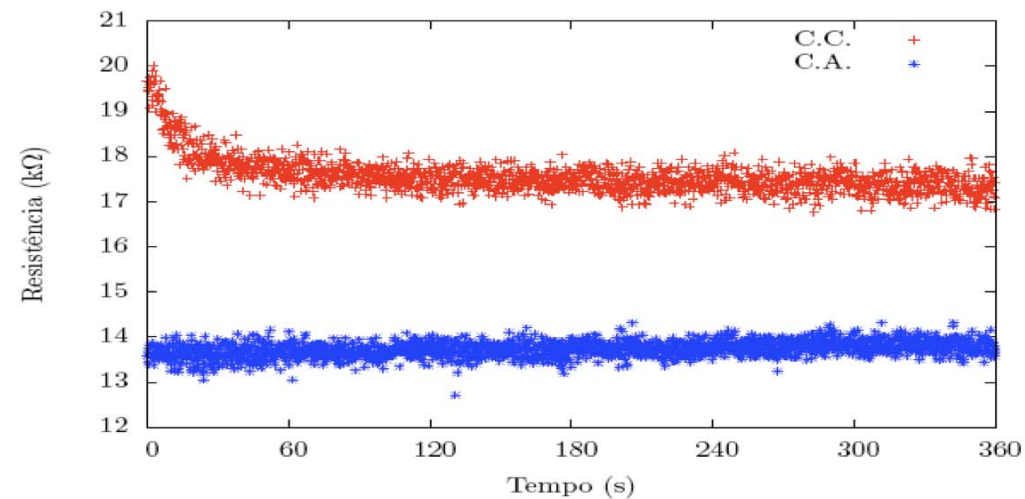


Resistência da água em AC e DC

Variação da Resistência da Água



Resistência da água (L=34,7 cm)



Porque comportamentos tão diferentes?

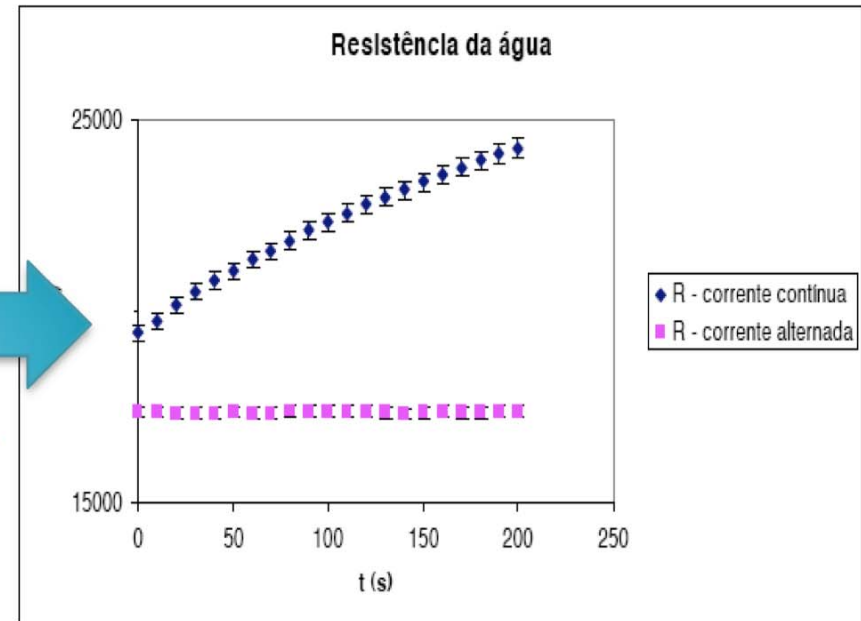
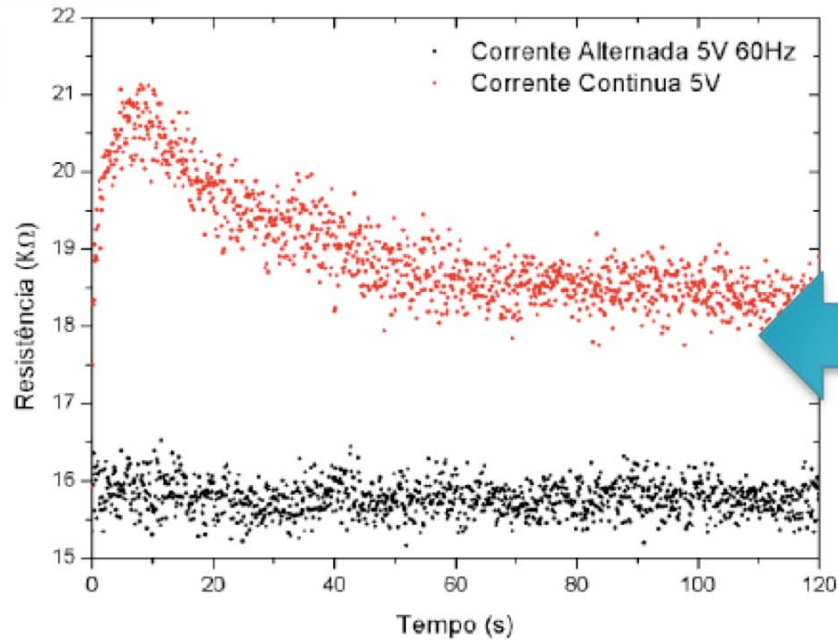
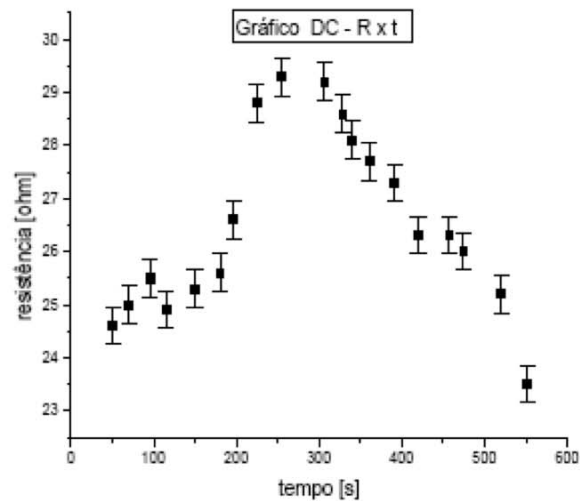


Figura 1

Em DC, muitas coisas diferentes podem ocorrer, tais como polarização, eletrólise, etc.



Em AC, a resistência permanece praticamente inalterada.

Qual a resistência da água em AC?

Para poder mapear, a resistância deve ser muito menor que a do voltímetro (10 M Ω)

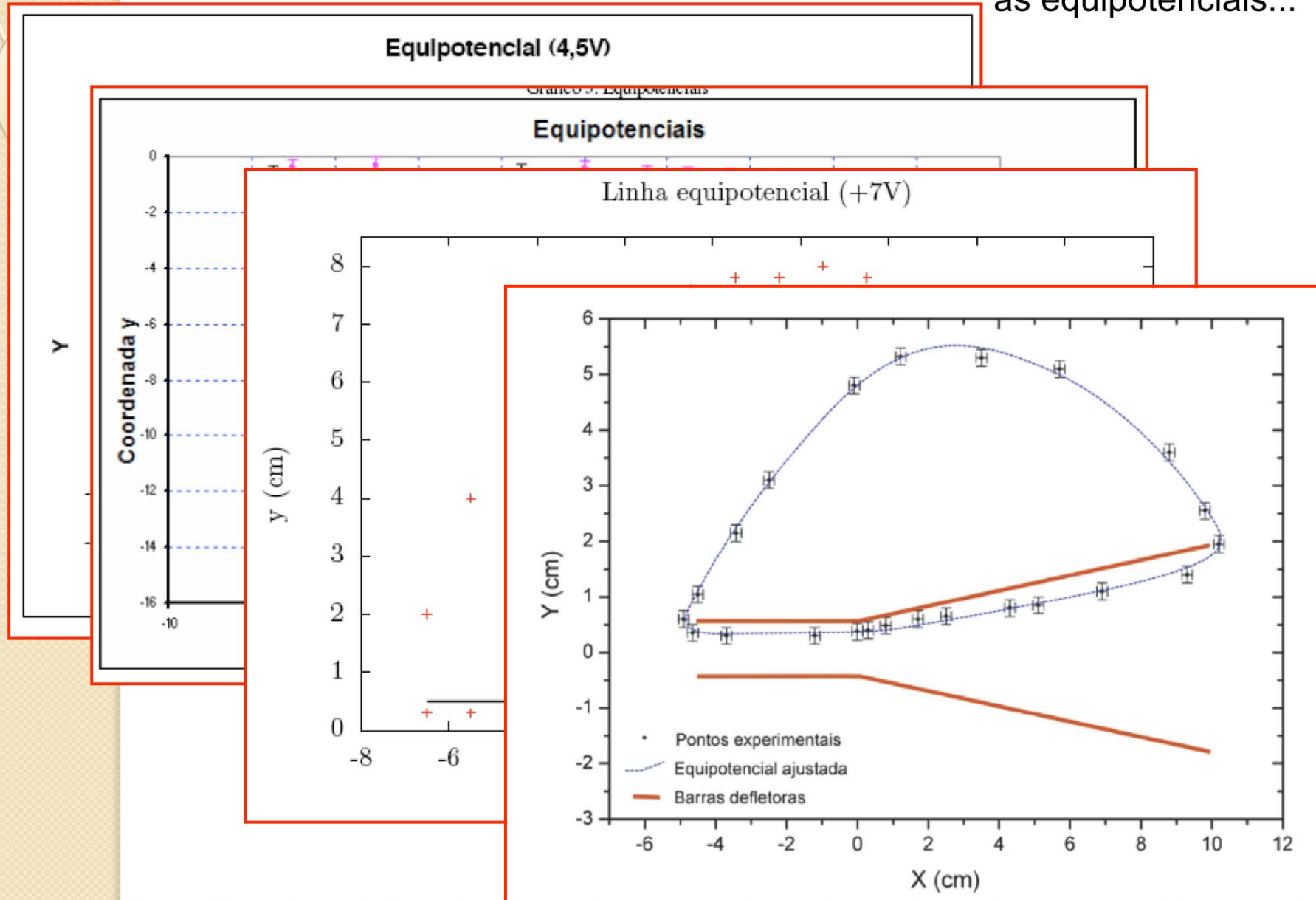
E a resistividade deve ser muito maior que a dos eletrodos (Cobre) ~ 17 n Ω m

A maioria dos resultados estão compatíveis \rightarrow BOM!

| Resistência (k Ω) | Resistividade (Ω m) |
|---------------------------|---------------------------------------|
| 15,8 \pm 0,2 | 159 \pm 64 |
| ~ 16,5 | 168,3 \pm 0,9 |
| ~ 14 | 140 |
| 18,4 \pm 0,4 | 150,3 \pm 3,8 |
| 22,04 \pm 0,24 | 132 \pm 22 |
| 23,3 \pm 1,2 | 163 \pm 13 |
| 20,85 \pm 0,25 | 72,8 \pm 0,1 |
| 17,19 \pm 0,11 | 0,00017 |
| 17,3 \pm 0,1 | 173 |
| 30,7 | 151 \pm 11 |
| 15,8 \pm 1,2 | (60 \pm 5) \times 10 ⁴ |

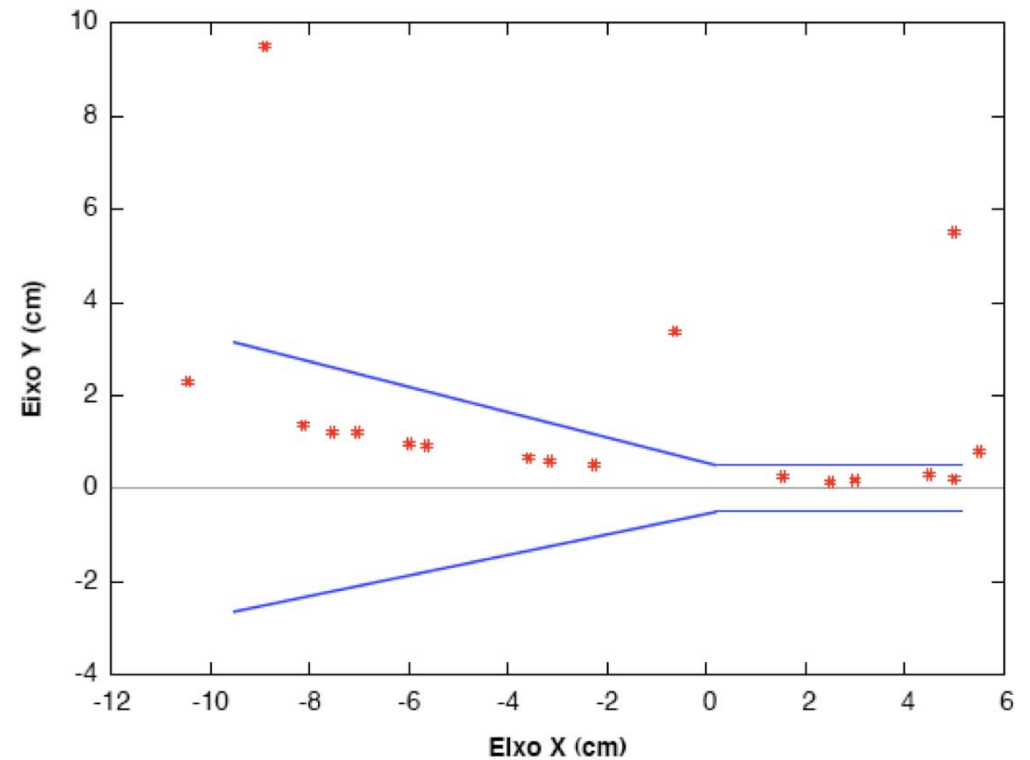
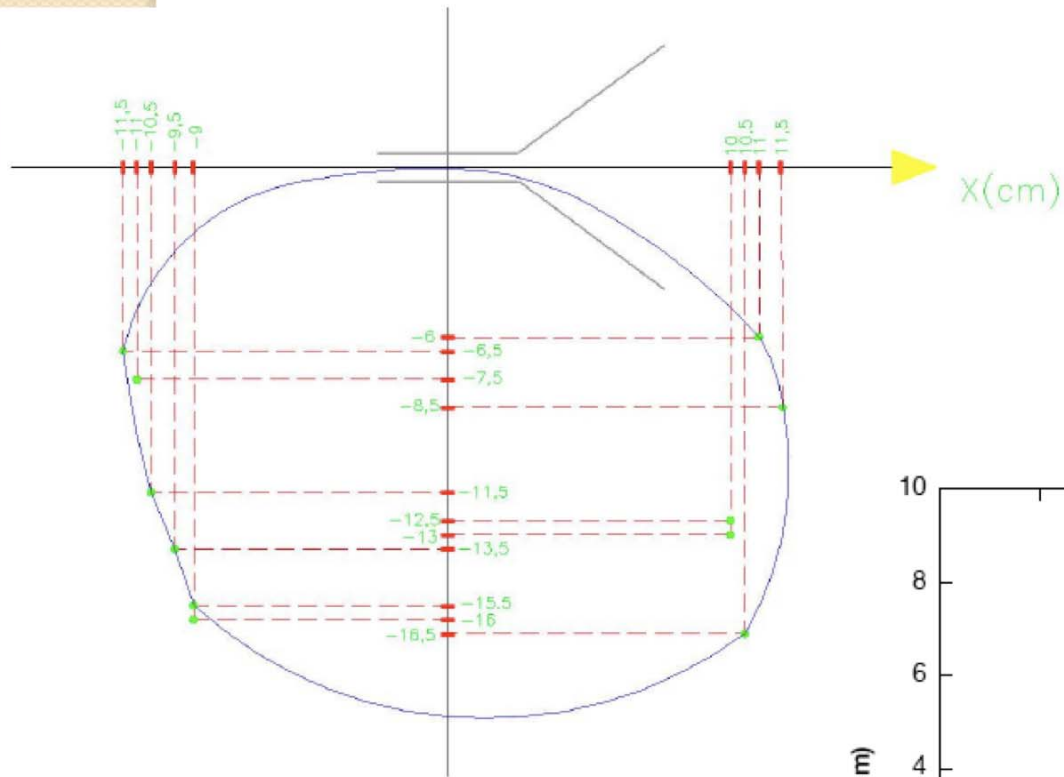
E as equipotenciais?

Podendo usar a água para mapear campos, vamos primeiro olhar as equipotenciais...

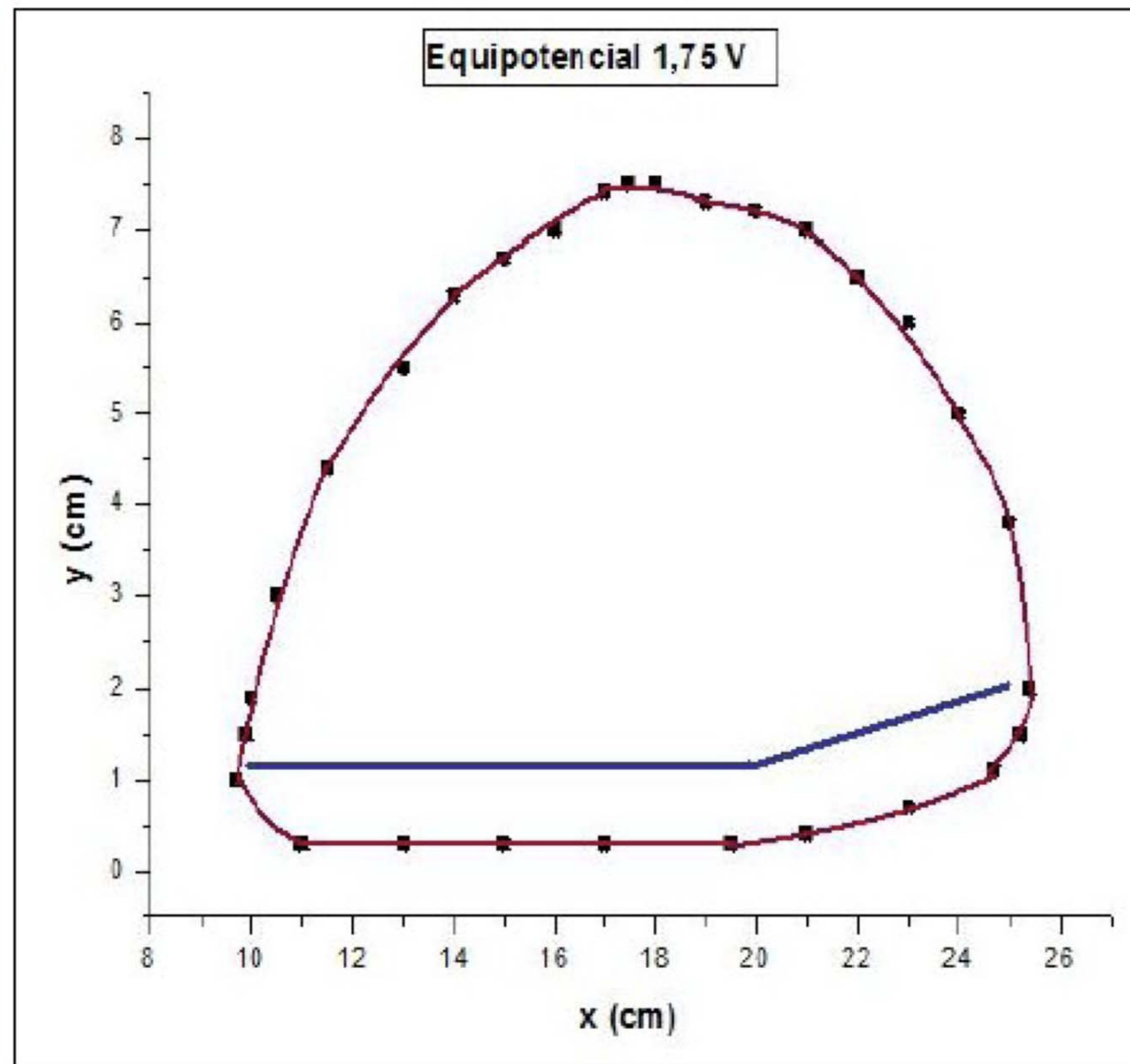


E as equipotenciais?

O que poderia ser melhorado nestas equipotenciais?



E as equipotenciais?



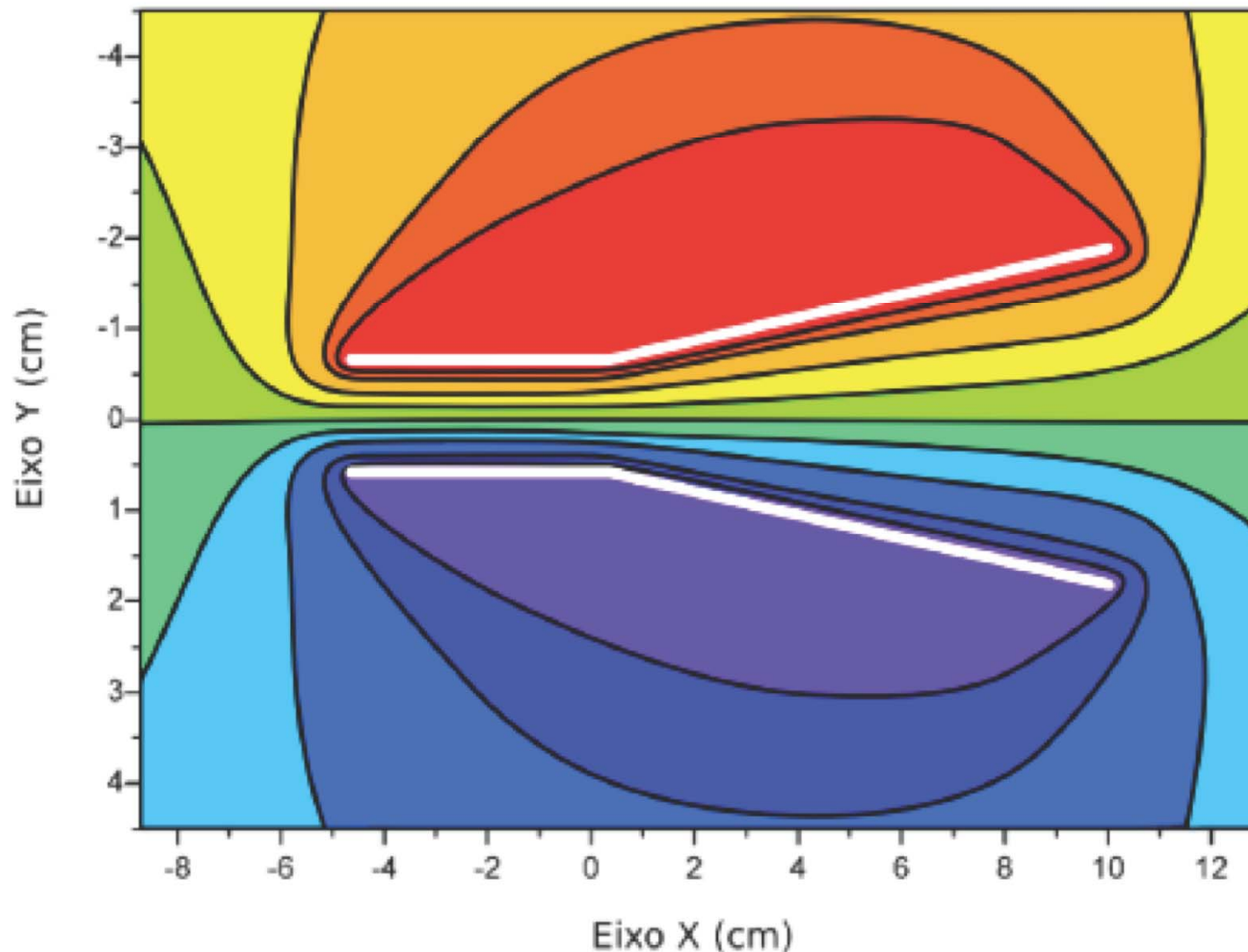
Qual é o problema neste caso?

Isto é importante? Porque?

Uma análise bastante interessante (A05)

Por curiosidade, foi mapeado o potencial em diversos pontos regularmente espaçados entorno das placas. Os dados foram estimados a partir de uma simulação e podem ser vistos assim uma vez filtrados.

Com tais dados, especialmente de um computador, foram geradas as seguintes estimativas por

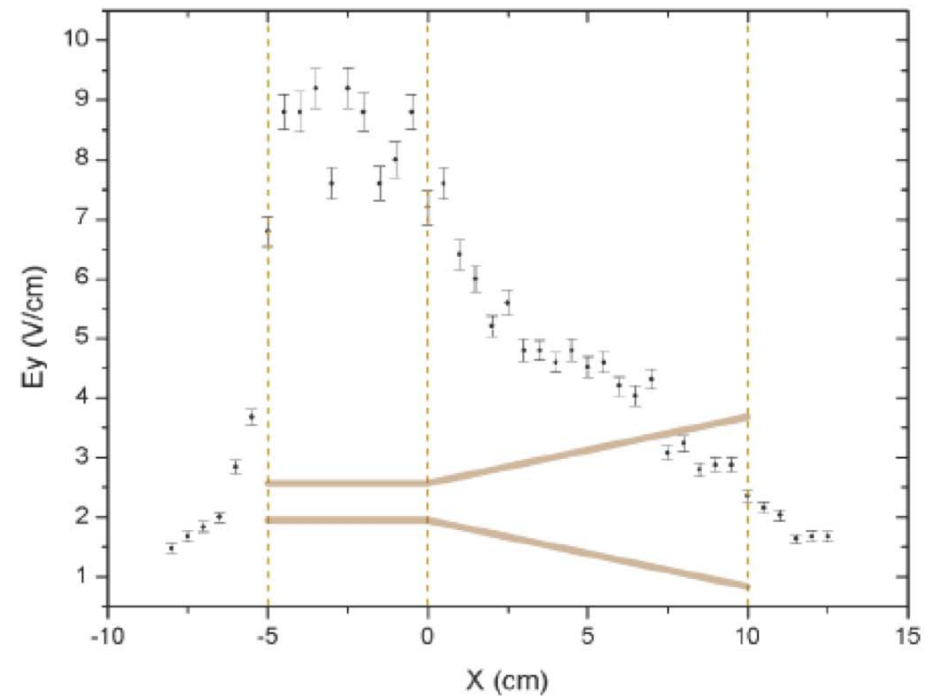
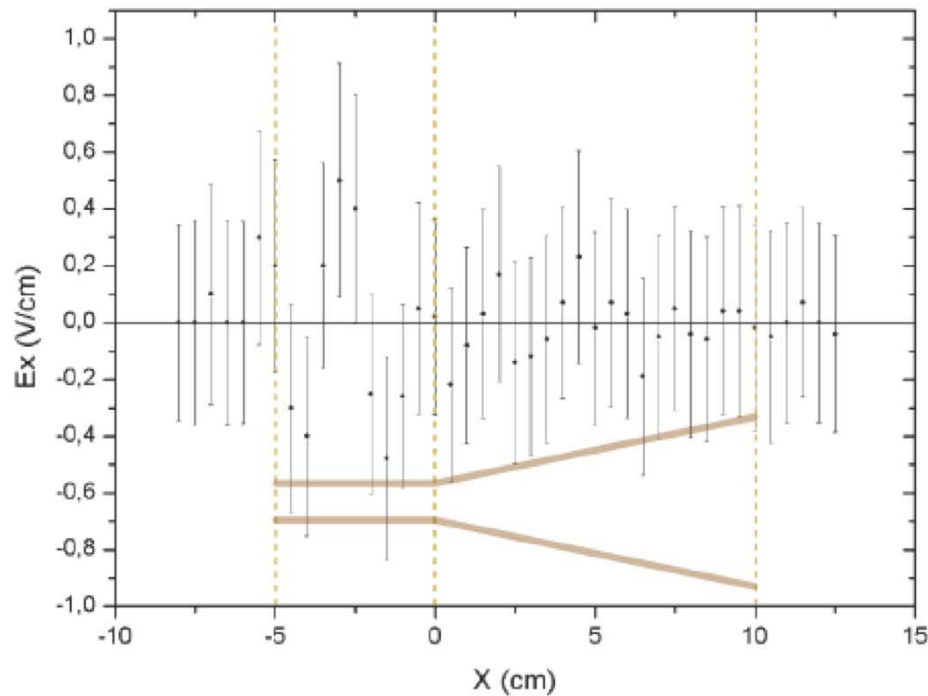


ionais estimadas por

E o campo elétrico?

$$E_x = \Delta V(x)/\Delta x$$

$$E_y = \Delta V(y)/\Delta y$$

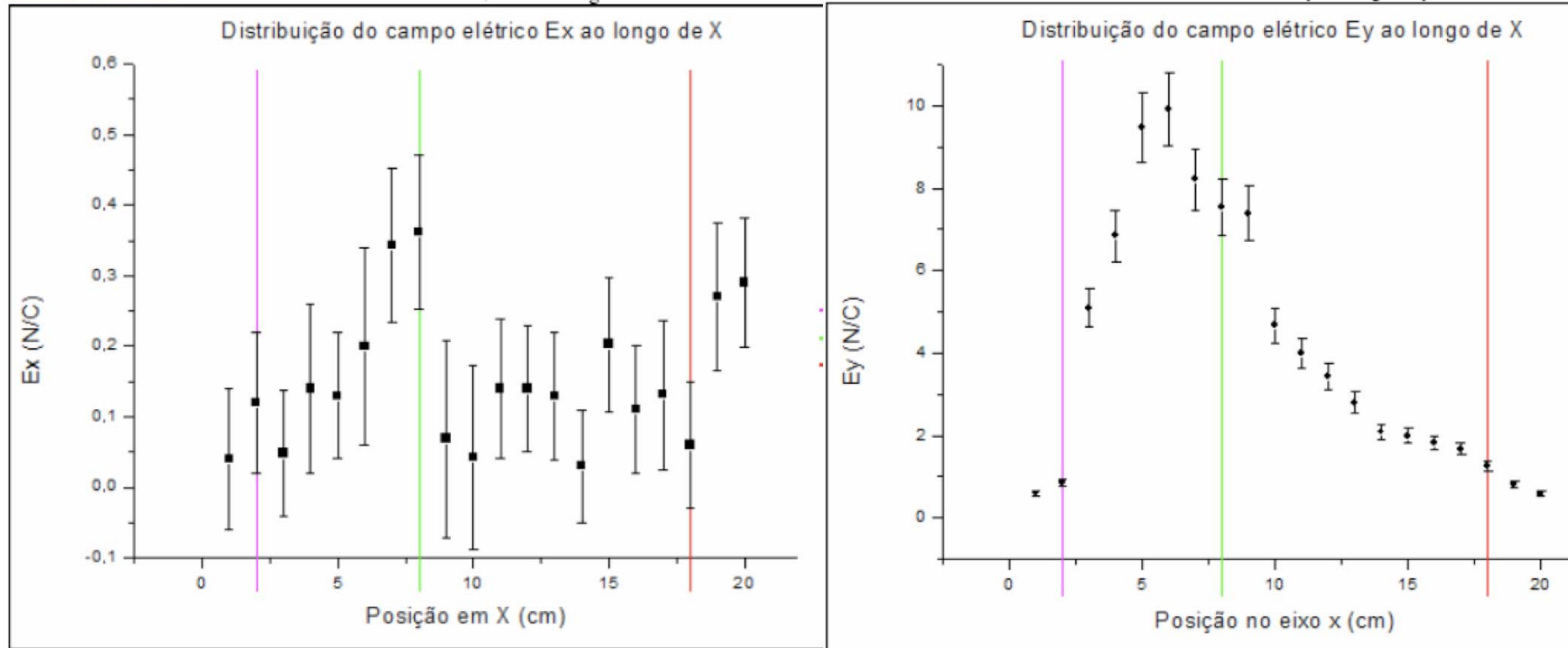


Isto é o esperado? Porque?

E o campo elétrico?

$$E_x = \Delta V(x)/\Delta x$$

$$E_y = \Delta V(y)/\Delta y$$



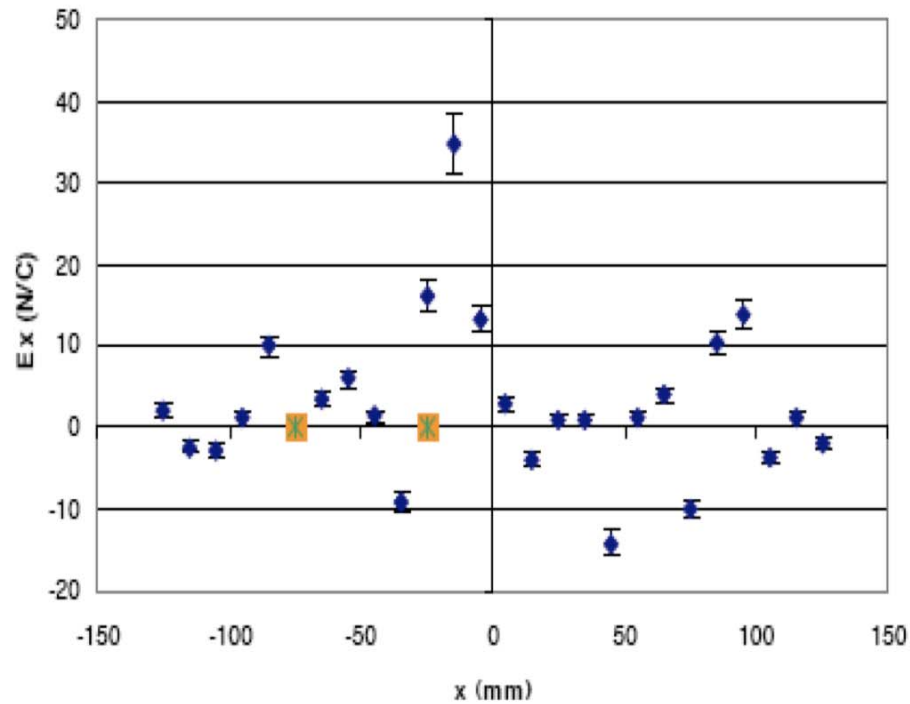
Isto é o esperado? Porque?

E o campo elétrico?

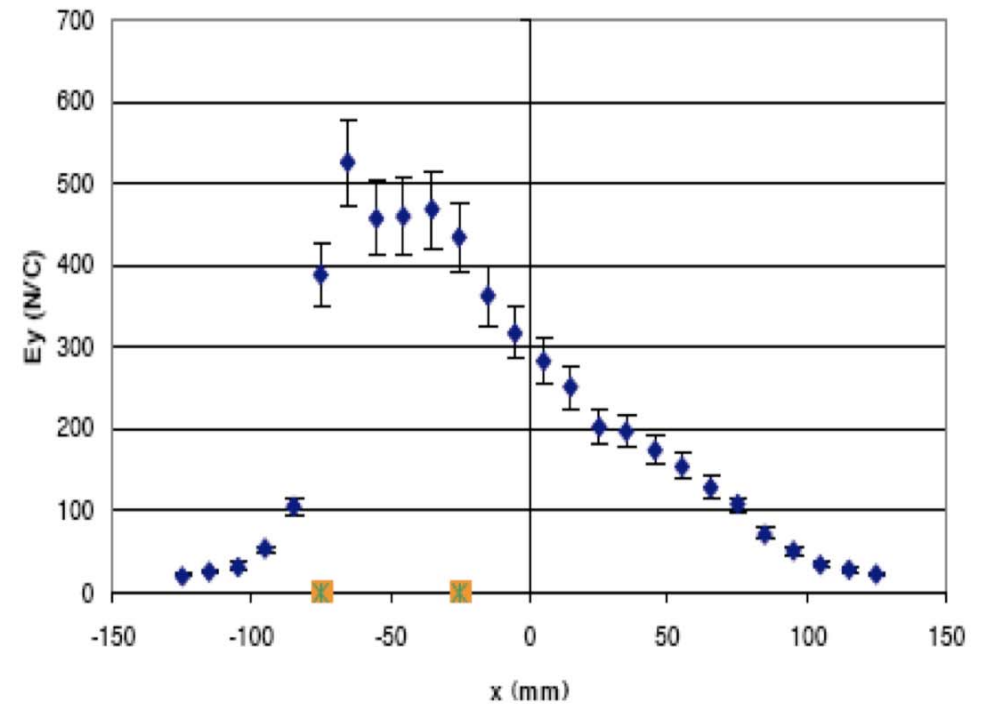
$$E_x = \Delta V(x)/\Delta x$$

$$E_y = \Delta V(y)/\Delta y$$

Campo horizontal



Campo vertical



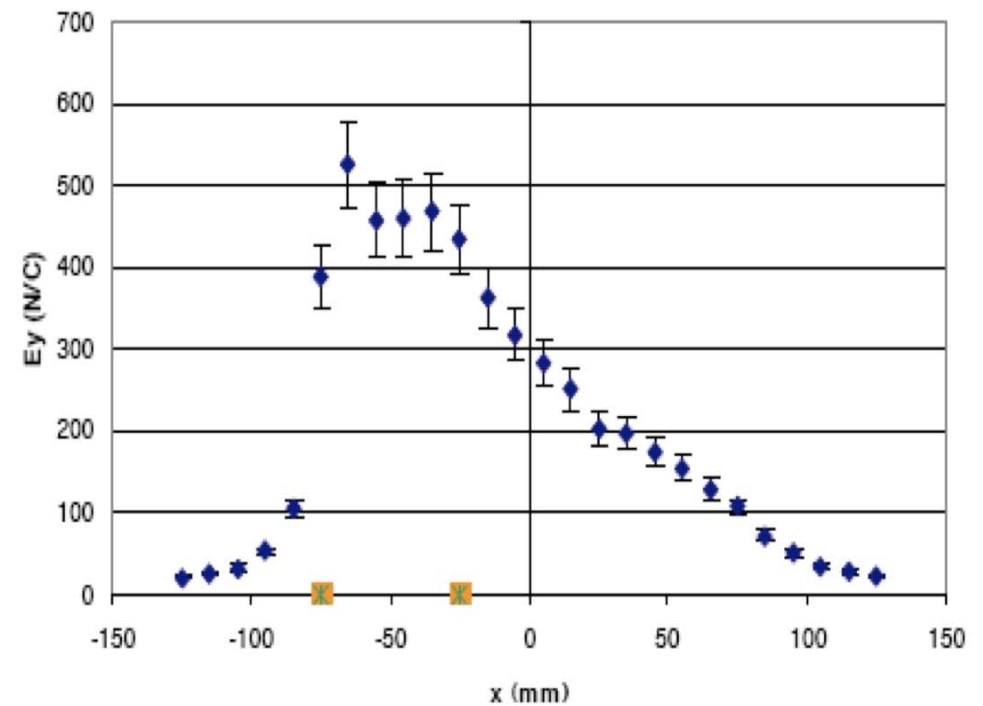
Isto é o esperado? Porque?

E o campo elétrico?

$$E_x = \Delta V(x)/\Delta x$$

$$E_y = \Delta V(y)/\Delta y$$

Campo vertical

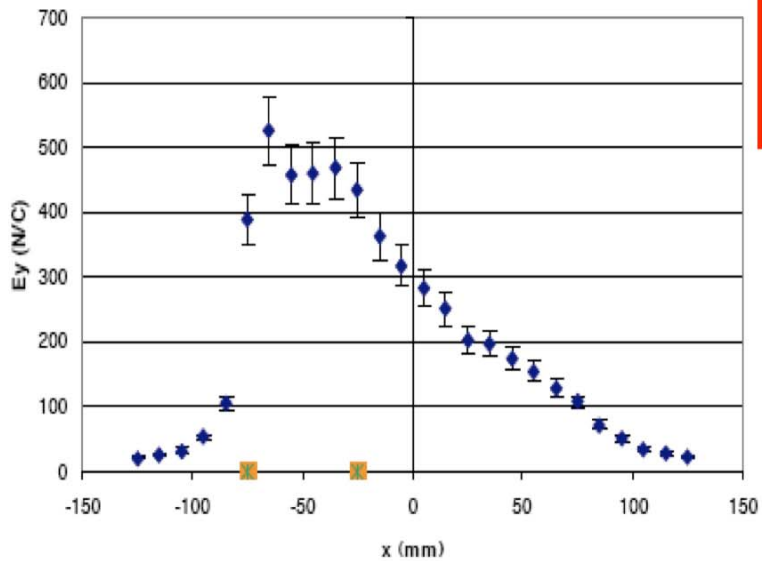


Isto é o esperado? Porque?

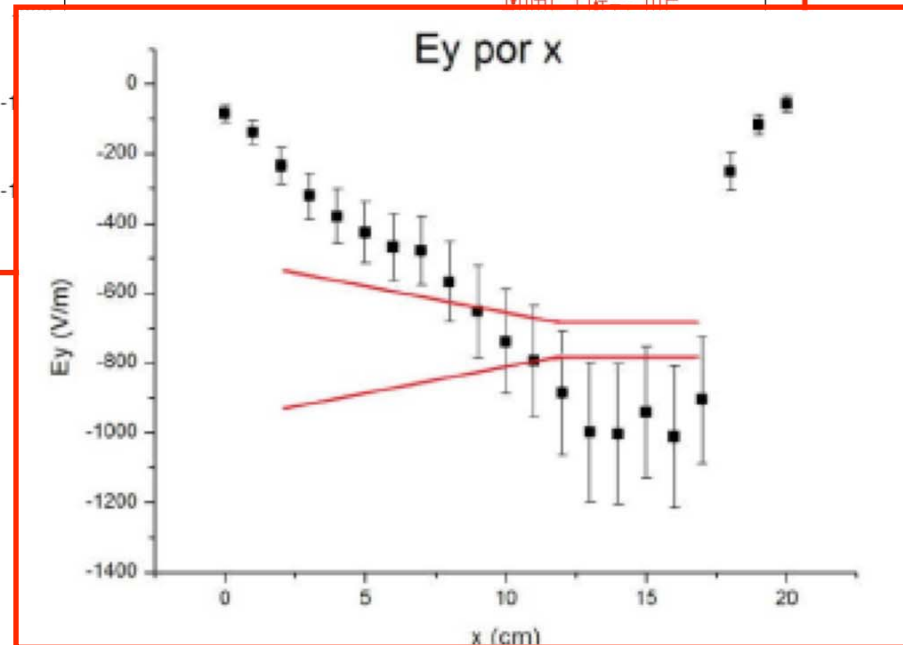
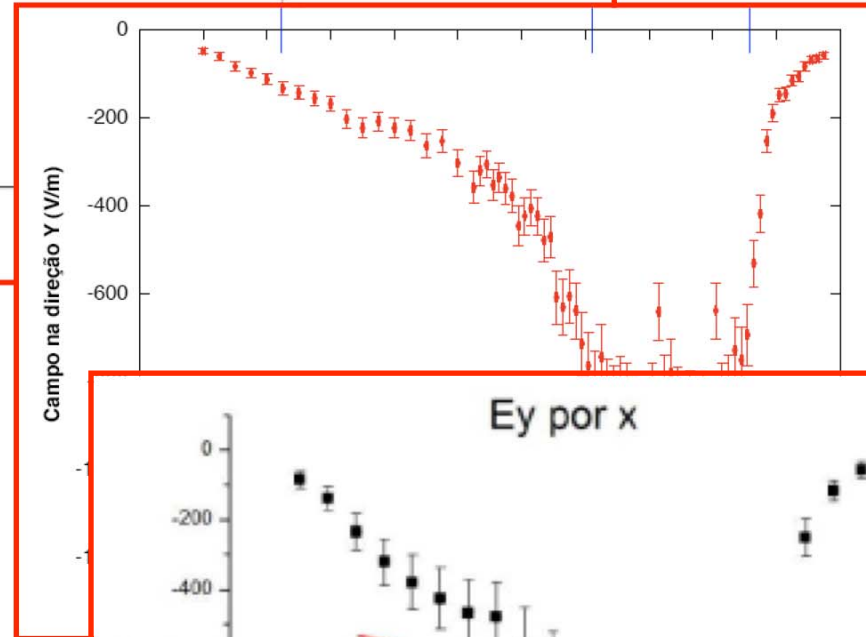
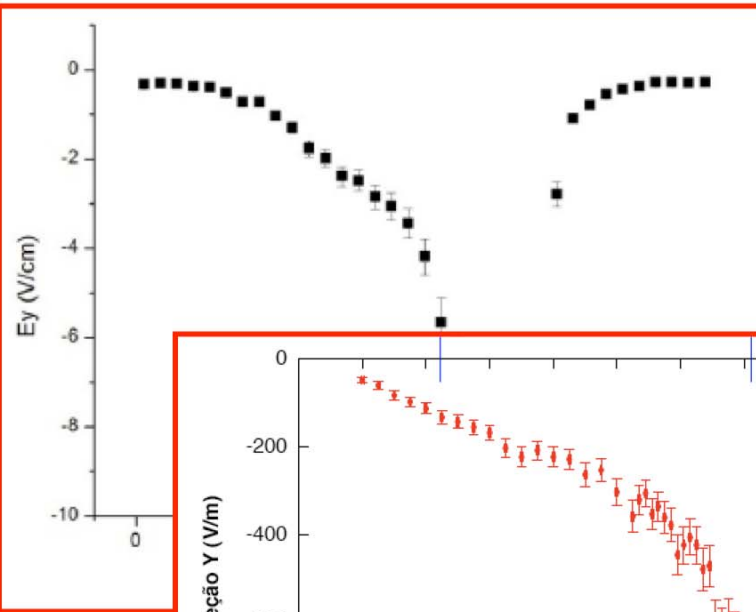
Campo negativo?

Qual é a diferença?

Campo vertical

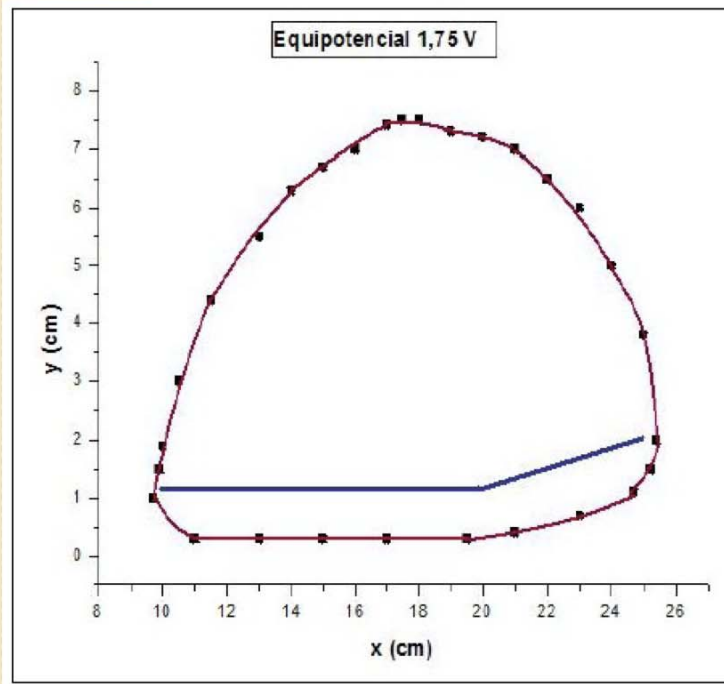


$$E_x = \Delta V(x) / \Delta x$$
$$E_y = \Delta V(y) / \Delta y$$



Geometria trocada?

Qual é a diferença?



$$E_x = \Delta V(x) / \Delta x$$

$$E_y = \Delta V(y) / \Delta y$$

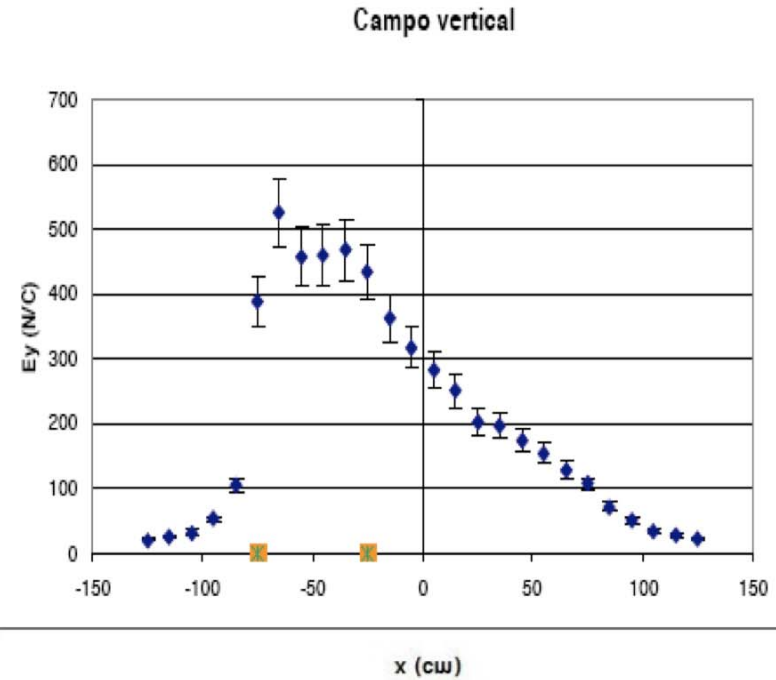
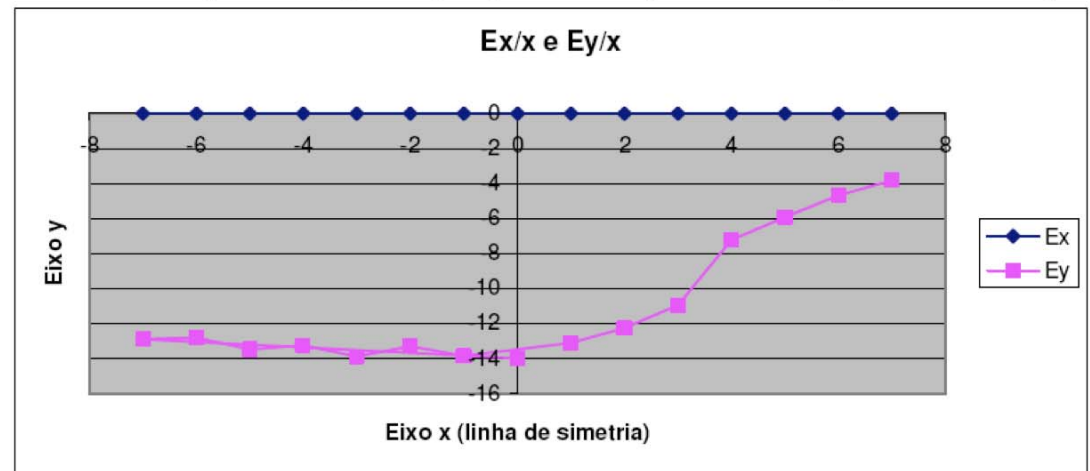


Gráfico de campo em função da posição x decomposto nas componentes E_x e E_y :

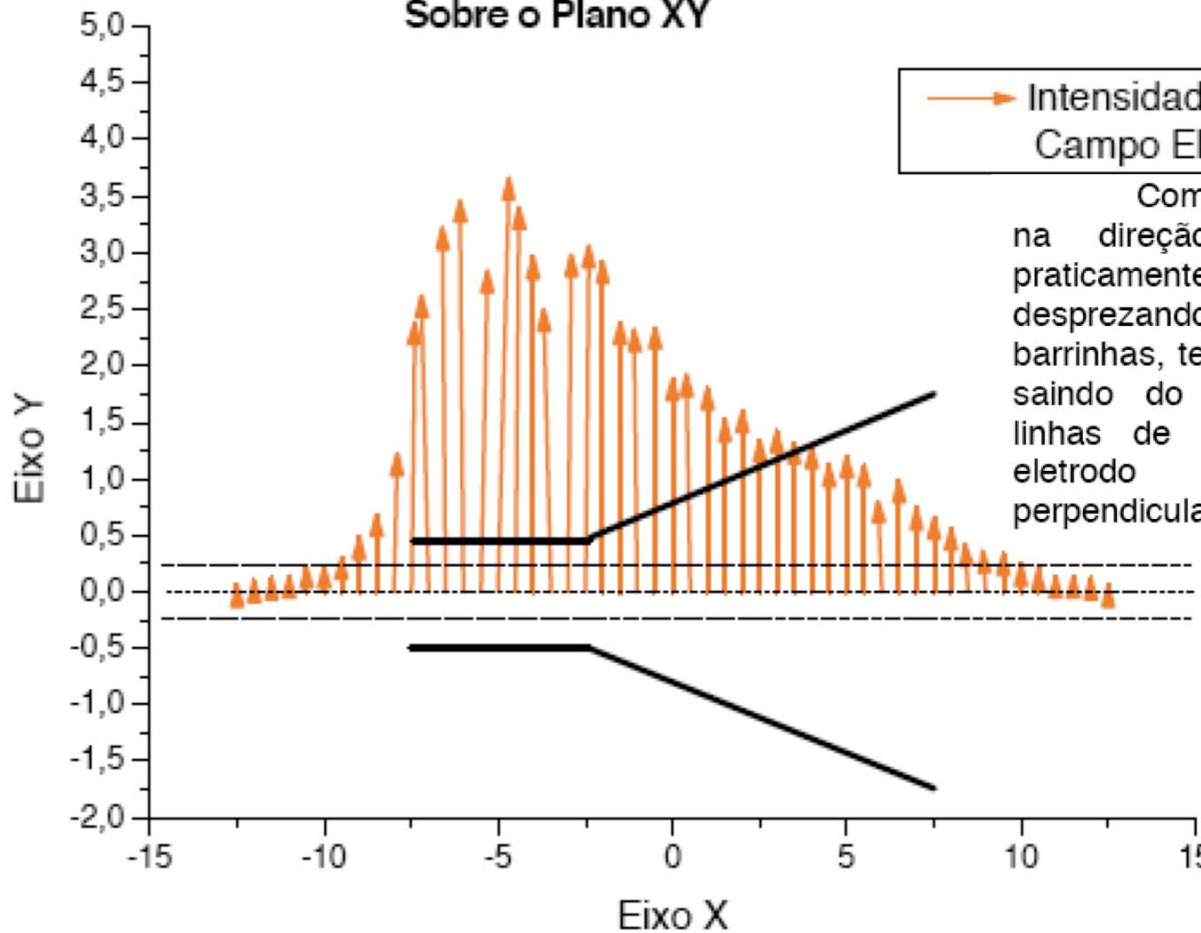
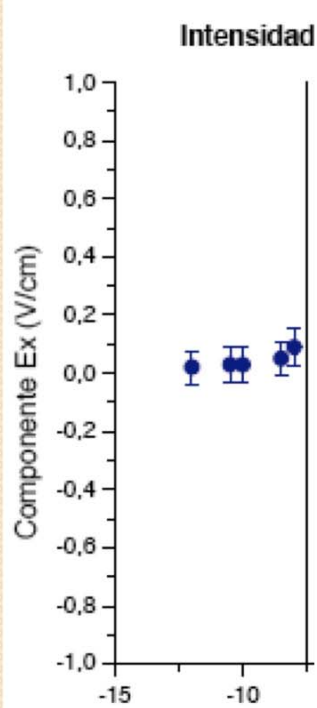


Visualização interessante

$$E_x = \Delta V(x)/\Delta x$$

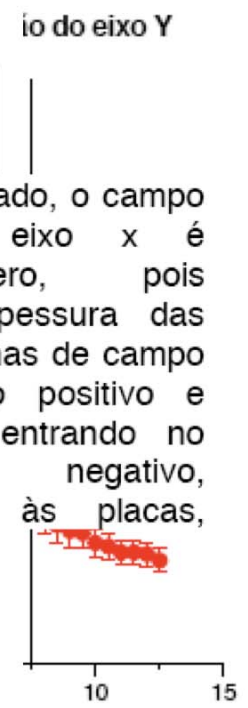
$$E_y = \Delta V(y)/\Delta y$$

Vetores Campo Elétrico
Sobre o Plano XY



→ Intensidade do
Campo Elétrico

Como esperado, o campo na direção do eixo x é praticamente zero, pois desprezando a espessura das barrinhas, temos linhas de campo saindo do eletrodo positivo e linhas de campo entrando no eletrodo negativo, perpendicularmente às placas,



$E = E_{max} [-\sin(\omega t + kx) + \sin(\omega t - kx)]$ $\frac{1}{A} \frac{dP}{dt} = \frac{S}{c}$ $\int \frac{dr}{r} = - \int \frac{2\pi kL}{H} dt$ $x = A \cos(\sqrt{\frac{E}{m}} t) = A \cos \omega t$
 $t = H_{max} [\sin(\omega t + kx) + \sin(\omega t - kx)]$ Rate star format
 $H = 2\pi kL(T_2 - T_1)$ $x=0$ $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$
 $E = -2E_{max} \cos \omega t \sin kx$ $\omega = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ $\sin \theta_2 = \frac{n_0}{n_b} \sin \theta_a$
 $\frac{d\ln(b/a)}{dt} \sim 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ $2.9979246 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ $\frac{1}{2} (N) (A \cdot \Delta t)$ $\sin \theta_{crit} = \frac{n_b}{n_a}$
 Luminosity 10^{16} $c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}$ Flux 10^{10} $\frac{dI}{dx} = -\alpha I dx$ $I_b = I_a e^{-\alpha x}$ $u_b = f \lambda_b + u_b = f \lambda_a$
 $\frac{dN}{dt} = \frac{dQ}{dt} \frac{1}{Q} = \frac{dQ}{dt} \frac{1}{Q}$ $\frac{dI}{dx} = -\alpha I dx$ $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$ $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$
 $\frac{dI}{dx} = -\alpha I dx$ $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$ $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$ $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$
 Frequency, Hz 10^{15} 10^{20} $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$ $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$ $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$
 $B = \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2}$ $\frac{1}{2} \frac{d\Phi_z}{dt} = M \frac{di}{dt}$ $E_2 = M \frac{di}{dt}$ $\frac{1}{2} \frac{d\Phi_z}{dt} = M \frac{di}{dt}$ $E_2 = M \frac{di}{dt}$
 Event horizon $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$ $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$ $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$
 Singularity + Focal length $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$ $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$ $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$
 Surface density $\frac{1}{2} \frac{d\Phi_z}{dt} = M \frac{di}{dt}$ $E_2 = M \frac{di}{dt}$ $\frac{1}{2} \frac{d\Phi_z}{dt} = M \frac{di}{dt}$ $E_2 = M \frac{di}{dt}$

Um pouco de teoria

Como (então) determinar o potencial elétrico?

- Mapeamento do campo
 - Medir as equipotenciais e obter o gradiente experimentalmente
 - Feito na semana passada
- Como comparar estes resultados com uma previsão teórica?
 - Devemos resolver as equações para o campo, ou potencial.
 - Como?

Comparação teórica

- Lei de Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (-\nabla \cdot V) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- Equação de Poisson para o potencial

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- Na ausência de cargas livres (Equação de Laplace)

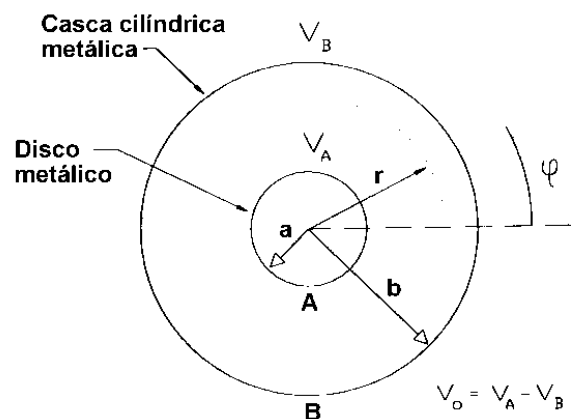
$$\nabla^2 V = 0$$

Resolvendo a equação de Laplace

$$\nabla^2 V = 0$$

- Sistemas simétricos

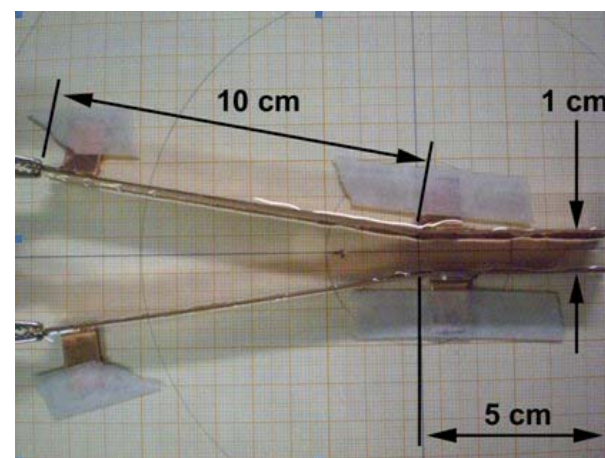
- Resolução algébrica fácil



$$V(r) = A \ln r + B$$

- Sistemas mais complexos

- Como resolver?



$$V(x, y) = ?$$

Resolução numérica da equação de Laplace

- Vamos olhar o Laplaciano em duas dimensões:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} V(x, y) = 0$$

- Como calcular estas derivadas?
 - Aproximação numérica para derivada

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x, y) \approx \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{V(x + \Delta x / 2, y) - V(x - \Delta x / 2, y)}{\Delta x}$$

Resolução numérica da equação de Laplace

- Vamos agora calcular a derivada segunda

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x, y) \approx \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V(x + \Delta x / 2, y) - V(x - \Delta x / 2, y)}{\Delta x} \right)$$

$$\approx \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\partial}{\partial x} V(x + \Delta x / 2, y) - \frac{\partial}{\partial x} V(x - \Delta x / 2, y) \right)$$

- Vamos calcular o primeiro termo da expressão acima:

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x + \Delta x / 2, y)$$

Resolução numérica da equação de Laplace

- Cálculo do primeiro termo:

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x + \Delta x/2, y) = \frac{V(x + \Delta x/2 + \Delta x/2, y) - V(x + \Delta x/2 - \Delta x/2, y)}{\Delta x}$$

- Ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x + \Delta x/2, y) = \frac{V(x + \Delta x, y) - V(x, y)}{\Delta x}$$

- Do mesmo modo para o segundo termo:

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x - \Delta x/2, y) = \frac{V(x, y) - V(x - \Delta x, y)}{\Delta x}$$

Resolução numérica da equação de Laplace

- Assim, as derivadas segunda, em x e y , valem:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x,y) = \frac{V(x + \Delta x, y) - 2V(x, y) + V(x - \Delta x, y)}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} V(x,y) = \frac{V(x, y + \Delta y) - 2V(x, y) + V(x, y - \Delta y)}{\Delta y^2}$$

- Se eu escolho $\Delta x = \Delta y = \Delta$ eu posso resolver a equação de Laplace facilmente

Resolução numérica da equação de Laplace

- Substituindo as derivadas calculadas e fazendo $\Delta x = \Delta y = \Delta$ a equação de Laplace fica:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} V(x, y) = 0$$

$$\frac{V(x + \Delta, y) + V(x - \Delta, y) - 4V(x, y) + V(x, y + \Delta) + V(x, y - \Delta)}{\Delta^2} = 0$$

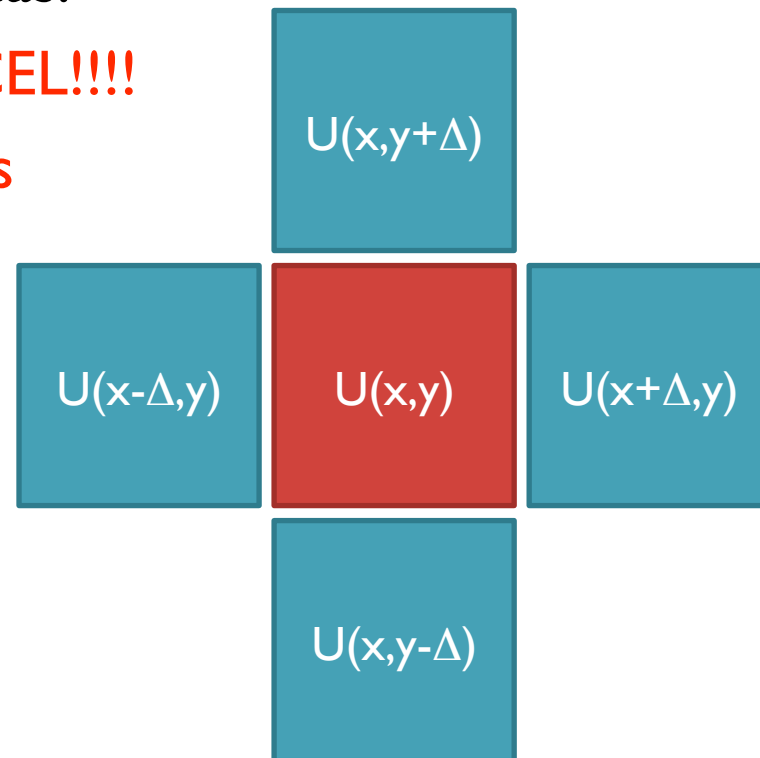
- Cujas solução é:

$$V(x, y) = \frac{1}{4} (V(x + \Delta, y) + V(x - \Delta, y) + V(x, y + \Delta) + V(x, y - \Delta))$$

Resolução numérica da equação de Laplace

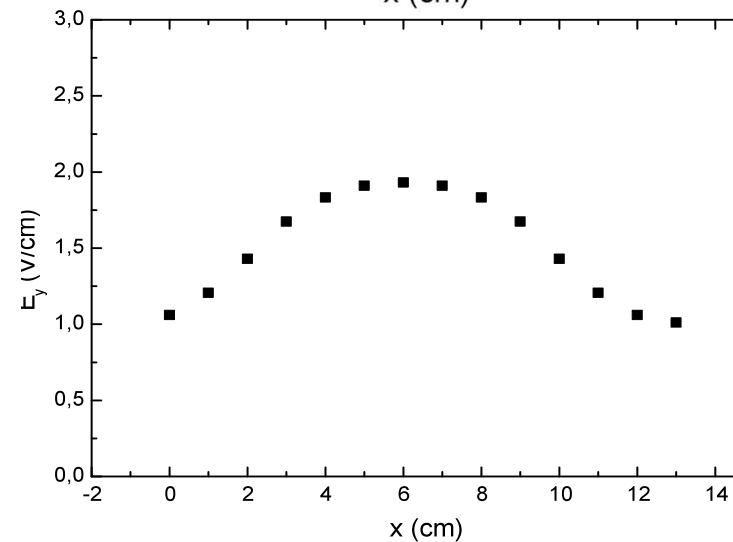
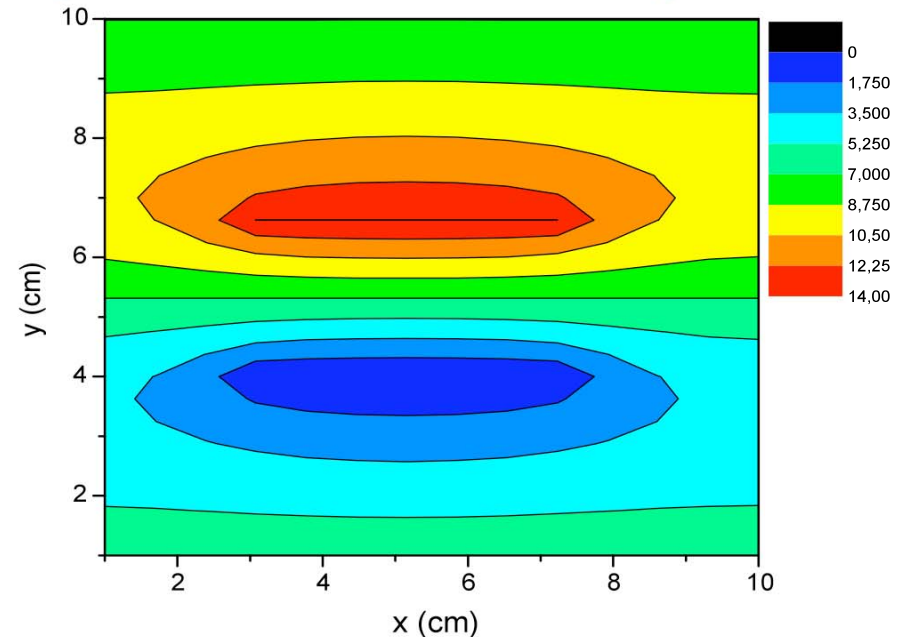
- Ou seja:
 - A solução da equação de Laplace diz que o potencial em um ponto é dado pela MÉDIA SIMPLES dos potenciais nas vizinhanças.
 - Podemos usar o EXCEL!!!!
 - Conseqüências Físicas

$$V(x,y) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} V(x + \Delta, y) + \\ V(x - \Delta, y) + \\ V(x, y + \Delta) + \\ V(x, y - \Delta) \end{pmatrix}$$

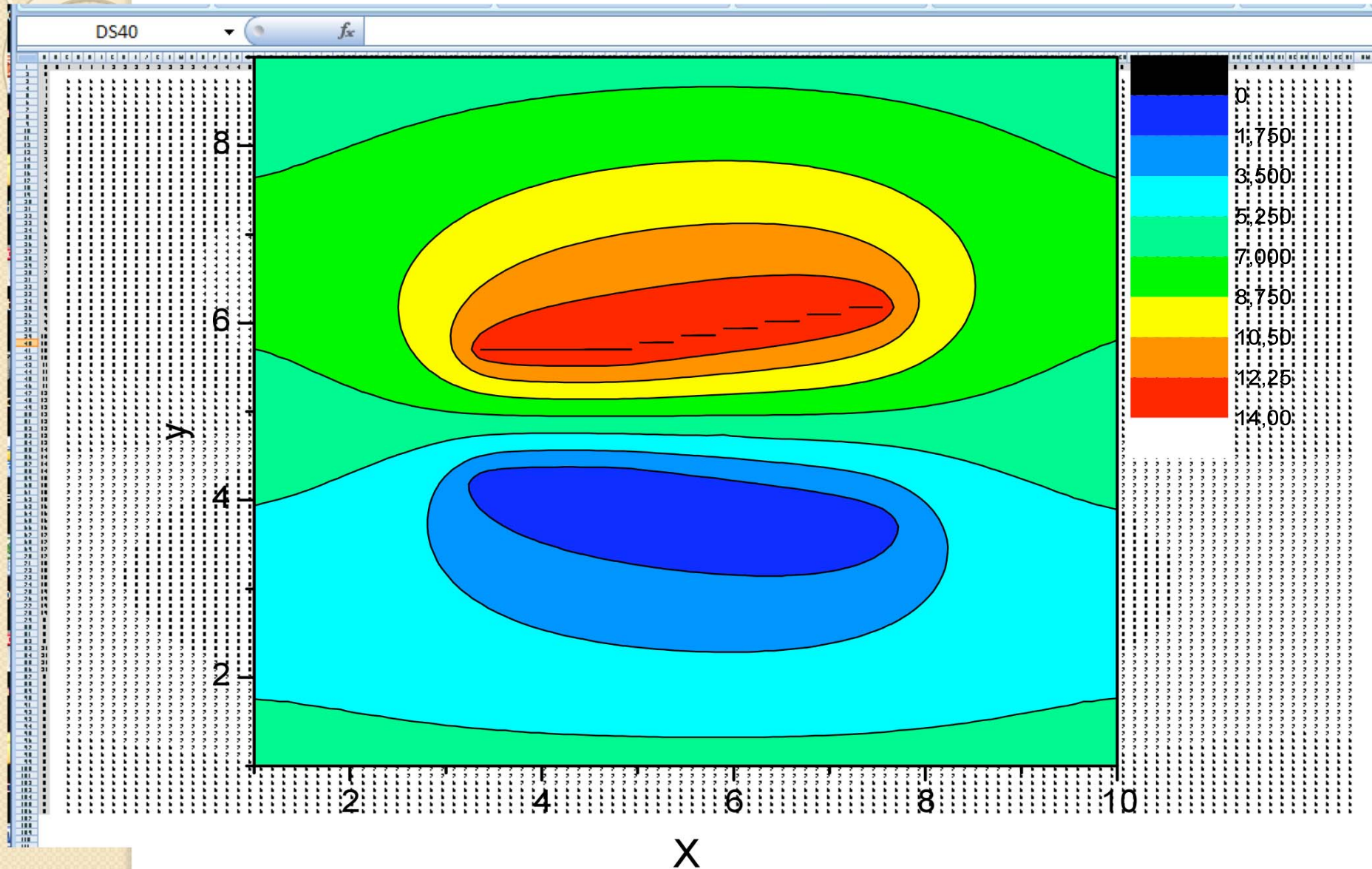


Criando um Excel para calcular o Laplaciano

- Copiar a matriz para o Origin ou programa gráfico de sua preferência
- Fazer a análise como se fossem dados normais de potencial
 - Calcular campos
 - equipotenciais
 - etc.



Um exemplo com uma malha grande (mais precisão)

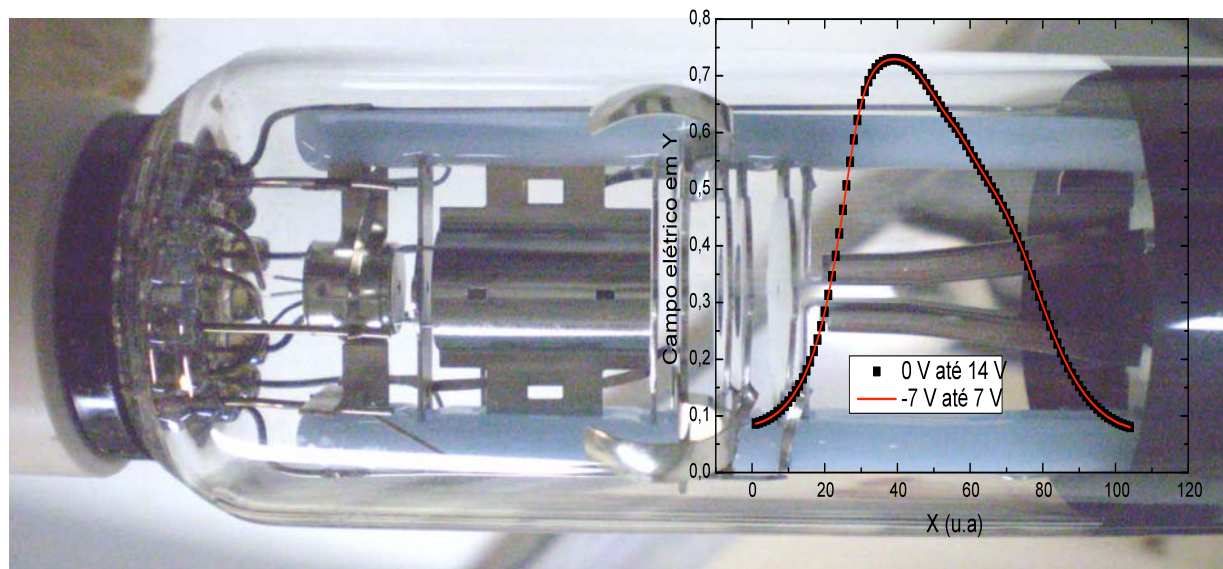


Atividades para a próxima semana (I)

- Implementar a geometria das placas utilizadas no Excel e resolver o problema numericamente.
 - Temos também os programas QFIELD e FEMM, que fazem a mesma coisa (quem quiser tentar)
- Calcular as componentes do campo ao longo do eixo de simetria e superpor aos dados
 - Entregar o gráfico com simulação superposta aos dados experimentais.

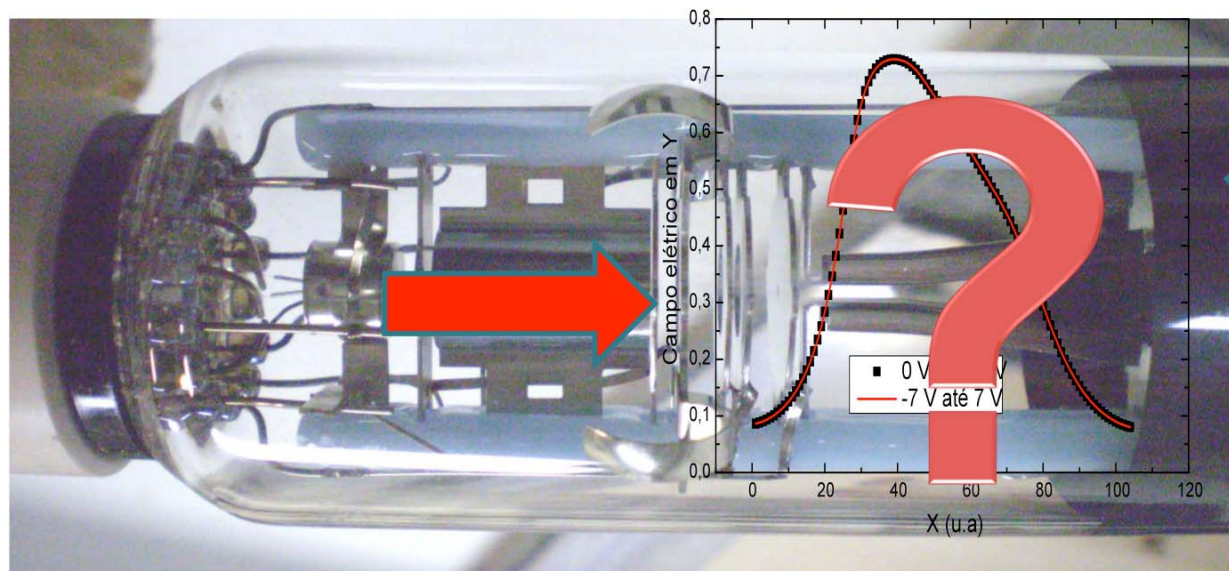
O que nós já sabemos?

- Campo elétrico entre as placas
 - Experimental e teórico (!)



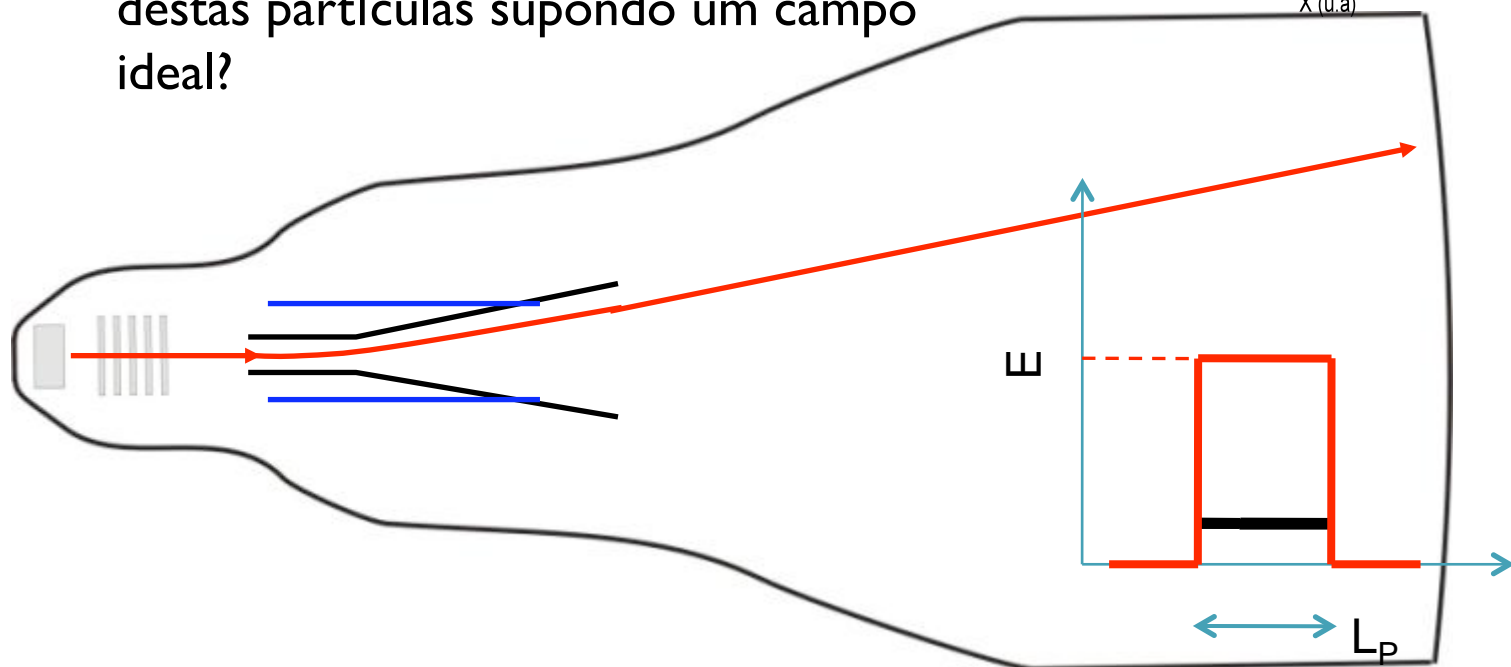
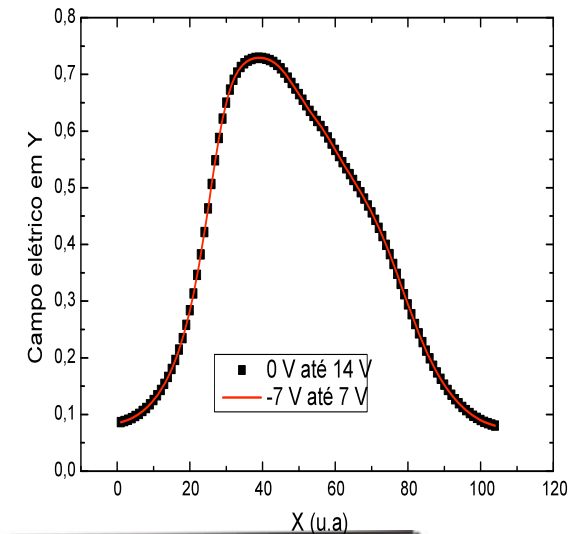
O próximo passo

- Como gerar elétrons
- Estudar o movimento destes elétrons no campo gerado.



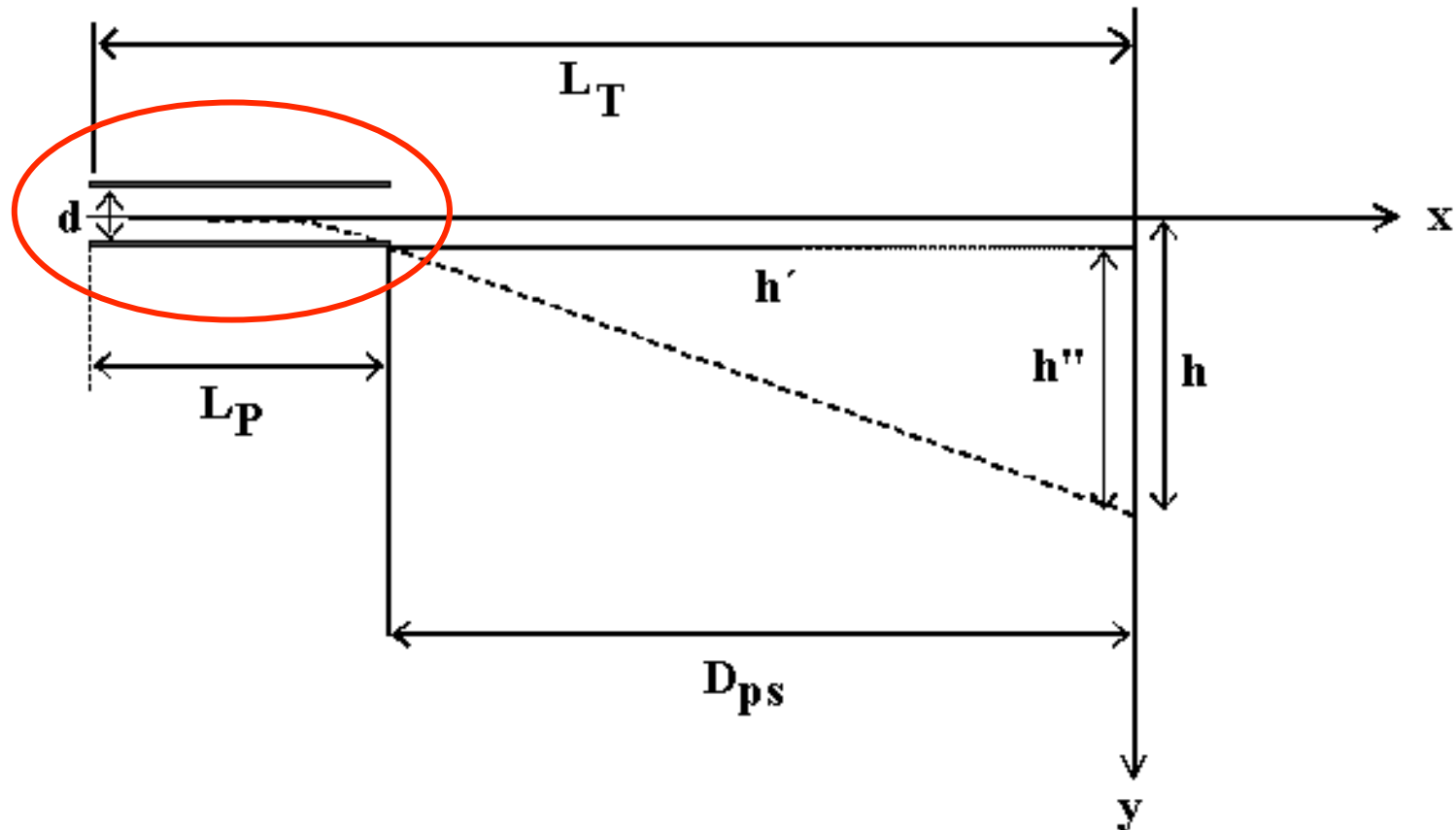
Simplificando o problema

- Problema real
 - Efeitos de borda, campo não uniforme
- Tentativa teórica
 - Solução do problema ideal
 - Podemos descrever o movimento destas partículas supondo um campo ideal?



Simplificando a geometria...

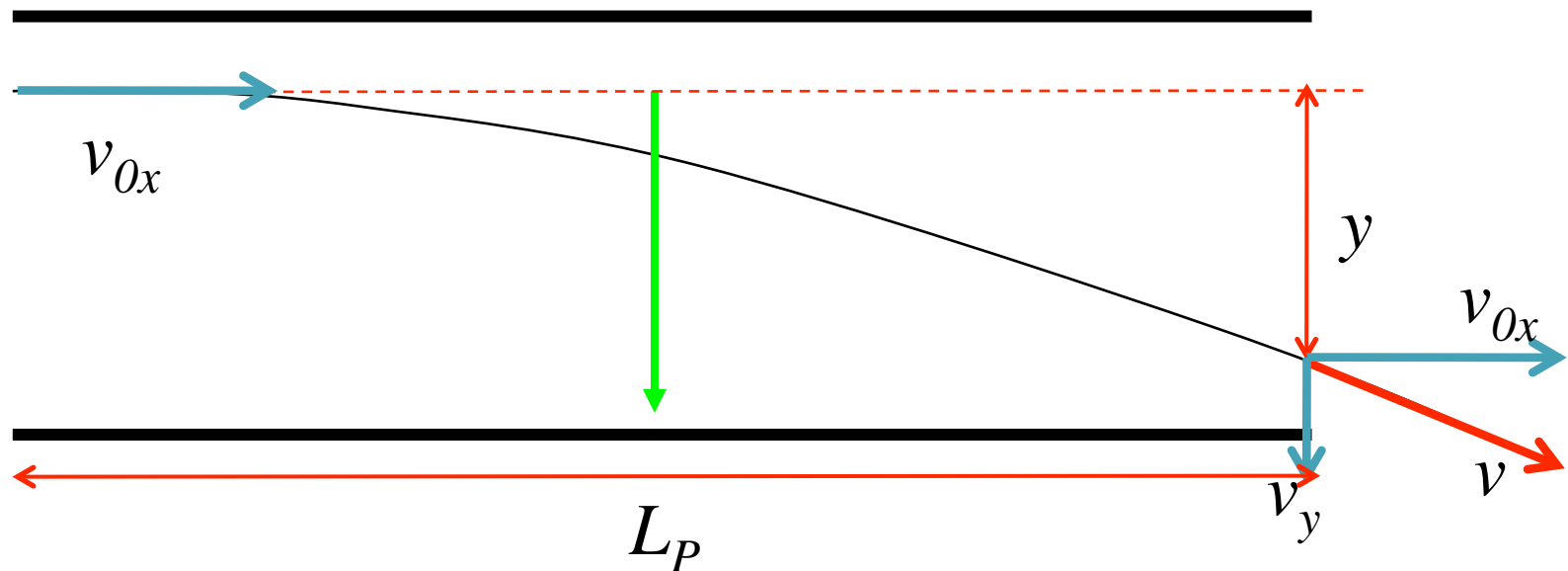
- Sistema de placas paralelas ideais, com um anteparo a uma distância D_{ps} . Qual a deflexão (h) do feixe por estas placas?



Movimento de uma partícula em um campo uniforme

- Movimento uniforme em x

$$t = \frac{L_P}{v_{0x}}$$

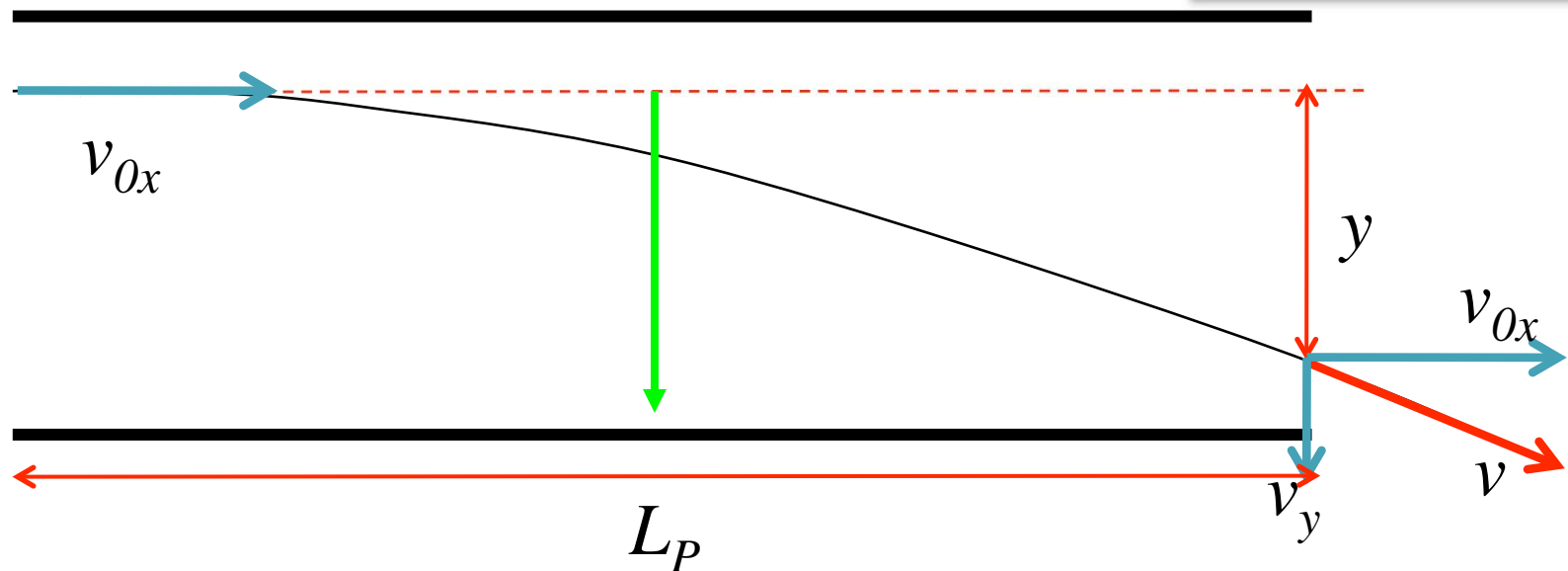


Movimento de uma partícula em um campo uniforme

- Movimento uniformemente variado em y

$$\vec{F} = q\vec{E} \Rightarrow F_y = qE \Rightarrow a_y = \frac{qE}{m}$$

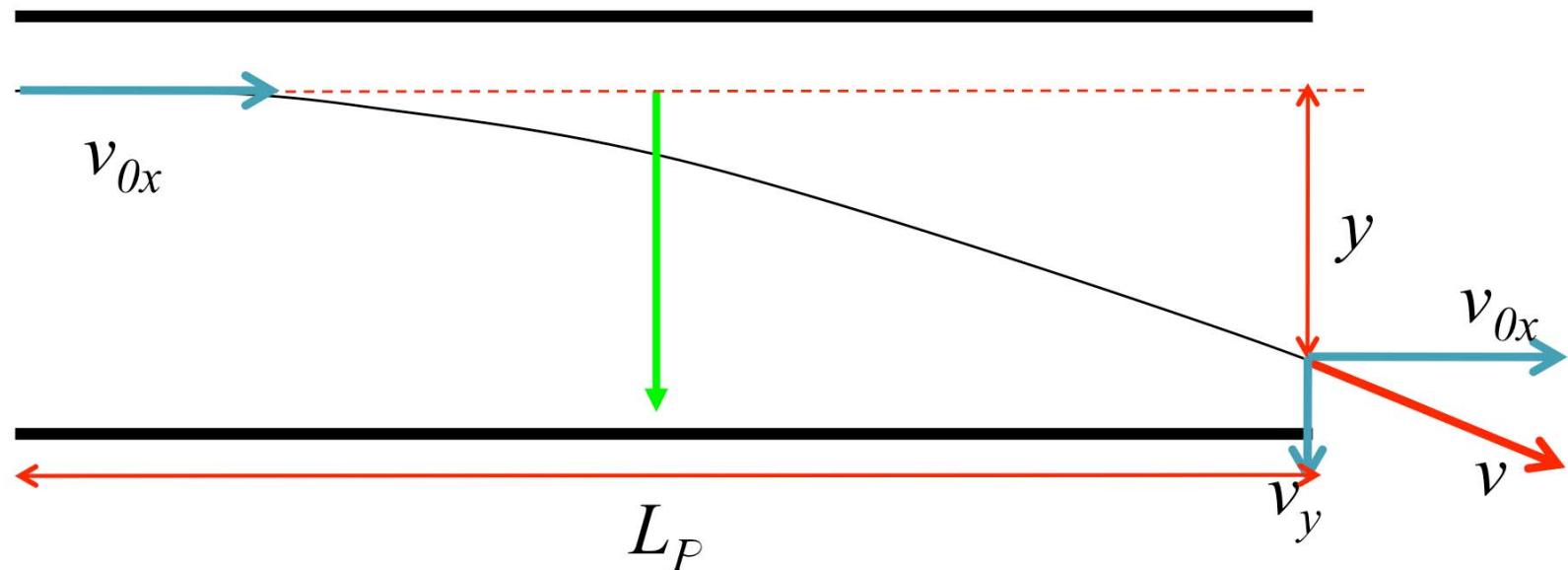
$$v_y = v_{0y} + a_y t \Rightarrow v_y = \frac{qE}{m} t \Rightarrow v_y = \frac{qEL_P}{mv_{0x}}$$



Movimento de uma partícula em um campo uniforme

- Movimento uniformemente variado em y

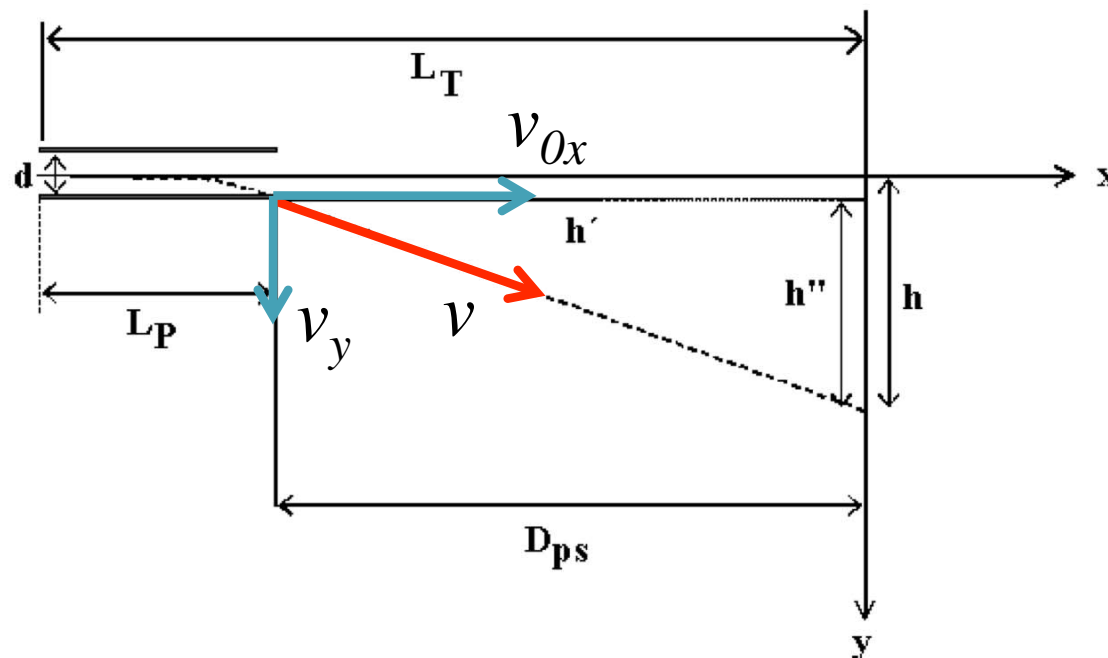
$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \Rightarrow y = \frac{qE}{2m} \left(\frac{L_P}{v_{0x}} \right)^2$$



Movimento de uma partícula em um campo uniforme

- Após as placas voltamos a ter movimento uniforme

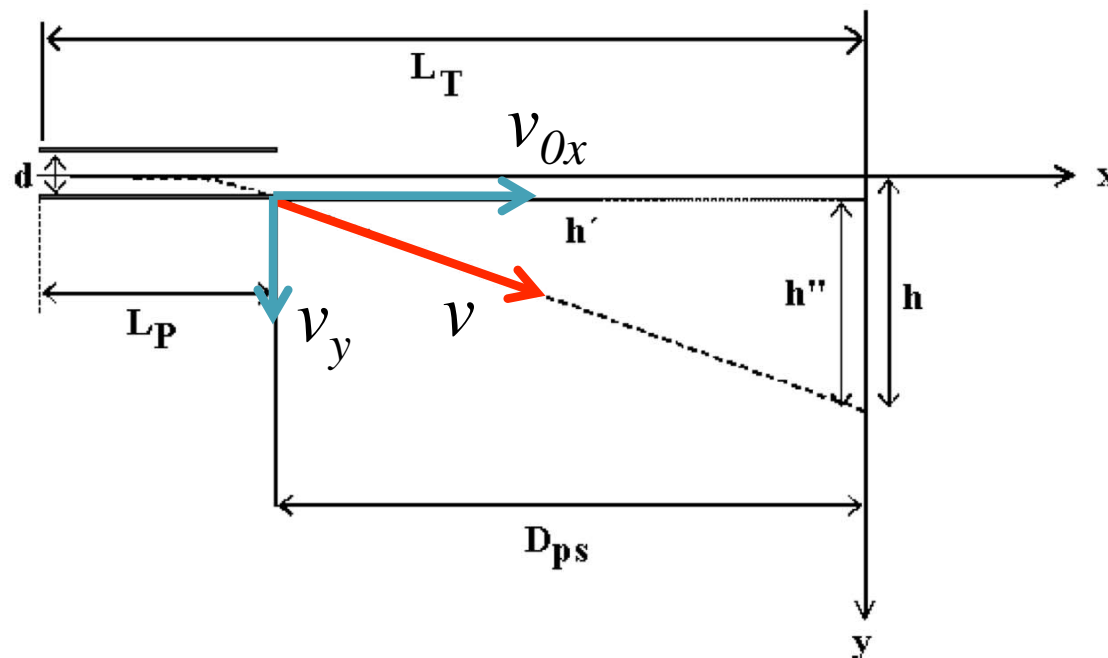
$$t = \frac{D_{PS}}{v_{0x}} \quad h'' = v_y t = \frac{qE}{m} \frac{L_P D_{PS}}{v_{0x}^2}$$



Movimento de uma partícula em um campo uniforme

- O deslocamento total é a soma dos dois deslocamentos

$$h = y + h'' = \frac{qE}{2m} \left(\frac{L_P}{v_{0x}} \right)^2 + \frac{qE}{m} \frac{L_P D_{PS}}{v_{0x}^2} = \frac{qEL_P}{mv_{0x}^2} \left(\frac{L_P}{2} + D_{PS} \right)$$



Movimento de uma partícula em um campo uniforme

- O deslocamento total é a soma dos dois deslocamentos

$$h = \frac{qEL_P}{mv_{0x}^2} \left(\frac{L_P}{2} + D_{PS} \right)$$

- Ou seja:

$$h = A \frac{E}{v_{0x}^2}$$

h é proporcional ao campo elétrico e inversamente proporcional ao quadrado da velocidade

Movimento de uma partícula em um campo uniforme

- Em um capacitor ideal, o campo vale: $E = V_P/d$
- A velocidade do elétron depende da tensão de aceleração através de:

$$E_{cin} = qV_{AC} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_{0x}^2 = qV_{AC}$$

- *Ou seja:*

$$h = A \frac{E}{v_{0x}^2} = A' \frac{V_P}{V_{AC}}$$

h é proporcional à tensão entre as placas e inversamente proporcional à tensão de aceleração dos elétrons

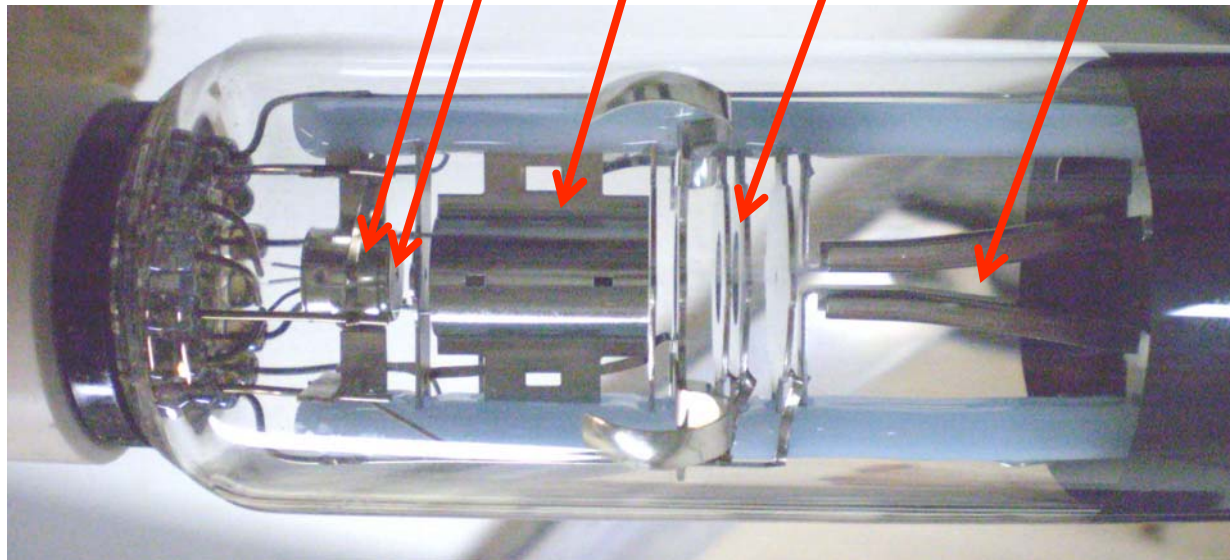
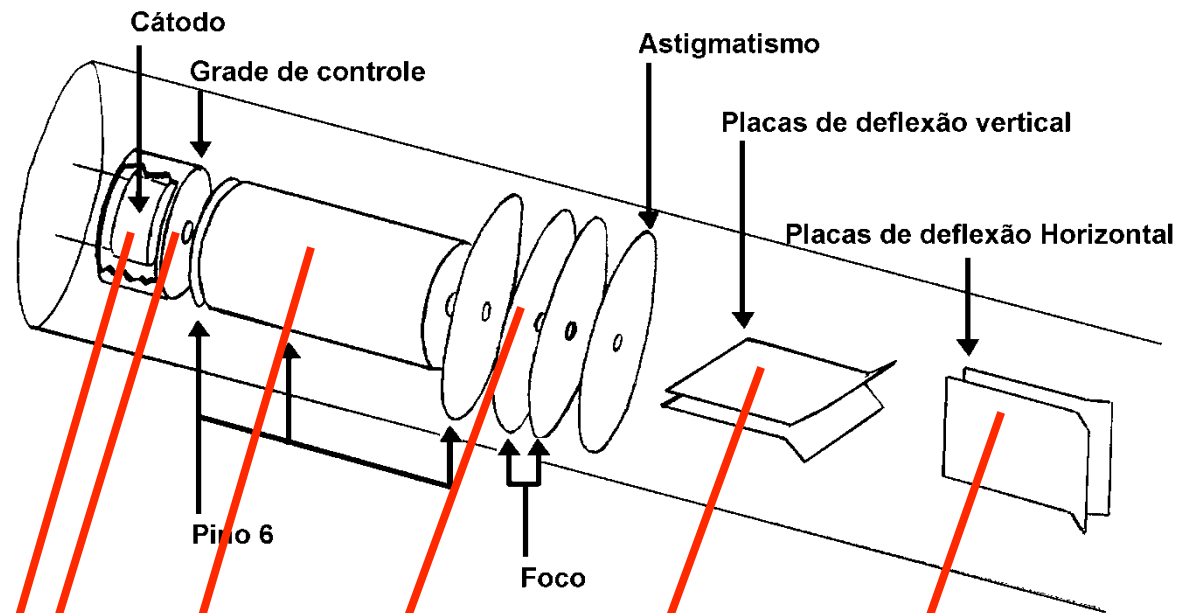
Movimento de uma partícula em um campo uniforme

- Em uma situação com um sistema ideal, temos:

$$h = A' \frac{V_P}{V_{AC}}$$

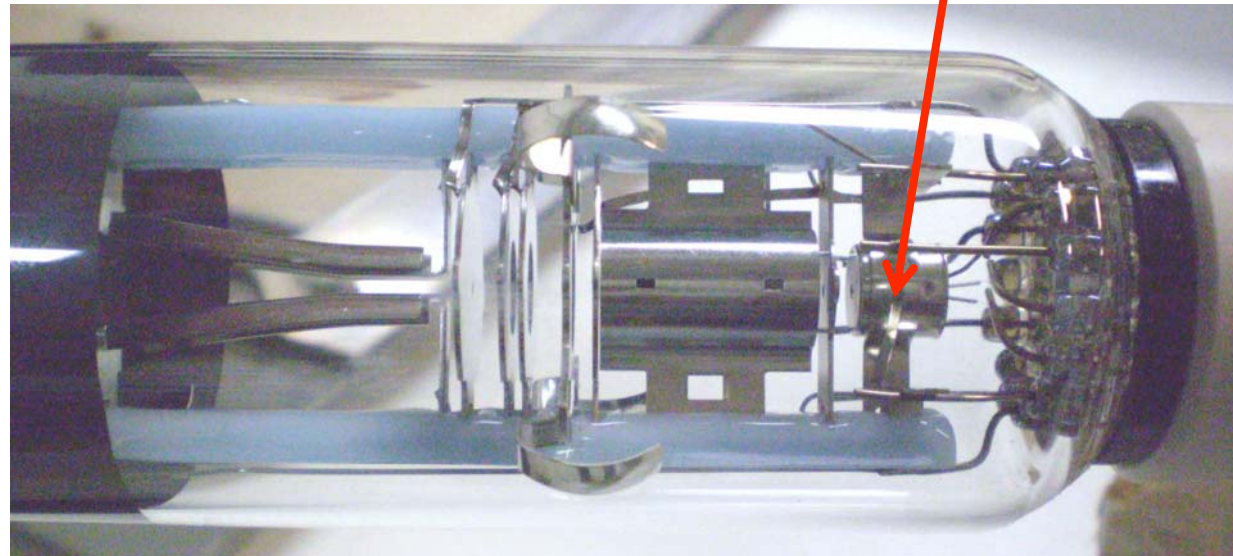
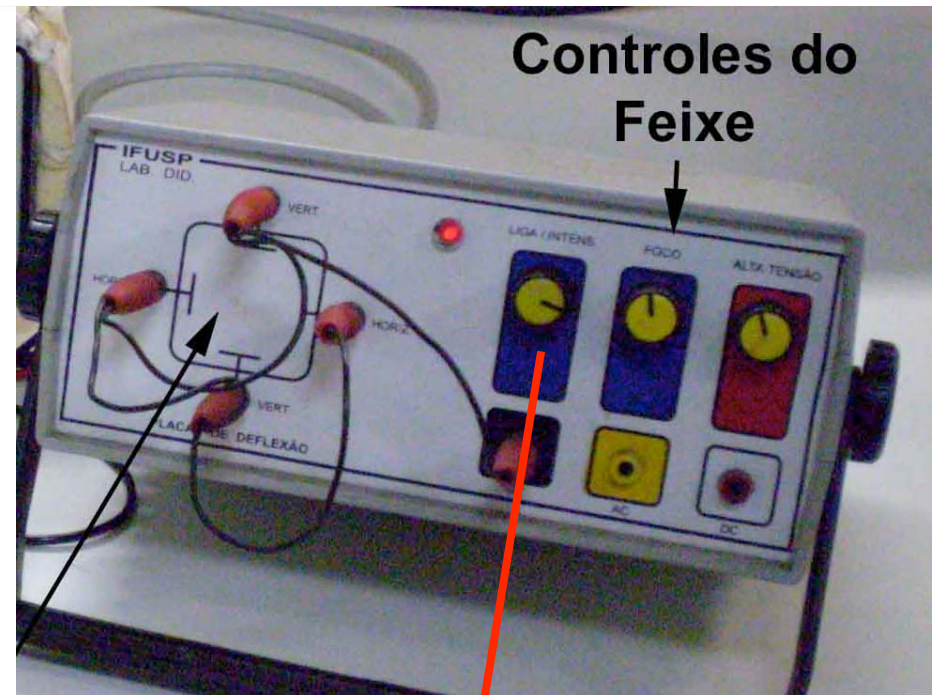
- O deslocamento é proporcional à tensão entre as placas e inversamente proporcional à tensão de aceleração dos elétrons
- Será que esta hipótese é verdadeira? Será que podemos simplificar o problema de campo não uniforme para um problema ideal?

O TRC



O TRC

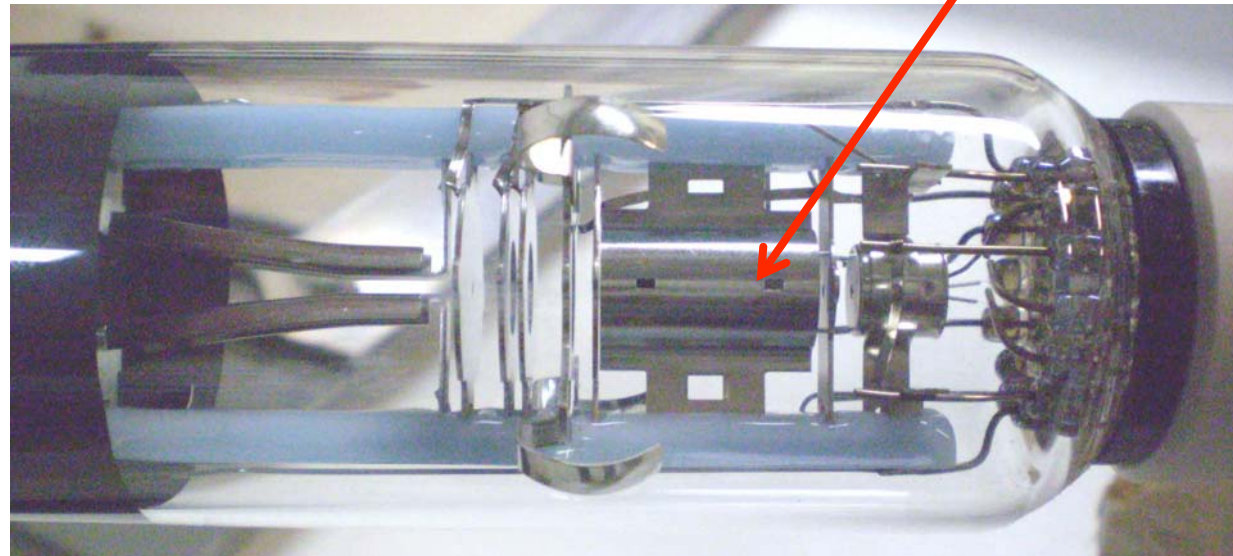
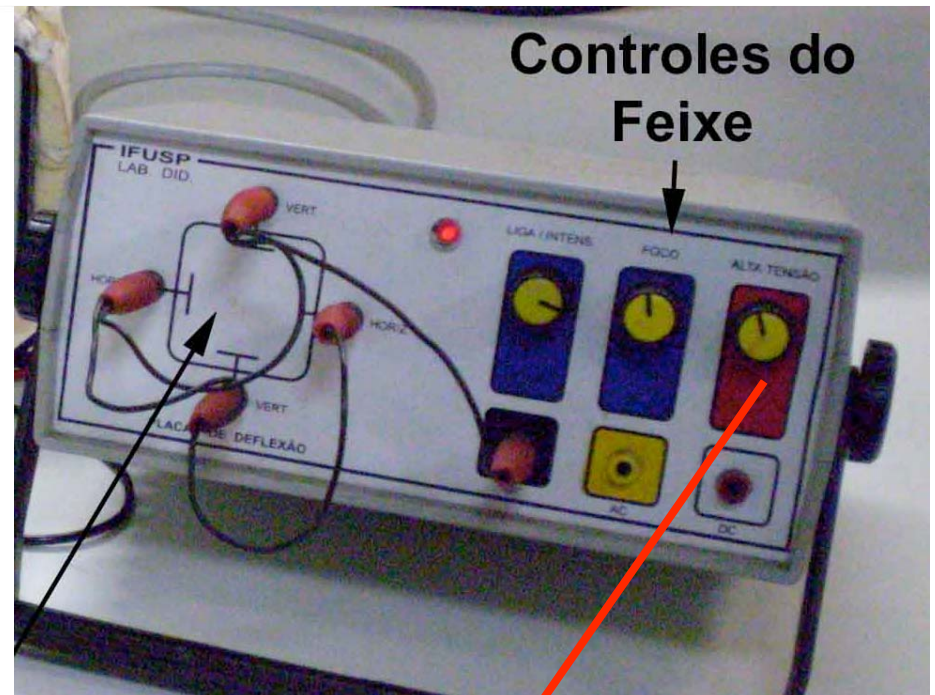
- Liga TRC
- Controla intensidade do feixe



O TRC

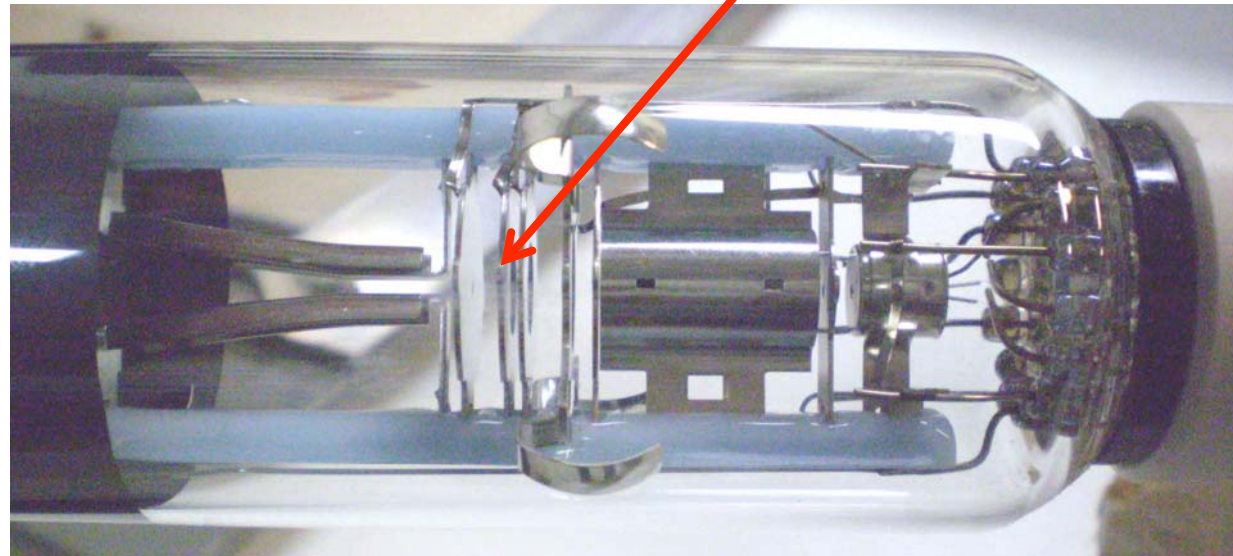
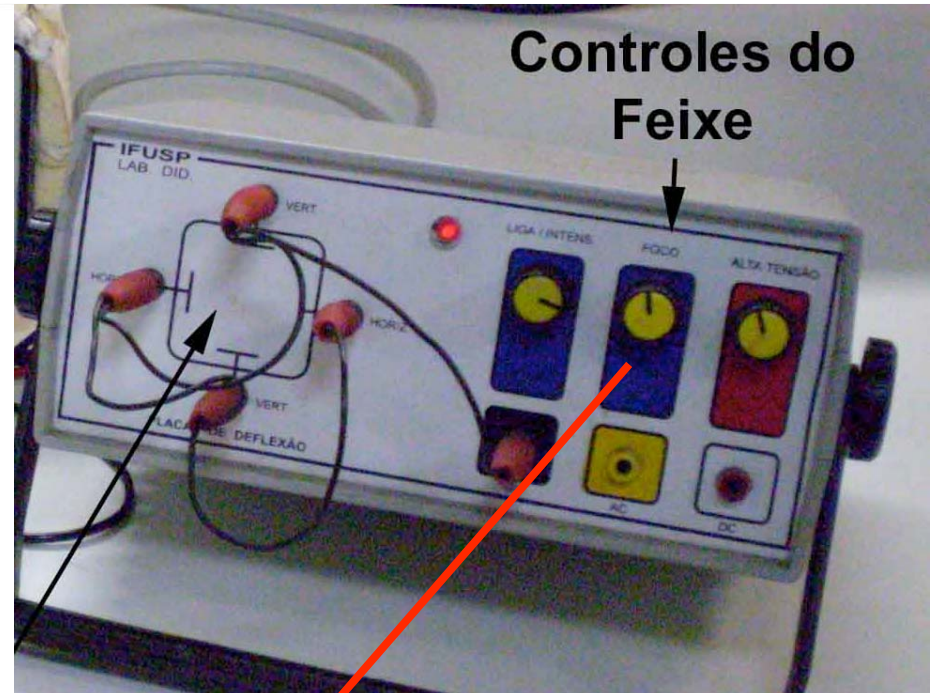
- Alta tensão (até 1200 V)
- Acelera feixe

- $E_{cin} = qV$



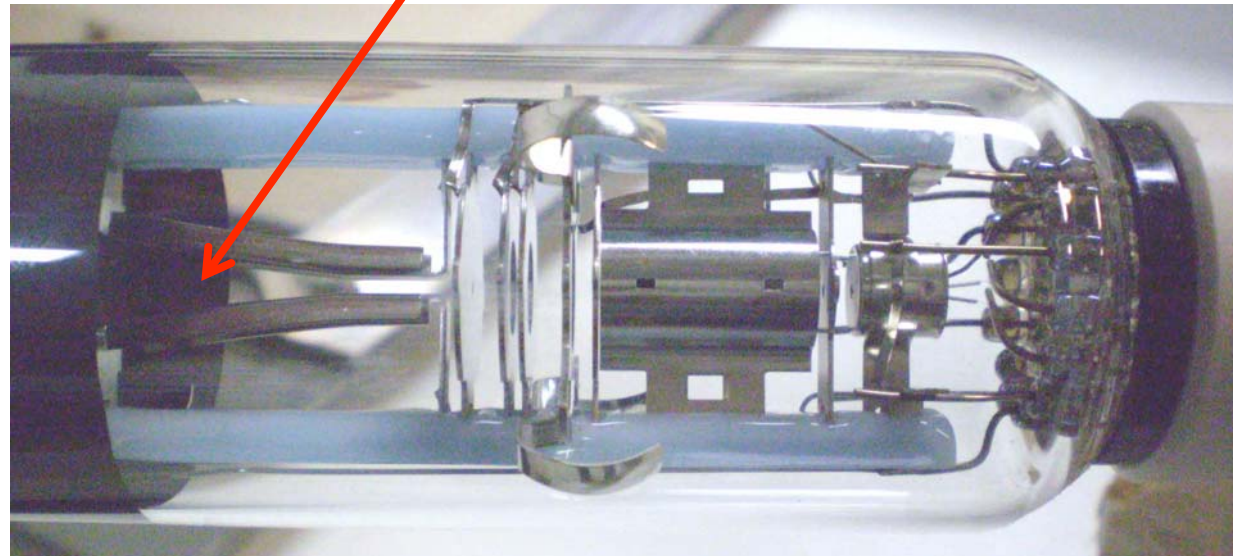
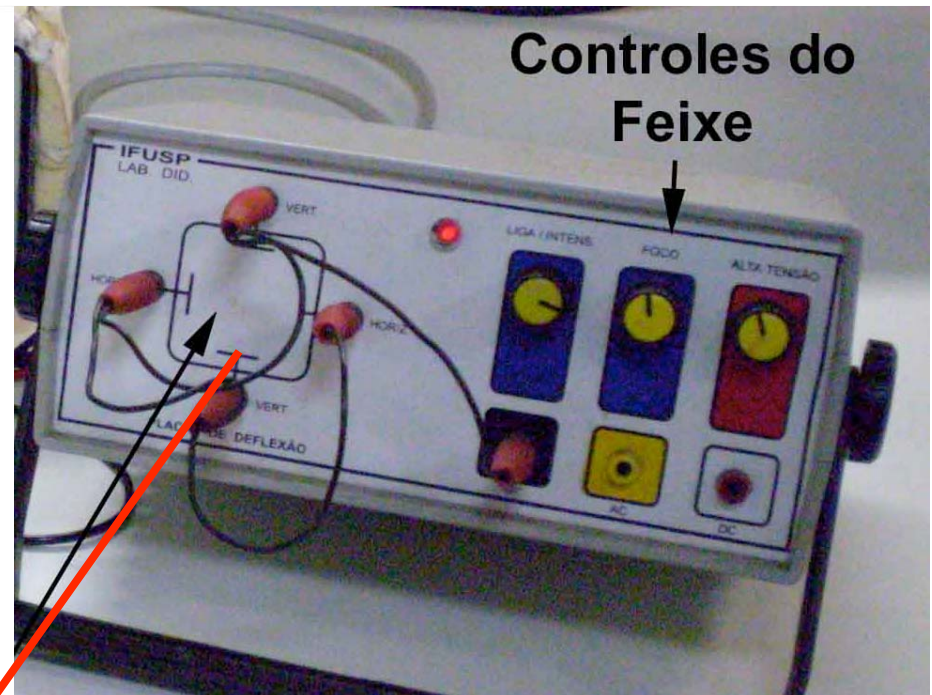
O TRC

- Sistema de focalização
 - *Lentes eletrostáticas*



O TRC

- Controle das tensões nas placas
 - *Horizontais e verticais*
 - *Fonte externa*

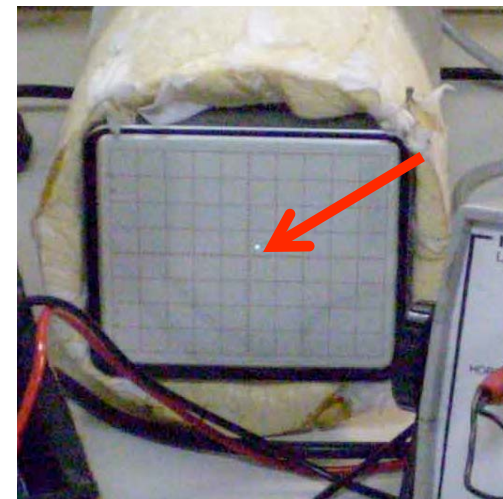
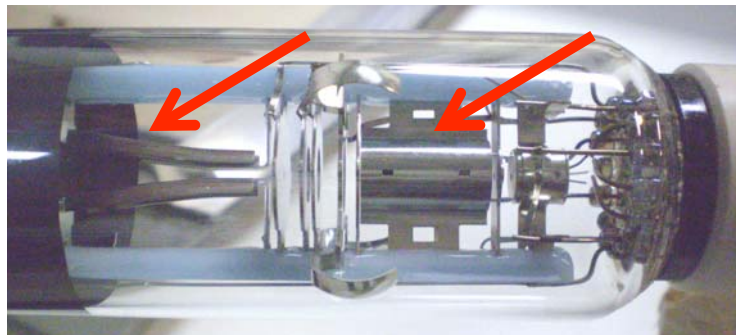


Medidas que podemos efetuar

- Quais as grandezas que temos controle e que podemos medir?
 - Tensão de aceleração dos elétrons
 - Ou velocidade, facilmente calculada
 - Tensão entre as placas
 - Proporcional ao campo elétrico aplicado
- Quais as grandezas que podemos apenas medir?
 - Posição do feixe de elétrons na tela do TRC

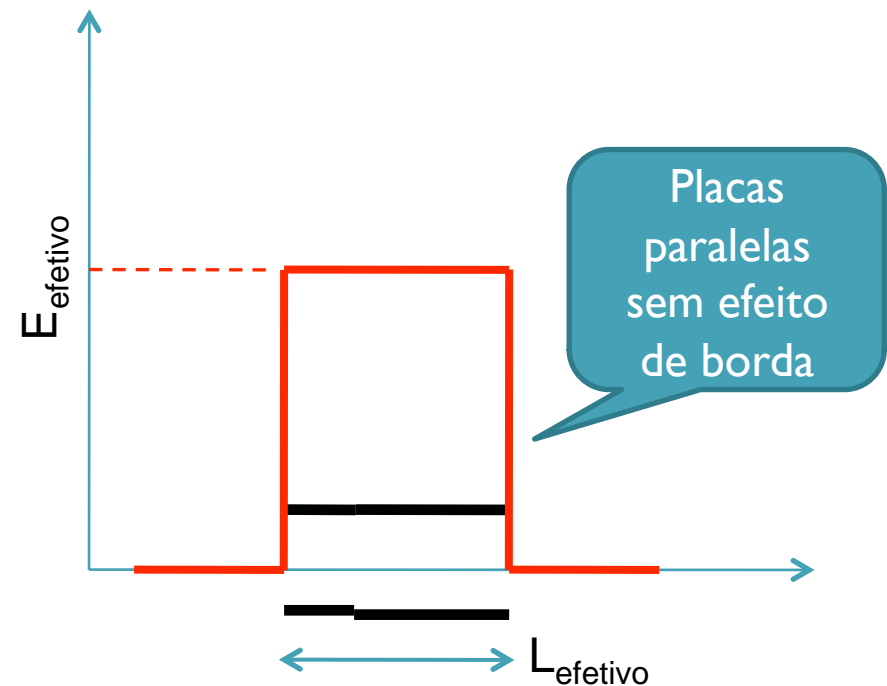
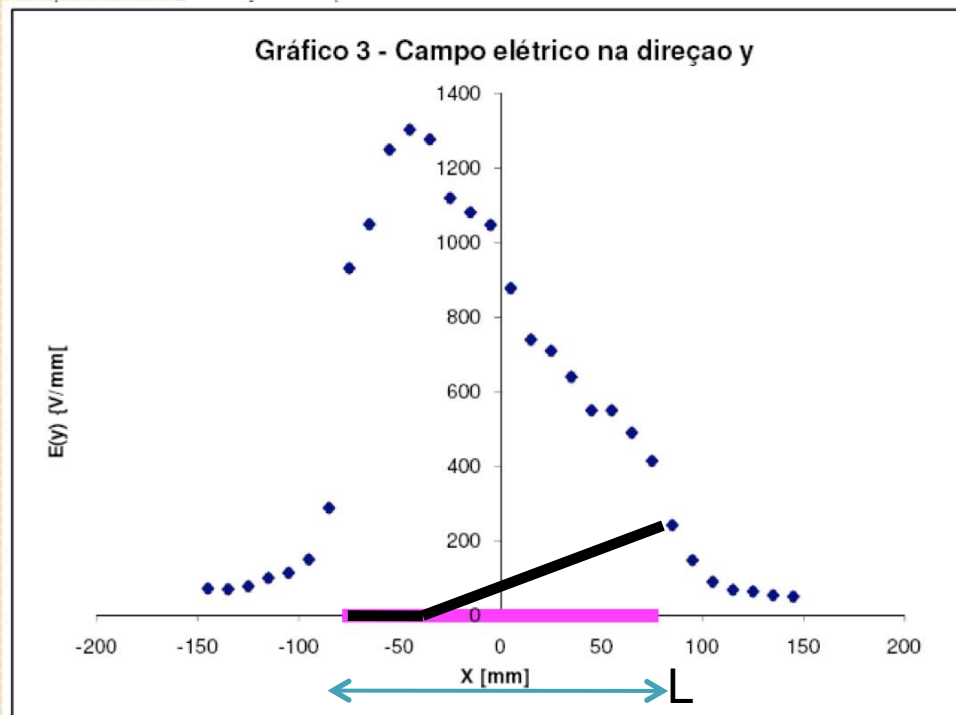
Objetivos

- Estudar como a deflexão (H , deslocamento do feixe) depende da tensão entre as placas (V_P) e da tensão de aceleração (V_{AC})
 - Fazer gráfico de H em função de V_P para V_{AC} fixo
 - Fazer gráfico de H em função de V_{AC} para V_P fixo
 - Tomar cuidado de escolher a variável fixa de modo a poder aproveitar toda a tela do osciloscópio



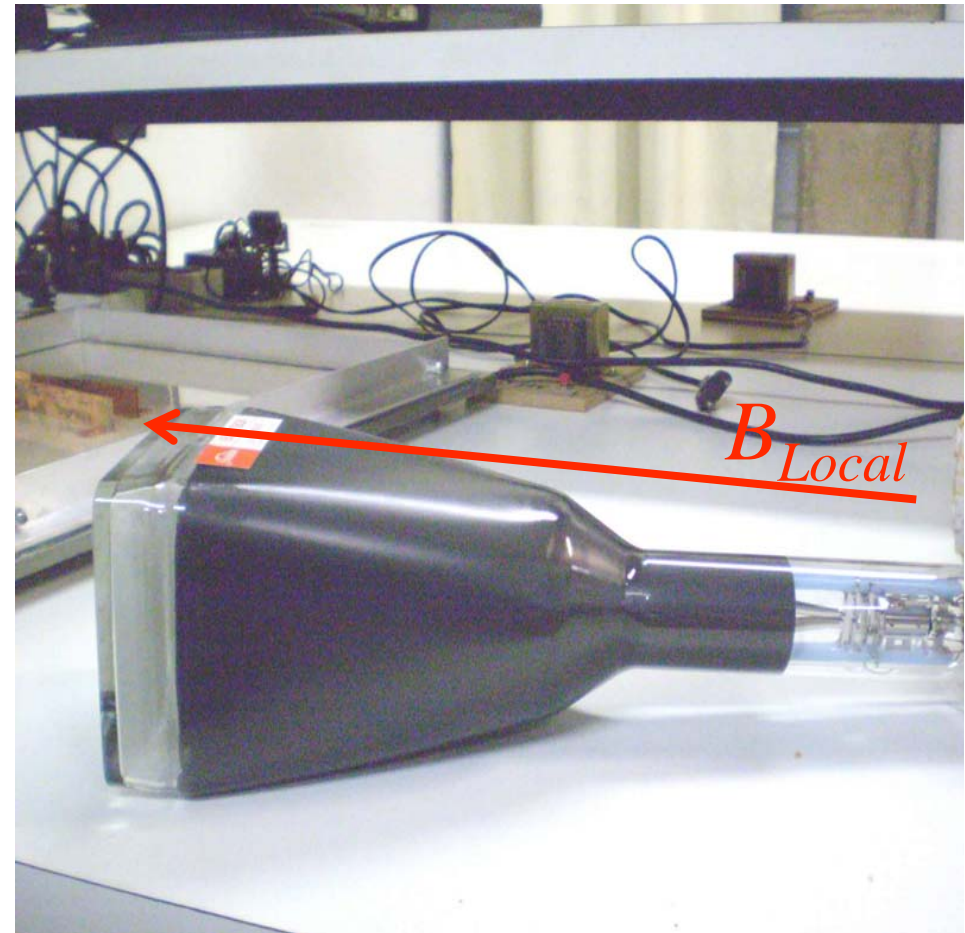
○ que gostaríamos de fazer com estes dados?

- Simplificar o problema
- Podemos transformar um problema de movimento complicado em algo simples?
 - A análise dos dados desta aula pode responder esta pergunta. Como?
 - Podemos descrever as nossas placas por um capacitor ideal?
 - Qual seria o comprimento das placas e o campo elétrico efetivo? Pensem a respeito...



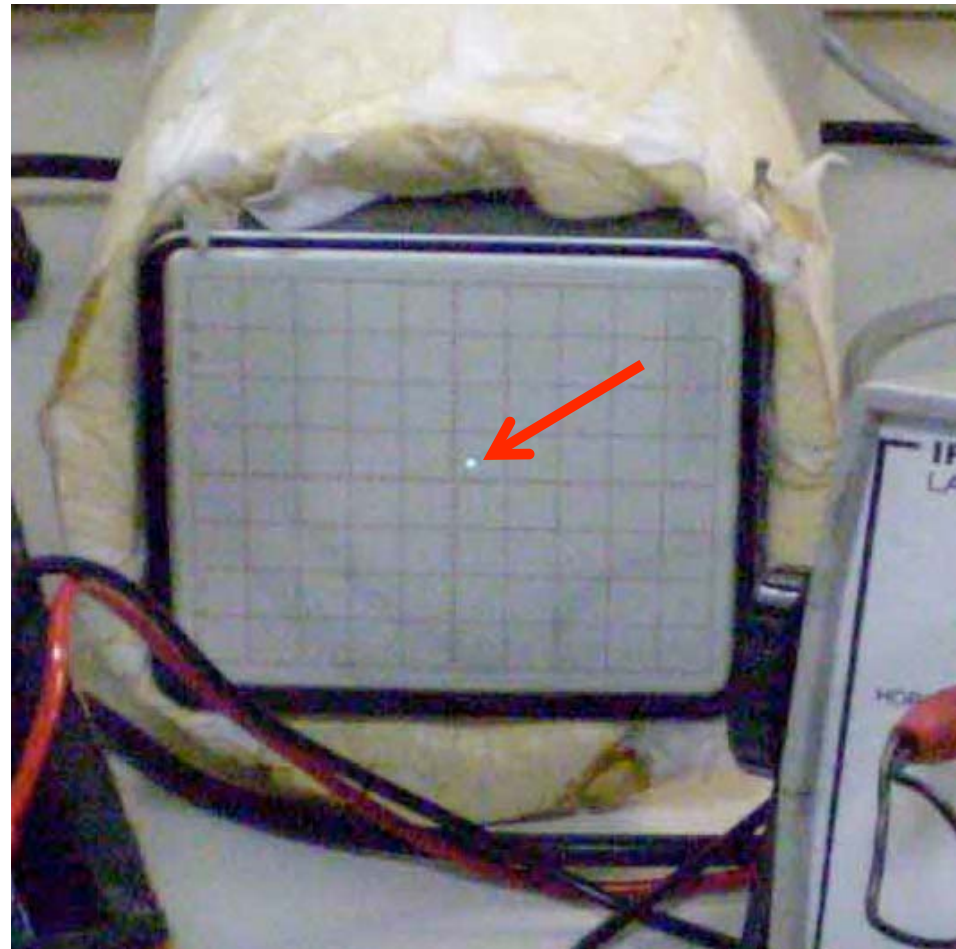
Um pouco do procedimento

- Cuidado I
 - O campo magnético local atua no feixe (Força magnética)
 - Devemos alinhar o TRC com o campo local (usar bússola)



Um pouco do procedimento

- Cuidado II
 - Ligar o TRC com ZERO volts entre as placas
 - Focalizar bem o feixe e definir a origem
 - **Todas medidas em relação a este ponto**



Atividades

- Fazer simulação das equipotenciais e do campo em função de x e **comparar** com os dados experimentais.
 - Planilha (Excel) exemplo no site do curso
 - Ou pode usar QField ou FEMM

- Fazer as medidas do TRC e entregar:
 - Gráfico de H em função de V_P para V_{AC} fixo
 - Gráfico de H em função de V_{AC} para V_P fixo
 - Instruções de como montar o aparato experimental estão no site do curso
 - Escolha a grandeza fixa de tal modo a aproveitar bem a tela
 - O nosso modelo ideal é compatível com os dados? Discuta
 - Se for compatível obtenha, experimentalmente, o valor da constante A' .