

Campos Elétricos Estáticos

Introdução

Muitas vezes é necessário para o projeto de determinados equipamentos, em particular, aqueles sensíveis a partículas carregadas, o conhecimento da geometria do campo elétrico estático em seu interior. Isso determina as características de funcionamento do equipamento. Para algumas geometrias, campos elétricos estáticos podem ser calculados analiticamente, na grande maioria dos casos, porém, o cálculo tem que ser iterativo.

Entretanto, existe um método que permite mapear as linhas de campo e as equipotenciais sem a necessidade de se fazer qualquer tipo de cálculo.

Antes de discutir esse método, é preciso ter em mente as definições de linhas de campo e equipotenciais. Sugerimos a leitura dos **capítulos 3 e 4 de Eletromagnetismo - Curso de Física Básica - H. Moysés Nussenzveig.**

Para resumir as informações nas referências dadas acima, as superfícies equipotenciais são aquelas nas quais o potencial V é constante. Conforme a definição de potencial, para um deslocamento qualquer $d\mathbf{r}$ na posição, a variação dV no potencial é dada por:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -E dr \cos \theta \quad (3.1)$$

nessa equação θ é o ângulo entre o vetor campo elétrico \mathbf{E} e o vetor deslocamento $d\mathbf{r}$ na posição. Assim, a máxima variação dV no potencial ocorre quando $d\mathbf{r}$ e \mathbf{E} são paralelos. Quando $d\mathbf{r}$ e \mathbf{E} são

perpendiculares entre si, $d\mathbf{V}=\mathbf{0}$, que significa que \mathbf{E} é perpendicular às superfícies equipotenciais.

Se \mathbf{u} é um versor perpendicular à equipotencial e s é a coordenada na direção do sentido de \mathbf{u} :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \text{ou} \quad \vec{E} = -\left(\frac{dV}{ds}\right)\vec{u} \quad (3.2)$$

Isso quer dizer que se o potencial elétrico, V , for completamente conhecido numa certa região do espaço, o campo elétrico, \mathbf{E} , pode ser completamente determinado nessa região. Se conseguirmos uma forma de determinar experimentalmente o potencial elétrico numa região, o campo elétrico pode ser obtido a partir da **equação 3.2**, por meio de um tratamento matemático conveniente. Quando são conhecidas duas equipotenciais próximas, separadas por uma distância Δs , o módulo do campo pode ser obtido, em primeira aproximação, por:

$$E \cong -\left(\frac{\Delta V}{\Delta s}\right) \quad (3.3)$$

com direção e sentido dados pelo versor \mathbf{u} definido acima.

A **figura 3.1** a seguir ilustra as linhas equipotenciais e o campo elétrico \mathbf{E} , assim como, o cálculo feito para \mathbf{E} , no ponto \mathbf{P} , em primeira aproximação, através da **equação 3.3**, uma vez conhecidas as linhas equipotenciais e seus valores.

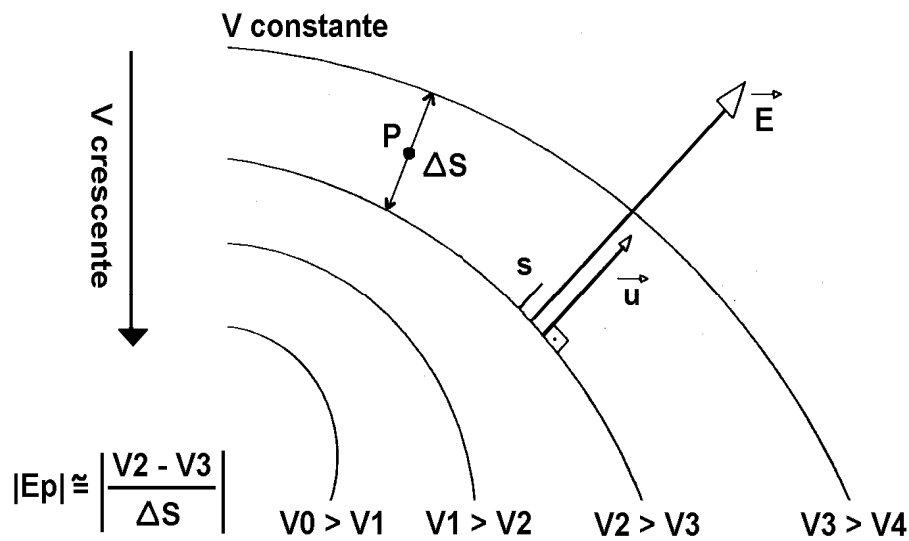


Figura 3.1: Superfícies equipotenciais, campo elétrico e indicações de ΔV e Δs para o cálculo do campo elétrico, em primeira aproximação, no ponto P.

O que se pretende com esta experiência é realizar um mapeamento do potencial elétrico, numa certa região do espaço, por meio de técnica experimental, aplicável a qualquer configuração eletrostática bidimensional.

Um problema eletrostático é entendido como bidimensional se o potencial elétrico V não varia na direção do eixo z , mesmo que a configuração de cargas e/ou superfícies carregadas seja tridimensional. Isso significa que o campo elétrico dessa configuração não terá componente na direção do eixo z e basta realizar o mapeamento do potencial numa seção transversal xy dessa configuração, para determinar os componentes do campo E nessa seção. Todas as outras seções serão análogas.

Um exemplo de uma configuração desse tipo é um condutor cilíndrico carregado, de comprimento infinito, as superfícies equipotenciais geradas não variam ao longo do eixo do cilindro e o campo elétrico correspondente não tem componente ao longo desse

eixo. Nesse caso as superfícies equipotenciais seriam superfícies cilíndricas que podem ser representadas por curvas na seção transversal do cilindro.

Para se proceder a esse mapeamento o que tem que ser feito é resolver a **equação de Laplace**, seja analiticamente, seja iterativamente, seja por meios experimentais.

Equação de Laplace

Teoricamente o potencial V pode ser obtido resolvendo-se a **equação de Poisson** (veja a **seção 4.6** do **capítulo 4** do livro **Eletromagnetismo - Curso de Física Básica - H. Moysés Nussenzveig**). Na ausência de cargas livres a **equação de Poisson** se reduz à **equação de Laplace**:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (3.4)$$

Essa equação é resolvida (quando ela pode ser resolvida analiticamente) no sistema de coordenadas mais conveniente. Por exemplo, se o problema a ser resolvido tem simetria cilíndrica, a **equação de Laplace** deve ser escrita em coordenadas cilíndricas, que será um dos casos que vamos estudar:

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (3.5)$$

Para encontrar a distribuição de potencial, essa equação deve ser resolvida para e obtida uma solução para V que satisfaça às condições de contorno do problema. Uma das condições é que o campo elétrico dentro dos eletrodos metálicos seja nulo ou que o potencial dentro dos eletrodos metálicos seja constante.

Vamos estudar, como exemplo, o caso de uma casca cilíndrica metálica de raio b , coaxial com um cilindro metálico de raio a . A diferença de potencial entre os dois condutores é $V_0 = V_a - V_b$ e os condutores tem comprimento infinito. A seção reta dessa configuração é apresentada na **figura 3.2** a seguir.

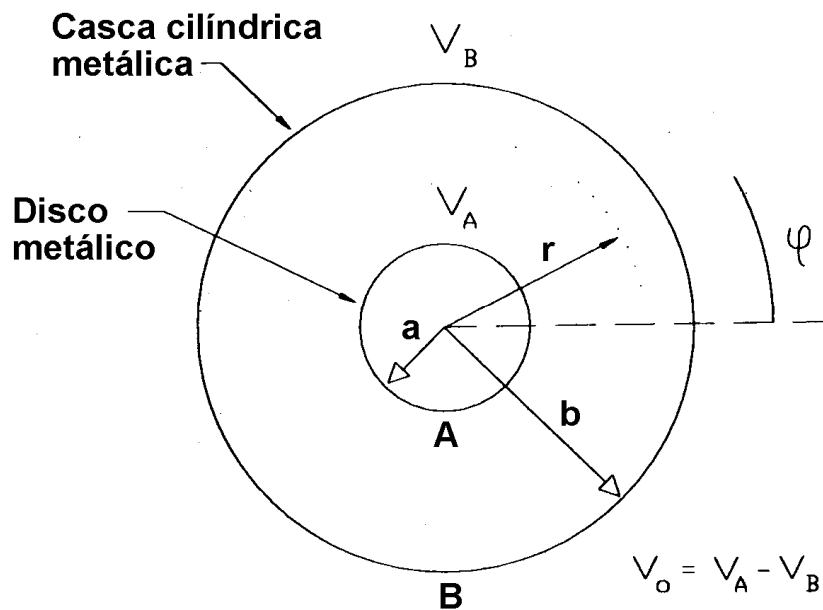


Figura 3.2: Casca cilíndrica metálica e eletrodo central de seção circular.

Em razão da simetria desse problema tanto em φ , como em z , a **equação 3.5** pode ser facilmente resolvida para se obter a função V que satisfaz às condições de contorno do problema. O cilindro coaxial é uma das configurações propostas para serem estudadas na parte experimental, então, a solução desse problema, com as condições de contorno da montagem experimental, deve constar do relatório desta experiência. A solução será da forma:

$$V = A \ln r + B \quad (3.6)$$

em que as constantes A e B dependem das condições de contorno do problema, isto é, dos potenciais dos condutores externo e interno e de seus respectivos raios.

Vamos agora observar uma configuração cilíndrica cujo condutor interno não é coaxial com o condutor externo. É a configuração mostrada na **figura 3.3** a seguir.

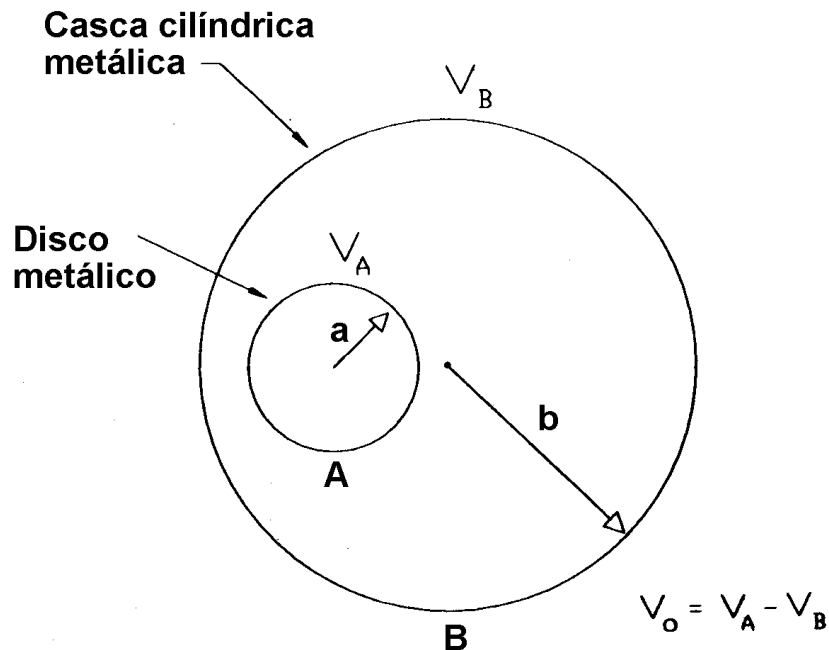


Figura 3.3: Casca metálica cilíndrica e condutor metálico interno extrínseco.

No caso apresentado acima, a solução analítica é bastante mais complicada porque não existe simetria em ϕ . O problema poderia ser resolvido por métodos numéricos ou por simulação experimental.

Tanto a simulação experimental, quanto o método numérico, estão à disposição do aluno na sala de aula. O método numérico está pronto, trata-se do programa **Quick Field**, que calcula as equipotenciais e as linhas de campo para várias configurações. Daqui para frente, vamos nos referir a esse programa como **Qfield**, mais

adiante estão as explicações necessárias para sua utilização. O método de simulação experimental será discutido a seguir. Mas, tanto um quanto outro, por técnicas diferentes, permitem a solução da **equação de Laplace**.

A **equação de Laplace** descreve também outros fenômenos físicos, tais como escoamento de fluidos incompressíveis ou condução de calor. Isto significa que a solução da **equação de Laplace** para tais situações pode ser obtida por meio de simulação elétrica para o problema. Por exemplo, a condução de calor, em regime estacionário, é tal que a temperatura **T** satisfaz a equação ($\nabla^2 T = 0$). Se dois cilindros tais como os da **figura 3.3** estão a temperaturas constantes **T_A** e **T_B**, a distribuição de temperaturas pode ser obtida fazendo-se uma simulação elétrica, com um arranjo semelhante de eletrodos.

Mapeamento Experimental

Para proceder ao mapeamento experimental das equipotenciais, além de satisfazer as condições discutidas na seção anterior, quanto à geometria do problema, outras dificuldades devem ser contornadas. Em princípio, dever-se-ia ter os eletrodos metálicos da geometria desejada, carregá-los e medir diferenças de potencial, entre um eletrodo de referência e pontos entre os eletrodos para determinar as equipotenciais.

Algumas dificuldades aparecem nesse caso, uma é que o potencial não pode ser medido no ar porque a ponta de prova altera completamente o potencial a ser determinado. Além de que seria perdida a simetria em z . A questão também pode ser analisada do ponto de vista da resistência interna do voltímetro. Um voltímetro só proporciona uma leitura confiável quando a resistência interna do aparelho for muito maior que a do objeto de medição. Basta fazer uma comparação da resistência interna de um voltímetro em relação à resistência de uma camada de ar de alguns centímetros, para verificar que a resistência interna do voltímetro é muitíssimo menor do que seria necessário.

Uma maneira de contornar esses problemas consiste em simular experimentalmente o mesmo potencial num meio material de baixa condutividade, mas cuja resistência elétrica entre os pontos envolvidos na medição seja muito menor que a resistência interna do voltímetro disponível. Só que, neste caso, o dispositivo não é mais eletrostático, porque flui corrente elétrica. Entretanto, pode ser demonstrado que esse dispositivo pode simular corretamente o problema eletrostático desde que algumas condições sejam obedecidas.

Suponhamos que entre os eletrodos metálicos exista um meio material de condutividade σ , baixa, em relação à condutividade do metal dos eletrodos, e , que obedeça à lei de Ohm. Se aplicarmos uma diferença de potencial entre os eletrodos, deve fluir uma corrente pelo meio. A densidade de corrente, \mathbf{j} , no meio é dada por (lei de Ohm):

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \text{com } \sigma \text{ constante} \quad (3.7)$$

sendo \mathbf{E} o campo elétrico no meio.

No eletrodo metálico, vale a mesma relação. Próximo à superfície que separa os dois meios, a densidade de corrente \mathbf{j} é a mesma em regime estacionário. Portanto, como a condutividade do metal do eletrodo é muito maior que a condutividade do meio, o campo no interior do eletrodo é muito menor que o campo no meio (para manter \mathbf{j} constante).

Em resumo, desde que a condutividade do meio material seja muito menor que a do eletrodo metálico, que esse meio obedeça à lei de Ohm e que as correntes estejam em regime estacionário, o campo elétrico dentro dos eletrodos metálicos pode ser desprezado e as condições de contorno são aproximadamente as mesmas que na ausência do meio material. Ou, que um problema de correntes estacionárias pode simular um problema eletrostático. Isso é mostrado com mais detalhes no livro **Foundations of Electromagnetic Theory** de J. R. Reitz e F. J. Milford **seção 7.6, página 136**.

Na prática, há vários métodos para se obter um meio condutor entre os eletrodos, tais como solução eletrolítica numa cuba, papel condutor ou rede de resistores. Nesta experiência, foi escolhida uma cuba eletrolítica, tal como os outros métodos mencionados, o método da cuba tem várias vantagens e alguns problemas.

A maior vantagem da cuba é que o método é simples, de baixo custo e versátil. A cuba eletrolítica que vamos utilizar é um recipiente, quadrado, raso, com fundo isolante, de vidro, no qual foram coladas as paredes laterais feitas com perfil “L” de alumínio. O meio escolhido é água de torneira e esse meio é chamado de eletrólito. Os sais da água comum são suficientes para garantir uma condutividade tal que as condições discutidas acima sejam satisfeitas, permitindo que se chegue a bons resultados, além das vantagens do custo e simplicidade de obtenção.

Entretanto, um dos problemas da cuba eletrolítica é a polarização dos eletrodos. Na cuba eletrolítica, os íons positivos da solução se dirigem para o eletrodo negativo e os íons negativos se dirigem para o eletrodo positivo. Só que, à medida que o processo se desenvolve, começa a aumentar a densidade de carga espacial positiva perto do eletrodo negativo, de maneira que os íons positivos que vêm a seguir são desacelerados pelo potencial que representa essas cargas. Essa densidade de carga é dinâmica, quer dizer, as cargas estão se movendo em direção ao eletrodo, mas formam uma nuvem cada vez mais densa à medida que se aproximam dele. O mesmo acontece com os íons negativos que se dirigem para o eletrodo positivo. A consequência disso é que à medida que aumenta a densidade de carga próxima aos eletrodos cai drasticamente a densidade de corrente. Nessas condições a cuba não serve mais para simular um campo eletrostático porque o regime de condução deixa de ser estacionário.

Uma maneira de se evitar a polarização dos eletrodos é agitar a solução. Evidentemente isso não se aplica ao caso desta experiência. Outra maneira é inverter periodicamente a tensão V_0 aplicada, com uma frequência de **500Hz** ou maior. Na experiência que vamos realizar a tensão de que dispomos é a da rede elétrica, cuja frequência é de **60Hz**. Embora essa frequência não elimine completamente a polarização dos eletrodos, o fenômeno é bastante atenuado, pode-se verificar se é suficientemente atenuado ao se comparar dados experimentais com previsões teóricas.

Tubo de Raios Catódicos

O tubo de raios catódicos é um dispositivo que consiste de uma fonte de elétrons, uma lente eletrostática e dois sistemas de eletrodos que desviam o feixe de elétrons na vertical e na horizontal (placas defletoras). Todo o sistema está contido dentro de um recipiente de vidro selado e imerso em gás a baixa pressão. O feixe de elétrons gerado é acelerado e focalizado pela lente eletrostática e atinge uma parede do tubo (tela) que está pintada com uma tinta fosforescente, formando um ponto luminoso.

A posição do feixe na tela é controlada através da tensão que se aplica nas placas defletoras horizontais e verticais. E a deflexão sofrida é proporcional à tensão aplicada nas placas.

Esse tipo de tubo tem inúmeras aplicações práticas, entre elas osciloscópios, aparelhos de TV e monitores de computador. Na **figura 3.4** está esquematizado esse tubo que tem em seu interior a lente descrita na **figura 3.8**.

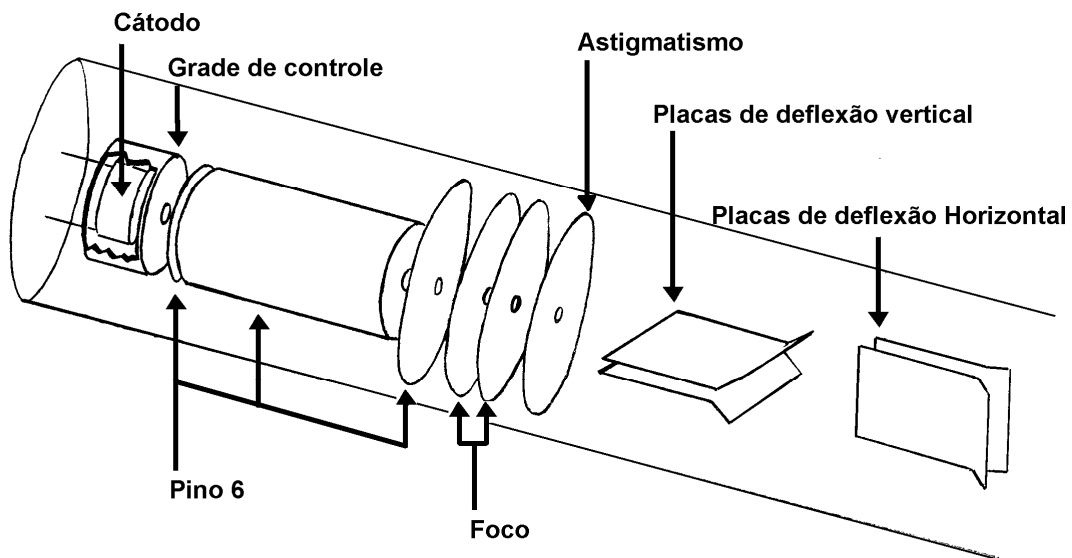


Figura 3.4: Tubo de raios catódicos.

Lente Eletrostática

Qualquer campo eletrostático ou eletromagnético é capaz de desviar o percurso de partículas carregadas que o atravessem.

Vamos estudar o caso de um feixe paralelo de partículas carregadas que atravessem um campo eletrostático. Se ele tiver uma configuração tal que desvie todas as partículas para um ponto focal comum, ele estará agindo como uma lente de ótica luminosa, **convergente**.

Na ótica luminosa, esse tipo de lente é chamado de **lente esférica** e tem a forma aproximadamente **bi-convexa**. O foco dessa lente é chamado de **foco real** porque ele representa o ponto por onde todo o feixe luminoso passa, efetivamente, depois de refratado. Existem outros tipos de lentes esféricas, um deles é a lente **bi-côncava**. As lentes **bi-côncavas** de vidro têm a propriedade de **divergir** o feixe luminoso incidente de tal forma que ele emerge da lente como se proviesse de um único ponto, do outro lado da lente. Esse foco é chamado de **foco virtual**. Veja a **figura 3.5** a seguir.

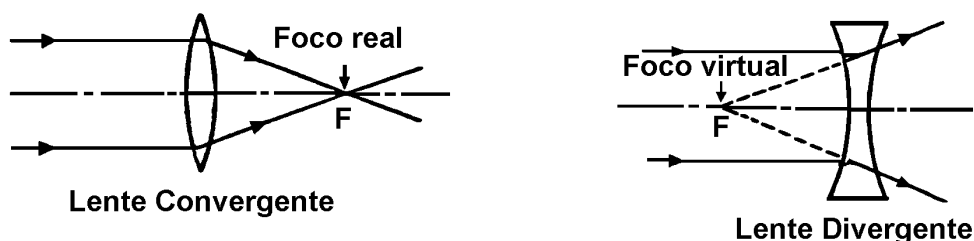


Figura 3.5: Lentes ópticas, convergente e divergente.

Um conjunto de eletrodos que crie um campo eletrostático que desvie um feixe paralelo para um foco é chamado de lente cilíndrica, pois as partes da lente que reproduzem esse tipo de comportamento são aproximadamente partes de um cilindro. Os nomes das lentes eletrostáticas são derivados da ótica luminosa, por simplicidade, mas deve-se ter em mente que os eletrodos que compõem as lentes eletrostáticas não têm a forma das lentes luminosas equivalentes.

No caso de lentes eletrostáticas a refração das partículas carregadas é descrita pelas equipotenciais. Em termos óticos equivale a substituir uma região de índice de refração variável por uma série de “lentes” com índices de refração de valores sucessivos. Conhecendo-se a distribuição das equipotenciais pode-se prever qual vai ser o comportamento de um feixe de partículas carregadas ao atravessar a lente eletrostática. Na **figura 3.6a**, a seguir, um feixe de elétrons procedente do ponto **O**, atravessa as equipotenciais **V₁**, **V₂**, **V₃**, **V₄** e **V₅**, convexas e é focalizado no ponto **F**. Na **figura 3.6b**, as equipotenciais **V₁**, **V₂**, **V₃** são côncavas e sua ação é fazer o feixe paralelo de elétrons divergir.

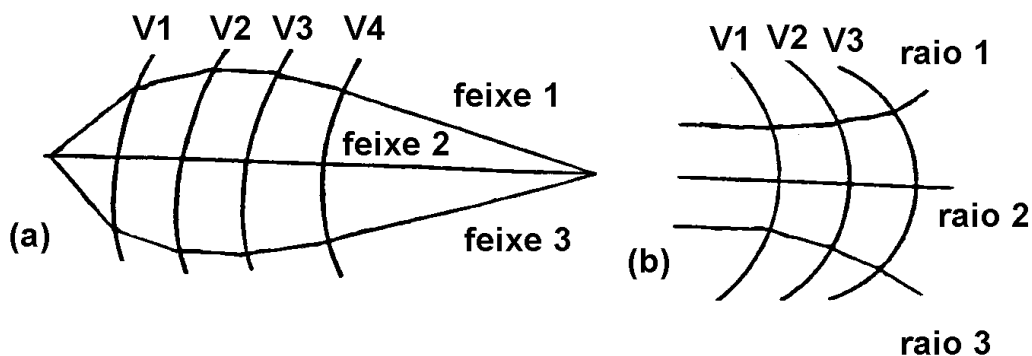


Figura 3.6: Equipotenciais de uma lente eletrostática convergente (a) e de uma lente eletrostática divergente (b).

O sistema eletrostático, mais simples, é formado por dois tubos coaxiais, com potenciais V_1 e V_2 . Veja na **figura 3.7** um esquema desse arranjo com os potenciais. A distribuição das linhas de campo e das equipotenciais é simétrica em relação ao plano central da lente. Uma partícula carregada que entre paralela ao plano, dependendo de sua carga e do valor de V_1 e V_2 , pode ser desviada e cruzar o eixo em **F**, como se vê na **figura 3.7** a seguir.

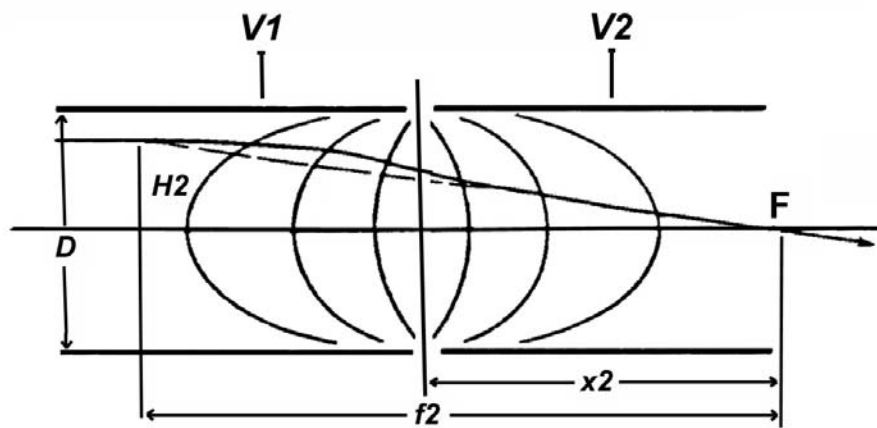


Figura 3.7: Desenho esquemático da lente cilíndrica e das equipotenciais.

Como com qualquer sistema de eletrodos, a distribuição de potenciais pode ser determinada através da **equação de Laplace**, com as condições de contorno apropriadas. Entretanto, na enorme maioria dos casos de interesse, esse cálculo deve ser feito por métodos numéricos, ou, a determinação das equipotenciais é realizada experimentalmente através de simulação experimental.

Um exemplo de uma lente cilíndrica composta de sete elementos, com potenciais V_1 , V_2 , V_3 , V_4 , V_5 , V_6 e V_7 , é mostrado na **figura 3.8** a seguir.

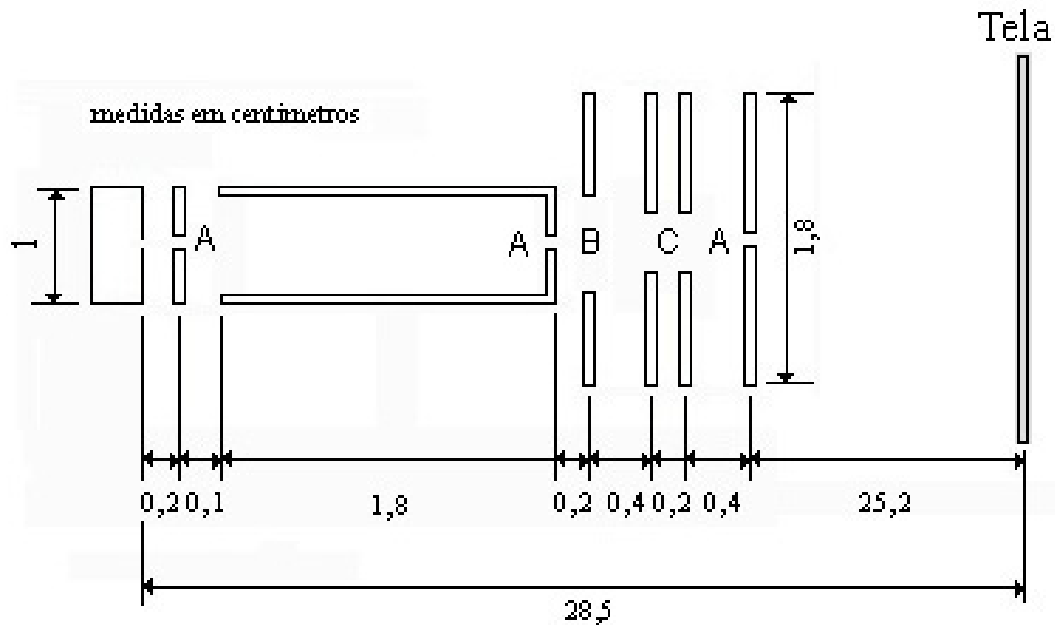


Figura 3.8: Lente cilíndrica, convergente, de 7 elementos. As medidas são em milímetros.

Essa lente é encontrada em tubos de raios catódicos, para focalização do feixe de elétrons. Além disso, o cálculo numérico da distribuição de potencial dessa lente cilíndrica pode ser feito através do programa **Qfield** ou do programa **Simion7**. O programa **Simion7** faz, também, a previsão da trajetória de um feixe de partículas carregadas que atravesse a lente, paralelamente ao seu eixo de simetria. Em parte desta experiência as partículas carregadas são elétrons. A carga do elétron é $1,602 \times 10^{-19} \text{C}$ e massa $9,11 \times 10^{-31} \text{Kg}$.

Para mais detalhes a respeito do funcionamento de lentes eletrostáticas e de sistemas de lentes veja os livros **Electron Optics** de O. Klemperer **capítulos 1 e 2**, e **Electrostatics Lenses**, de E. Harting e F. H. Read, **capítulo 1, seção 2, página 4**.

Placas Defletoras

Quando um feixe de partículas carregadas de carga q , atravessa uma região onde existe um campo elétrico, \mathbf{E} , perpendicular à trajetória das partículas, ele vai sofrer uma força \mathbf{F}_e igual a:

$$\vec{F}_e = e\vec{E} \quad (3.8)$$

Essa força é, portanto, proporcional à intensidade do campo elétrico e ao valor da carga da partícula e terá a direção do campo. Se a partícula for positiva, o sentido da força é o sentido do campo, se for negativa, o sentido da força é oposto ao sentido do campo. Uma força perpendicular à velocidade introduz uma aceleração, também perpendicular à velocidade, que tem o efeito de alterar a direção do movimento da partícula.

Vamos supor que seja criado um campo elétrico constante, perpendicular à trajetória de um feixe de partículas de carga q e velocidade, \mathbf{v} constante, que atue numa determinada região que o feixe vai atravessar. Um campo com essa geometria é o campo elétrico criado por um capacitor de placas paralelas.

Quanto mais tempo as partículas do feixe ficarem sob ação desse campo, durante mais tempo as forças vão atuar sobre elas, maior vai ser o desvio sofrido. Isso quer dizer que **as partículas serão tanto mais desviadas quanto menor for sua velocidade**, porque mais tempo levarão para atravessar a região do campo. E, as partículas positivas serão desviadas no sentido do campo elétrico e as negativas no sentido contrário ao do campo elétrico.

Vamos estudar como ocorre a deflexão elétrica e de que parâmetros ela depende. Vamos fazer uma tabela que relacione a cada velocidade v_{0x} do feixe uma tensão possível nas placas e a deflexão correspondente na tela.

As placas defletoras do **TRC** têm a geometria que é vista na **figura 3.9** a seguir. Essas placas configuram um capacitor, embora não sejam paralelas.

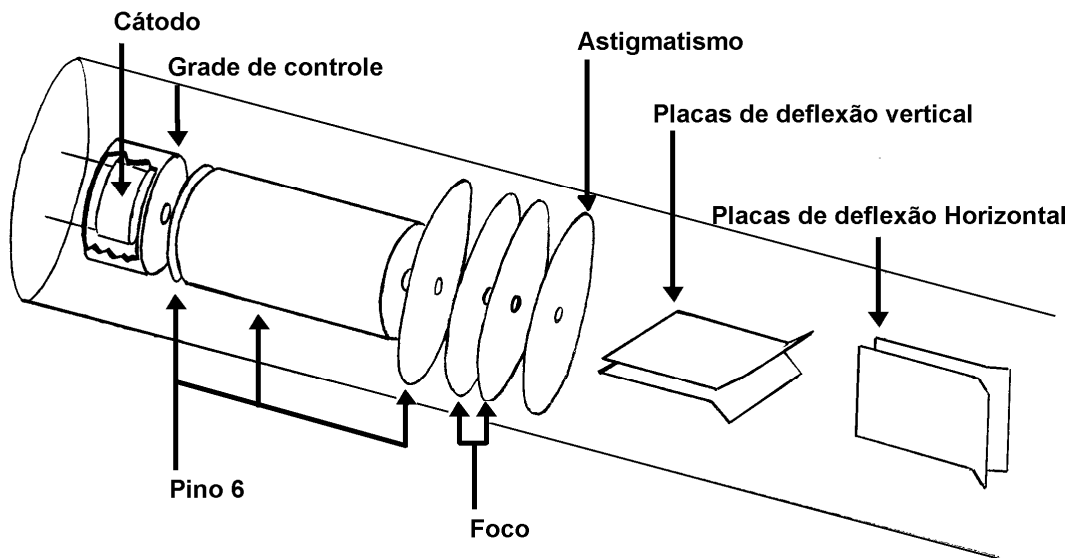


Figura 3.9: Esquema do TRC - notar a geometria das placas defletoras horizontal e vertical.

Vamos começar a estudar a deflexão de partículas carregadas que se desloquem no campo produzido por essas placas analisando um caso mais simples que é o caso das partículas carregadas atravessarem um capacitor de placas paralelas, como está na **figura 3.10**.

O campo elétrico \mathbf{E} de capacitor carregado com uma diferença de potencial V_p , desprezando os efeitos de borda, é:

$$|\vec{E}| = \frac{V_P}{d} \quad (3.9)$$

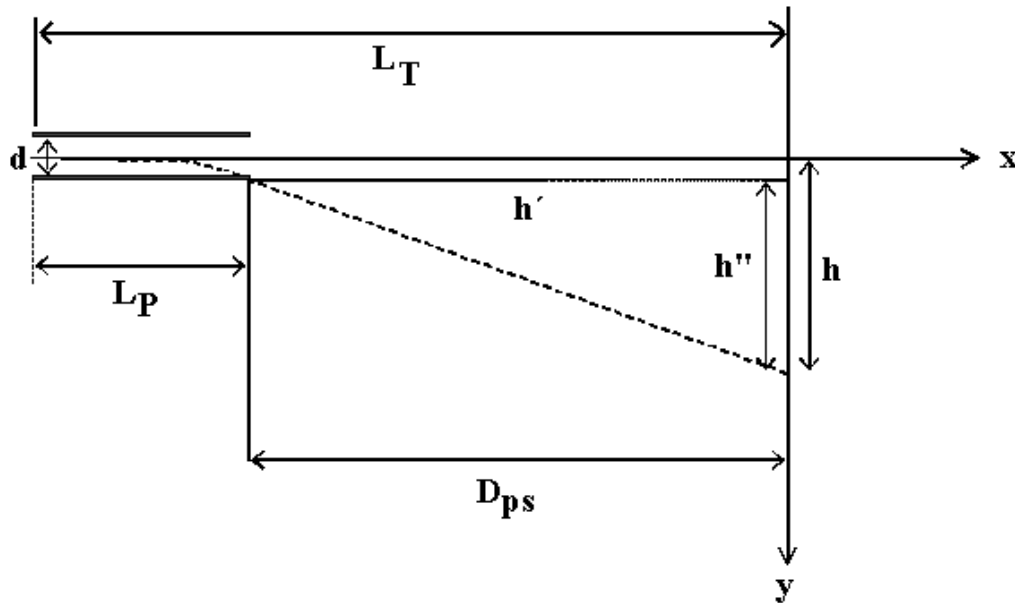


Figura 3.10: Esquema da trajetória do feixe de elétrons através do campo elétrico criado por um capacitor de placas paralelas.

Se \vec{E} é conhecido a aceleração, \mathbf{a}_y , na direção \mathbf{y} é dada por:

$$\vec{F} = m_e \vec{a}_y = e\vec{E} \quad (3.10)$$

Mas, $v_y = v_{0y} + a_y t$ e $v_{0y} = 0$

portanto
$$v_y = \left(\frac{eE}{m_e} \right) t \quad (3.11)$$

na direção \mathbf{x} vamos ter:

$$v_x = \frac{L_P}{t_P} \quad \text{como } \mathbf{v}_x \text{ é conhecido:} \quad t_P = \frac{L_P}{v_x} \quad (3.12)$$

também é conhecido.

A deflexão \mathbf{h}' sofrida pelo feixe no final das placas é dada pela equação do movimento:

$$s = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t_P^2 \quad (3.13)$$

\mathbf{s} é o \mathbf{h}' e \mathbf{v}_{0y} é igual a zero. Então:

$$h' = \left(\frac{eE}{2m_e} \right) t_P^2 \quad (3.14)$$

substituindo \mathbf{t}_P :

$$h' = \left(\frac{eE}{2m_e} \right) \frac{L_P^2}{v_x^2} \quad (3.15)$$

Do final das placas até a tela o feixe tem movimento retilíneo uniforme porque não há mais força atuando, portanto a distância \mathbf{h}'' que ele percorre na direção \mathbf{y} (do fim das placas até a tela) durante o intervalo de tempo \mathbf{t}_{PS} vai ser:

$$h'' = v_y t_{PS} \quad \text{sendo que} \quad t_{PS} = \frac{D_{PS}}{v_x} \quad (3.16)$$

$$h'' = \frac{v_y}{v_x} D_{PS} \quad (3.17)$$

$$v_y \text{ pode ser calculado por: } v_y = v_{0y} + a_y t_P \quad (3.18)$$

$$v_y = \frac{eEL_P}{m_e v_x} \quad (3.19)$$

substituindo em h'' :

$$h'' = \frac{eL_P D_{PS} E}{m_e v_x^2} \quad \text{mas } h = h' + h'' \text{ portanto:} \quad (3.20)$$

$$h = \left(\frac{eE}{m_e v_x^2} \right) \left[\frac{L_P^2}{2} + L_P D_{PS} \right] \quad (3.21)$$

$$h = \left(\frac{eEL_P}{m_e v_x^2} \right) \left[\frac{L_P}{2} + D_{PS} \right] \quad \text{mas} \quad (3.22)$$

$D_{PS} = L_T - L_P$ em que L_P é o comprimento das placas e L_T é a distância do início das placas à tela.

$$h = \left(\frac{eEL_P}{m_e v_x^2} \right) \left[\frac{L_P}{2} + L_T - L_P \right] = \left(\frac{eEL_P}{m_e v_x^2} \right) \left[L_T - \frac{L_P}{2} \right] \quad (3.23)$$

se eu meço h na tela eu posso calcular E :

$$E = \left(\frac{2m_e v_x^2}{eL_P} \right) \frac{h}{2L_T - L_P} \quad (3.24)$$

Mas como $L_T \gg L_P$, $2L_T \gg \gg L_P$ e, portanto, $(2L_T - L_P) \approx 2L_T$ e o campo elétrico fica:

$$E = \left(\frac{m_e v_x^2}{eL_T L_P} \right) h \quad (3.25)$$

o gráfico de $E \times h$ deve ser uma reta com o coeficiente angular acima. O gráfico $V_p \times h$ deve refletir esse comportamento, desde que o campo elétrico real, E_{real} , seja diretamente proporcional à diferença de potencial V_p , ou seja tenha a forma funcional da **equação 3.9**.

Estamos falando em campo elétrico real porque além dos efeitos de borda, as placas defletoras do **TRC** não são placas paralelas, mas têm a forma vista na **figura 3.11** a seguir. Vamos, então verificar se o campo elétrico real das placas defletoras pode ser descrito pela **equação 3.9**, isto é, seja diretamente proporcional à diferença de potencial entre as placas, V_p e inversamente proporcional à distância entre elas:

$$E_{real} = \frac{V_p}{d_{Peff}} \quad (3.26)$$

em que d_{peff} é a **distância efetiva entre as placas** que vamos discutir como obter a seguir. E vamos verificar se esse modelo funciona para esta experiência.

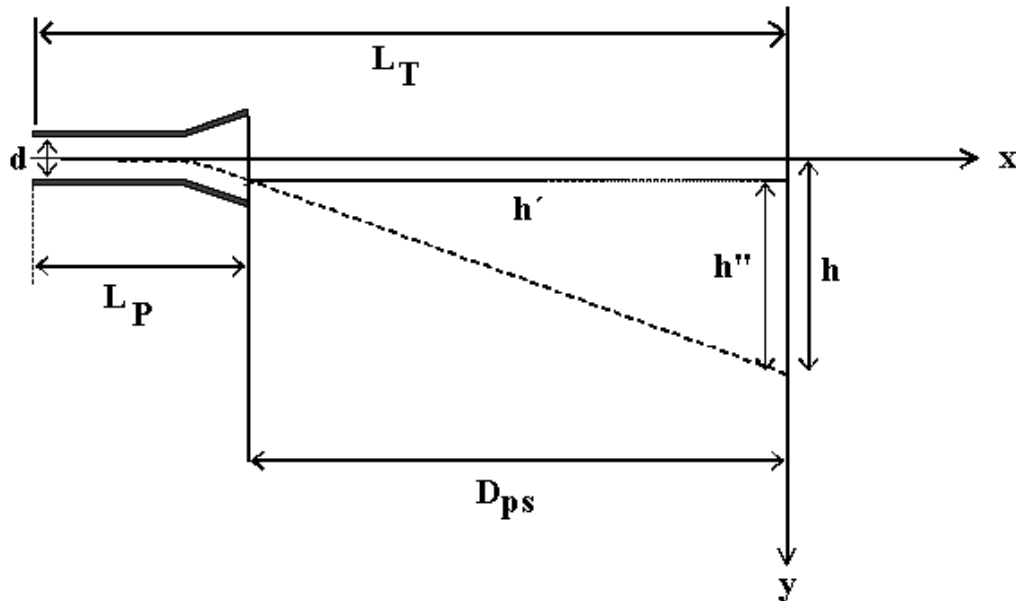


Figura 3.11: Forma real das placas defletoras do tubo de raios catódicos.

Para obter o d_{eff} vamos calcular E_{real} e verificar se E_{real} é proporcional a V_p . Para calcular o E_{real} , deve-se levar em conta a geometria das placas e os efeitos de borda. O campo para essa geometria pode ser simulado no **QField** e o efeito de borda pode ser levado em conta estimando um **comprimento efetivo das placas**, L_{peff} , diferente do comprimento real L_p , (L_{peff} deve ser um pouco maior que L_p , na verdade ele é um pouco menor que o dobro de L_p), que seria o comprimento em que o campo atinge valores significativos (quando comparados aos erros experimentais).

Para determinar o comprimento efetivo das placas vamos simular o campo no **QField** e calcular o campo médio e daí calcular o **L_{peff}** . O critério utilizado é calcular o valor médio do campo, integrando num intervalo que é definido como sendo aquele em que o campo elétrico simulado tem valores da ordem do erro experimental associado ao valor máximo do campo dentro das placas, medido sobre o eixo que coincide com a trajetória do feixe.

Espectrometria de Massa - Simulação Simplificada de um Espectrômetro de Tempo de Vôo.

Espectrômetros de massa são dispositivos que medem a razão massa/carga, (m/z), e a abundância de íons que se deslocam em vácuo. São inúmeras as aplicações da espectrometria de massa em química e biologia, sendo considerada atualmente uma das mais poderosas ferramentas para o estudo da estrutura e composição da matéria. Algumas dessas aplicações são: reconhecimento e quantificação de substâncias químicas em misturas complexas, determinação de pureza, estudo do mecanismo de reações químicas, identificação e quantificação de moléculas biológicas massivas. Há vários tipos de espectrômetros de massa: de tempo de vôo, magnéticos e de quadrupolo entre outros. Cada um desses dispositivos tem vantagens e desvantagens, entretanto, um dos espectrômetros mais populares atualmente nos laboratórios de pesquisa é o espectrômetro que utiliza o método de tempo de vôo.

Esses aparelhos que utilizam o método de tempo de vôo são muito utilizados por várias razões. Dentre elas, a mais importante é que o intervalo de massas que ele pode analisar é quase ilimitado, ele permite uma rápida separação de misturas complexas e é muito adequado para o estudo de moléculas biológicas massivas. Além disso, o espectrômetro de massa de tempo de vôo é uma máquina que tem **design** simples e tamanho conveniente para laboratórios convencionais.

Esse aparelho opera a partir do seguinte princípio: quando um grupo de íons, bem definido no tempo e no espaço, e diferindo entre si apenas pela razão massa/carga, é sujeito à mesma intensidade de campo elétrico (e tem a possibilidade de se deslocar livremente nessa região de campo elétrico constante), os íons vão atravessar a região de campo elétrico num intervalo de tempo que depende somente de suas razões massa/carga. O espectrômetro de massa de tempo de vôo é capaz de medir a razão massa/carga com grande precisão, a partir

da medida do tempo de vôo dos íons, permitindo que se identifique massas da ordem de, por exemplo, **1** unidade em **10⁴**.

O espectrômetro de tempo de vôo consiste de uma fonte onde ocorre a ionização da amostra, que pode ser realizada por diversos métodos, (veja a referência **Ionization Methods in Organic Mass Spectrometry** de Alison E. Ashcroft, The Royal Society of Chemistry, UK 1997), um sistema analisador e um sistema detector.

O analisador consiste de eletrodos que produzem um campo elétrico capaz de acelerar os íons produzidos na fonte, a partir do repouso, todos ao mesmo tempo e a partir do mesmo plano normal à direção da aceleração, e de uma região (**drift region**) livre de campo elétrico. Dessa maneira, o tempo que cada íon leva para atingir um plano alvo (onde se encontra o detector e que é paralelo ao plano de origem) será proporcional à raiz quadrada de sua razão (**m/Z**).

O sistema detector mede o tempo que o íon leva para percorrer a região livre de campo.

A proposta é simular o sistema analisador com o programa **Simion7**. Os eletrodos que aceleram os íons configuram uma lente de três eletrodos análoga à lente do tubo de raios catódicos. Um esquema do sistema analisador de um espectrômetro de tempo de vôo encontra-se na **figura 3.12** a seguir.

Espectrômetro de massa - tempo de voo linear

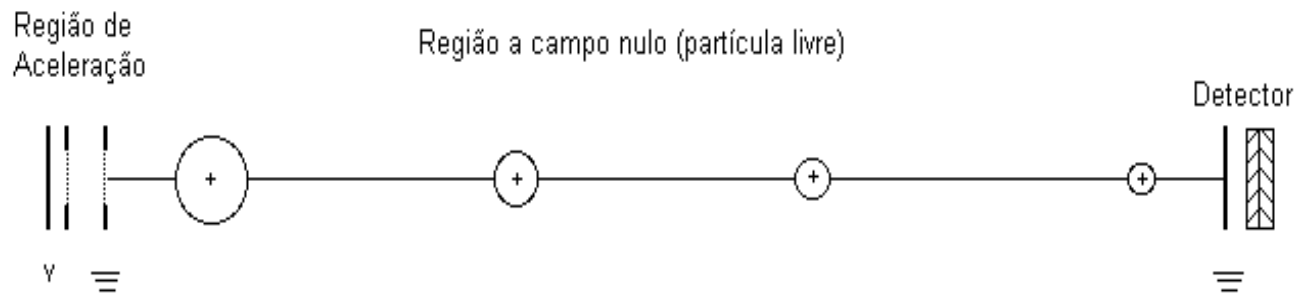


Figura 3.12: Esquema simplificado de um espectrômetro de massa de tempo de voo linear.

Procedimento para a medida da resistência elétrica e condutividade da cuba.

Para ter certeza de que é possível simular corretamente um problema eletrostático com a cuba eletrolítica, precisamos ter certeza de que todas as condições necessárias são satisfeitas.

A primeira delas é que a cuba, sob tensão alternada se comporte como um resistor ôhmico. Para garantir que isso é verdadeiro, deveríamos levantar a curva característica da cuba sob tensão alternada. Por uma questão de falta de tempo, vamos garantir para vocês que ela é ôhmica (essa curva foi levantada e é uma reta que passa pela origem).

A seguir é necessário medir a resistência elétrica da cuba para ter certeza que ela é muito menor que a resistência interna do voltímetro. Para tanto monte o circuito da **figura 3.13** a seguir.

No circuito proposto, a fonte de tensão alternada é um transformador que reduz a voltagem de **110V** para **16V** (valores eficazes) e permite isolar eletricamente a rede do arranjo experimental. Mais informações sobre o funcionamento de transformadores podem ser obtidas na **Apostila de CFE, 2ª parte**. Apesar da resistência elétrica da cuba ser bastante alta, é conveniente colocar um resistor de proteção, R_p , em série com a cuba, que, além de ser uma proteção adicional para o circuito, serve para medida da corrente. Verifique se o resistor suporta a potência que esse circuito requer.

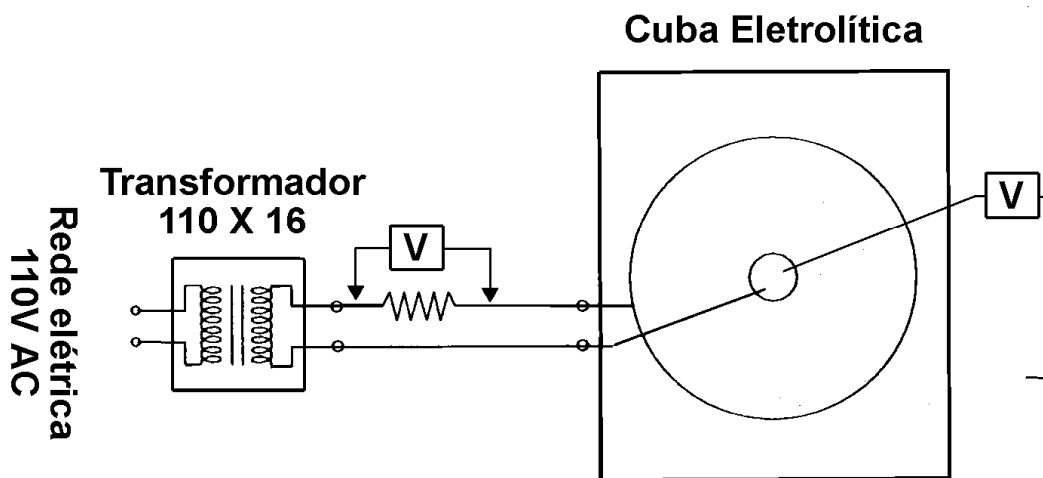


Figura 3.13: Circuito para cuba eletrolítica. O mesmo voltímetro pode ser usado para o mapeamento do potencial e monitoramento da corrente.

Antes de colocar água na cuba, para medir a resistência, verifique se a cuba está limpa e nivelada. A seguir, coloque água até um nível que esteja bem próximo da altura do eletrodo circular de menor diâmetro, mas sem cobrir a superfície superior do eletrodo. Para a medida da resistência, a cuba não deve conter nenhum eletrodo. Meça a tensão na cuba e a tensão na resistência R_p e calcule o valor da resistência R_c da cuba, as próprias laterais da cuba são os eletrodos. Calcule o erro experimental e compare com o valor da resistência interna do voltímetro na escala que está utilizando. Dessa comparação você vai poder saber se o voltímetro de que dispõe é ou não o instrumento adequado para as medidas que vai realizar.

O próximo passo é medir a condutividade da água para comparar com a do cobre. A resistência elétrica de um condutor

ôhmico, de seção reta uniforme, de área **A** e comprimento **L** é dada por:

$$R = \rho \frac{L}{A} = \left(\frac{1}{\sigma} \right) \frac{L}{A} \quad (3.27)$$

a constante de proporcionalidade ρ é chamada de resistividade e é o inverso da condutividade σ . A unidade da condutividade é $\Omega^{-1}\text{cm}^{-1}$. A condutividade do cobre é $\sigma=5,71 \times 10^5 \Omega^{-1}\text{cm}^{-1}$. O comprimento **L** é a distância entre as laterais, onde se está aplicando a diferença de potencial, e, a área **A** é obtida a partir da altura **h** da água e da largura **d** das laterais. Pode-se, então, calcular a condutividade da água e compará-la com a do cobre. Não esquecer os erros experimentais. Julgue, de posse de todos os dados que mediu se pode prosseguir com o mapeamento usando essa cuba.

Procedimento para o mapeamento do campo elétrico de um capacitor cilíndrico, coaxial, infinito.

O cálculo analítico do potencial e do campo elétrico de um capacitor cilíndrico, coaxial, infinito é simples e já foi resolvido no curso teórico. Por isso não vai ser realizado em detalhe aqui.

Uma vez tendo a certeza de que a cuba vai funcionar bem na simulação de campos eletrostáticos, monte os eletrodos que simulam a configuração de cilindros coaxiais. Se o eletrodo externo estiver ovalizado, ajuste-o da melhor maneira possível. Convém, também, limpar os eletrodos com uma esponja de aço, para remover a camada de óxido. Não deixar que partículas da esponja acabem dentro da cuba.

Estabeleça a diferença de potencial que o transformador fornecer e meça a tensão na resistência R_p para determinar a corrente.

Ligue o voltímetro. Há dois terminais, o **comum** e **volt**, o **comum** é o zero do voltímetro. **Você acha que as condições de contorno do problema se alteram dependendo de como ligar o voltímetro? Porque? Justifique.**

Assim que responder a questão acima, anote todas as condições de contorno do problema experimental. Teste a simetria do arranjo, medindo em pontos opostos em relação ao centro. O nivelamento da cuba também pode alterar a simetria e não apenas a colocação dos eletrodos.

Levantar, pelo menos, uma equipotencial completa, numa distância intermediária entre os eletrodos. Como serão as equipotenciais externas ao anel? Se não souber, meça. Quando fizer essas medidas é importante seguir uma equipotencial e não uma circunferência de raio r .

A seguir, medir o potencial como função da distância ao centro do eletrodo, de **1** em **1cm**, até a parede da cuba. Cada medição deve ser feita em um diâmetro completo. Fazer o gráfico do potencial como função da posição ao longo desse diâmetro. Assinalar nesse gráfico a posição dos eletrodos. Calcule o campo e faça o gráfico do campo como função da mesma variável acima, assinalando a posição dos eletrodos. Não esquecer as barras de erro.

Com o programa de simulação **QField**, reproduza o capacitor cilíndrico estudado acima, com as mesmas condições de contorno experimentais. Lembre que numa simulação é importante manter a escala do problema real. Observe as linhas de campo e as equipotenciais. Faça o gráfico do potencial simulado e do campo elétrico em função da posição ao longo de um diâmetro. Superponha esses gráficos aos pontos experimentais. Compare e comente.

Resolva o problema analiticamente com as condições de contorno do problema experimental. Faça o gráfico do potencial e do campo elétrico em função da posição ao longo de um diâmetro. Superponha esses resultados aos gráficos mencionados acima, que mostram os resultados da simulação e os resultados experimentais. Compare e comente.

Procedimento para a caracterização do campo elétrico criado pelas placas defletoras de um tubo de raios catódicos

Na **figura 3.14** a seguir reproduzimos o esquema do tubo de raios catódicos que vai ser usado nesta experiência. Vemos o canhão de elétrons, a lente eletrostática e as placas defletoras:

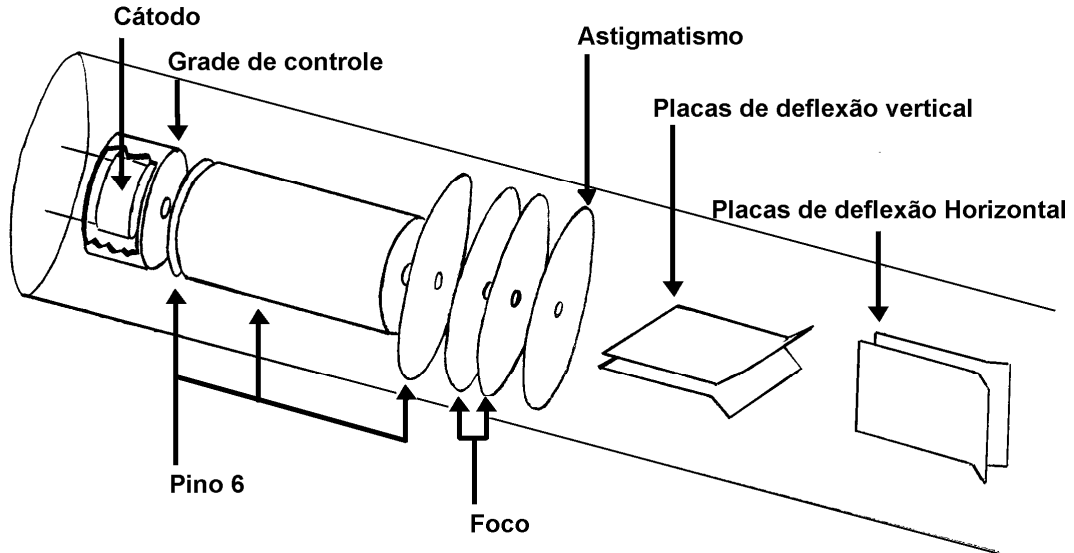


Figura 3.14: Tubo de raios catódicos mostrando o canhão de elétrons, a lente eletrostática e as placas defletoras.

Para verificar o modelo proposto para o funcionamento das placas defletoras, precisamos verificar que:

1-o campo elétrico das placas defletoras é diretamente proporcional à diferença de potencial entre as placas **equação 17**.

2-o campo elétrico e , portanto, o potencial é diretamente proporcional à deflexão do feixe na tela, h , para uma determinada velocidade das partículas carregadas, **equação 16**.

3-A velocidade das partículas ao quadrado $(v_{0x})^2$ (ou sua energia cinética) é inversamente proporcional à deflexão do feixe na tela, h , **equação 16**.

Vamos primeiro simular o campo elétrico entre as placas defletoras no **QField**, fazendo o gráfico do campo E ao longo do eixo x onde x é o eixo que coincide com a trajetória do feixe.

Em seguida, vamos calcular o valor médio de E , integrando num intervalo que é definido como sendo aquele em que o campo elétrico simulado tem valores da ordem do erro experimental associado ao valor máximo do campo dentro das placas, medido sobre o eixo que coincide com a trajetória do feixe. Vamos fazer essa simulação para quatro valores diferentes de diferença de potencial entre as placas. Com os valores médios obtidos e a **equação 17** podemos calcular o distância efetivo das placas, d_{eff} , diferente do distância real d . Basta fazer um gráfico de $\langle E \rangle$ como função da diferença de potencial entre as placas.

Se de fato a aproximação das placas defletoras por um capacitor ideal de placas paralelas estiver correta, o gráfico acima será uma reta cujo coeficiente angular é $1/d_{eff}$. Então vamos proceder com a comprovação do modelo deduzido para esse campo: ele deve ser diretamente proporcional ao deslocamento do feixe na tela e diretamente proporcional à energia do feixe $(v_{0x})^2$.

Vamos ligar o **TRC** e fazer algumas medidas para proceder às verificações acima. Vamos estabelecer uma tensão de extração, que será proporcional à energia do feixe medindo essa tensão podemos calcular a velocidade das partículas do feixe. Em seguida vamos variar a tensão entre as placas de tal forma que a deflexão do feixe na tela varie de **1** em **1cm**. Vamos fazer um gráfico de $V_p X h$. O que podemos concluir a partir desse gráfico?

Em seguida vamos variar a tensão aceleradora e para cada uma delas vamos variar a tensão entre as placas de modo que a deflexão do feixe na tela varie de **1** em **1cm** como foi realizado acima. Monte no gráfico acima as curvas $V_p X h$ para cada tensão aceleradora. O que pode afirmar, a partir dessas curvas com relação ao modelo proposto?

Simulação Simplificada do Sistema Analisador de um Espectrômetro de Tempo de Vôo

O objetivo desta parte da experiência é descobrir qual o limite superior de massa que um dado espectrômetro de massa pode distinguir.

Para tanto, há instalado nos microcomputadores do laboratório didático um programa que calcula o campo elétrico gerado por sistemas de eletrodos e simula a trajetória de partículas carregadas que atravessem esse campo. Esse programa chama-se **Simion7**. Há uma descrição resumida das principais instruções desse programa no final desta apostila.

A configuração dos eletrodos do sistema analisador é dada, ou seja, a lente eletrostática e seus potenciais e a **drift zone**, estão num arquivo do **Simion7**. Considerando que o detector do espectrômetro de massa que mede o tempo de vôo dos íons resolve (ou distingue) íons com diferença de tempo de vôo de até **5ns** (5×10^{-9} s), e que os íons têm carga **+1**, faça as simulações que permitam descobrir o limite superior de resolução em massa do espectrômetro, ou, em outras palavras, qual o íon com carga **+1** mais pesado que o aparelho consegue distinguir. A sugestão é que comece com um íon de massa **1000 Da** (Da=Dalton, 1Da=1uma).

Programa Quick Field

Inicialmente, vamos fazer uma simulação do capacitor cilíndrico real com as medidas iguais às do capacitor existente na cuba eletrolítica, com o programa de simulação **Quick Field**. Esse programa é identificado no micro pelo ícone **QField**.

O programa **QField** permite construir os eletrodos com a geometria que se deseja e com os potenciais e materiais escolhidos e ele calcula as linhas equipotenciais associadas a essa configuração e as linhas de campo correspondentes. Ele calcula tanto campos elétricos quanto campos magnéticos.

Esse programa resolve a **equação de Laplace** na região definida pelo usuário, uma vez tendo as condições de contorno. Essa resolução é feita para um determinado número de pontos e o usuário tem certo controle sobre esse número. Quanto mais pontos, mais acurada é a solução e maior é o tempo de cálculo. A versão que temos à disposição (gratuita) só permite um máximo de **500** pontos. Existe a venda versões com um número muito maior de pontos. Entretanto, do ponto de vista didático a versão de **500** pontos é bastante razoável.

Para iniciar simulando o capacitor real precisamos construir a geometria. Começar abrindo o programa **QField**, a lista dos comandos é, com boa aproximação, a seguinte:

File → **new**

dar um nome, por exemplo: **capac.pbm**

Edit

problem → **eletrostatic** → **high precision** → **plane paralel**

Edit

geometry (dos eletrodos)

Model

Add vertex (coloca os pontos para iniciar)

(deve-se colocar **4** pontos para fechar a moldura e mais os pontos necessários para desenhar os eletrodos)

Add edge (traça as linhas que unem os pontos)

o programa pergunta qual é o ângulo dessas linhas, se for **zero** ele traça uma linha reta e se for **180°**, ele traça uma semi-circunferência. Escolha o que precisar. Precisa traçar as linhas que delimitam o espaço em torno dos eletrodos (no caso, o maior possível) e as linhas que definem os eletrodos, que para esta experiência é o capacitor cilíndrico.

Select

o programa precisa dar nome aos eletrodos para poder associar os potenciais corretamente. Clique em cima de cada eletrodo para ele selecioná-lo e clique com o botão da direita. Clique duas vezes e em seguida escolha

Label select

Edges

o programa abre uma janela para dar nome aos eletrodos, dê um nome a um eletrodo e, em seguida, clique no próximo e dê outro nome e assim por diante.

Select

agora é necessário selecionar o meio entre os condutores e o meio dentro dos condutores para dar nome a eles. É o mesmo procedimento descrito para os eletrodos.

Label select

Blocks

dar nomes aos meios.

Build Mesh

esse comando constrói uma rede que vai definir o número de pontos em que o programa resolve a **equação de Laplace**.

Add vertex

Set spacing

para definir o espaçamento, o ideal é ter o menor espaçamento possível, sem que o número de nós na rede ultrapasse **500** pontos.

Build Mesh

In all blocks

Exit

Save

Edit

Data

Precisa definir os parâmetros de todos os objetos criados inclusive dos **meios** ou **blocks**. Utilize a permissividade elétrica do meio como sendo igual à do vácuo, o erro cometido com esse procedimento é muito pequeno, mas se quiser ter certeza tem um manual na sala dos técnicos onde pode verificar isso. Coloque em **relative** e igual a **1**. Para definir os eletrodos tem que dizer qual a voltagem em cada um deles. Existe também a opção **floating** para potenciais flutuantes, para as paredes da cuba, por exemplo.

Results

Solve problem e dizer que quer ver a solução.

Uma vez pronta a simulação o programa permite a visualização da solução de várias maneiras. Com linhas equipotenciais, linhas de campo, mapa colorido do campo ou do potencial, valores do campo e do potencial ponto a ponto, gráficos do campo e/ou do potencial ao longo de qualquer eixo definido pelo experimentador, etc.

Programa Simion7

Esse programa calcula a trajetória das partículas carregadas que atravessam campos elétricos gerados por eletrodos definidos pelo experimentador. Ele também calcula a trajetória de partículas dentro de campos magnéticos, mas o programa é mais versátil e foi projetado especialmente para o cálculo de campos elétricos. Ele também calcula as linhas de campo e as equipotenciais, mas não oferece as mesmas vantagens que o programa **QField** nessa área.

Para abrir o programa “clique” no ícone do **Simion7**. Vamos fazer uma breve descrição dos comandos que vai precisar para o cálculo da trajetória de partículas carregadas dentro de um campo elétrico.

New

clique em **electrode**
cylinder
mirror Y

Aumente o **Max PA size** para **1 000 000**

Coloque **1000x** e **1000y** (“clique” com o da direita o número diminui e, com o da esquerda, o número aumenta)

OK

Modify cria a geometria, para criar a geometria:

Bx aperte a tecla **Control** e vá desenhando com o **mouse**, cada vez que clicar ele fixa o ponto. Uma vez desenhado um eletrodo clique em seguida, em **no electrode** para torná-lo **electrode** e dê uma identificação para esse eletrodo, por exemplo, **+1**.

Edge fixa esse eletrodo. A seguir, repita o procedimento para cada um dos outros eletrodos com identificações seqüenciais. Quando a geometria estiver pronta:

Keep

Save precisa dar um nome que deve ser **qualquer.pa#**, em seguida ele pede um “memo” dê o mesmo nome e **accept** se quiser.

Refine refine fast adjust o programa vai fazer os cálculos para essa geometria. Esperar até acabar.

Fast adjust para fornecer os valores dos potenciais dos eletrodos.

View normal draw potential auto e colocar o número de equipotenciais que se deseja que ele desenhe.

Além disso, o programa permite ver o potencial em três dimensões:

Normal PE View e se vê as curvas de nível do potencial.

Para construir a trajetória de partículas carregadas dentro dessa configuração de campo elétrico:

Normal

Ion Def

Use electrons (ou **protons**, à escolha) **number of ions** (p.ex. **1** ou **5** ou **10**)

A posição **x** e a posição **y** do início da trajetória das partículas deve ser definida para não passar por fora da configuração de campo de interesse. Volte para o seu desenho e veja os valores das coordenadas **x** e **y** para fornecê-las ao programa. Se quiser um feixe de partículas ao invés de uma só, dê um intervalo de **delta y** de **1mm**, por exemplo, e aumente o número de partículas, para cada uma vai ser desenhada uma trajetória.

O comando **Where** dá os valores de **x** e de **y** no cursor.

O comando **Time Marker** coloca marcas de tempo, só precisa definir o intervalo de tempo entre cada marca.

Há outros comandos interessantes para facilitar a simulação, como o **Move**, que altera a posição dos eletrodos, que você pode descobrir brincando com o programa.

