



# Física Experimental III

Notas de aula: [www.if.usp.br/suaide](http://www.if.usp.br/suaide)

LabFlex: [www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex](http://www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex)

## Aula 15

Prof. Alexandre Suaide

Ramal: 7072

Ed. Oscar Sala (Pelletron), sala 246



# Objetivos da semana passada

- Entender e estudar o fenômeno de ressonância magnética em uma bússola comum
  - O que é ressonância
  - Caracterizando o fenômeno experimentalmente
  - Determinar as características da bússola e como estas características influenciam a ressonância

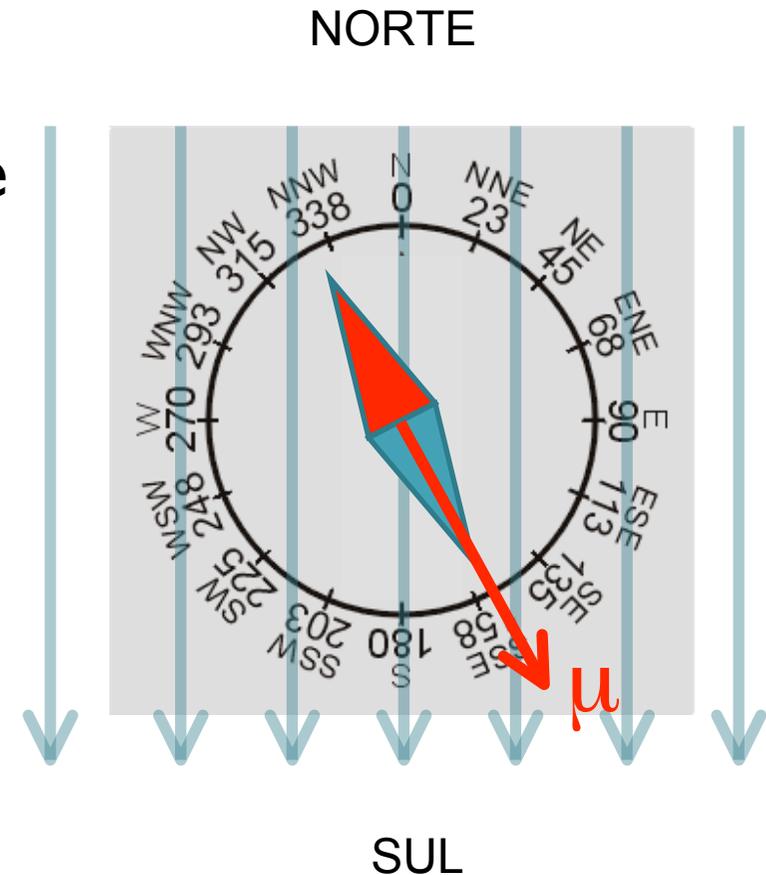
# Bússola em um campo magnético

- Na presença de um campo magnético surge um torque na bússola

$$\tau = -\mu B \sin(\theta)$$

- A bússola não oscila indefinidamente
  - Atrito

$$\tau_{\text{atrito}} = -\gamma \frac{d}{dt} \theta$$



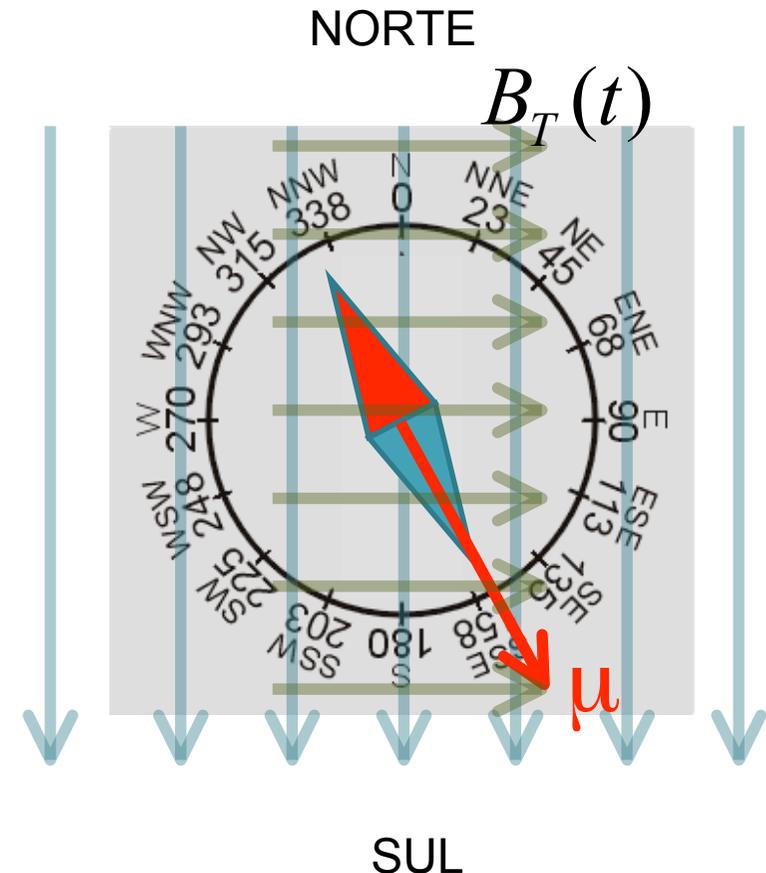
# Bússola em um campo magnético

- Adicionando um campo magnético perpendicular e variado

$$B_T(t) = B_{T0} \cos(\omega_{ext} t)$$

- Surge um torque externo dado por

$$\tau_T = -\mu B_T(t) \sin(90 - \theta)$$



# Bússola em um campo magnético

- A equação de movimento da bússola é:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau + \tau_{\text{atrito}} + \tau_T$$

- Ou seja:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \mu B \sin(\theta) + \mu B_T \cos(\omega_{\text{ext}} t) \sin(\pi/2 - \theta) = 0$$

- Como resolver esta equação?

# Bússola em um campo magnético

- Simplificações

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \mu B \sin(\theta) + \mu B_T \cos(\omega_{ext} t) \sin(\pi/2 - \theta) = 0$$

$$\sin(\theta) \sim \theta$$

$$\sin(\pi/2 - \theta) \sim 1$$

Esta equação eu sei resolver analiticamente

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \mu B \theta + \mu B_T \cos(\omega_{ext} t) = 0$$

# Bússola em um campo magnético

- Resolvendo a equação (ver, por exemplo, Mecânica, K. R. Symon, Oscilador Harmônico Forçado)

$$\theta(t) = \frac{K}{I} \frac{1}{\underbrace{\left[ \left( \omega_0^2 - \omega_{ext}^2 \right)^2 + \frac{\gamma^2}{I^2} \omega_{ext}^2 \right]^{1/2}}_{\theta_0}} \sin(\omega_{ext} t + \phi)$$

- Com:

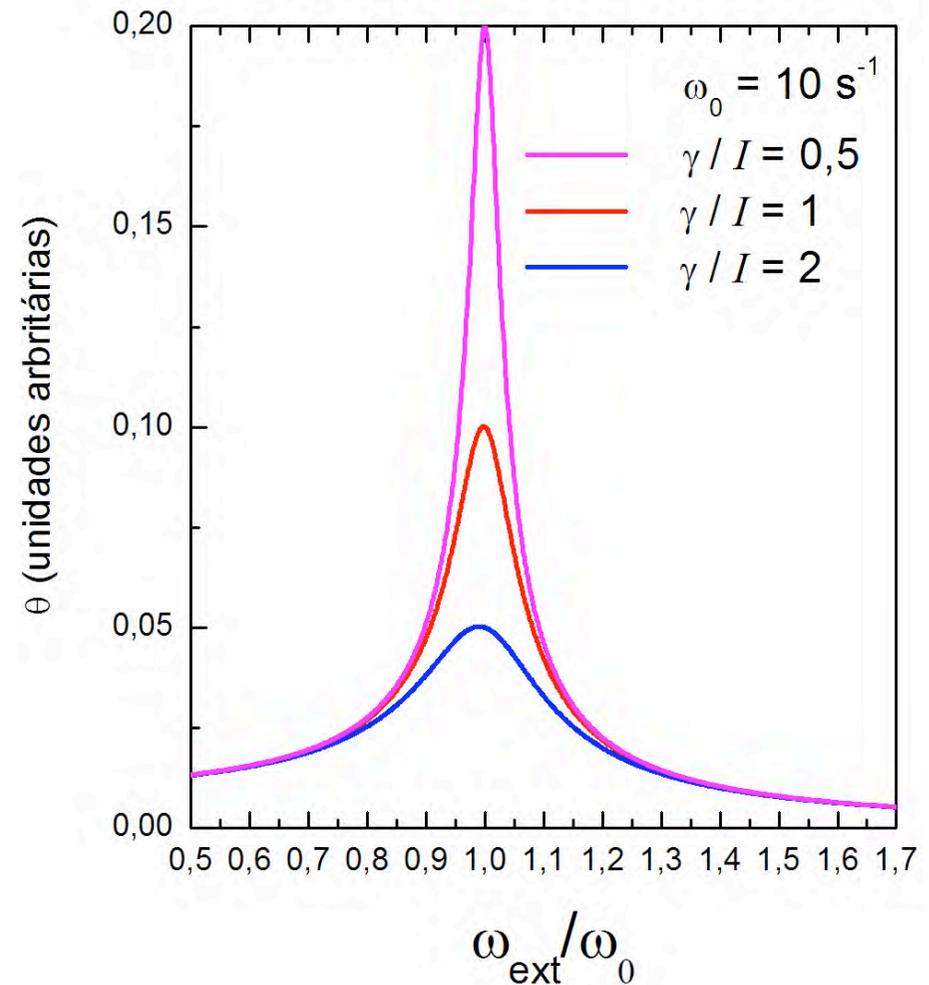
$$\omega_0^2 = \frac{\mu}{I} B \qquad K = \mu B_T$$

# Movimento forçado e ressonância

- A amplitude de oscilação depende da frequência do campo externo

$$\theta_0 = \frac{K}{I} \frac{1}{\left[ (\omega_0^2 - \omega_{ext}^2)^2 + \frac{\gamma^2}{I^2} \omega_{ext}^2 \right]^{1/2}}$$

- E possui um valor máximo
  - Ressonância



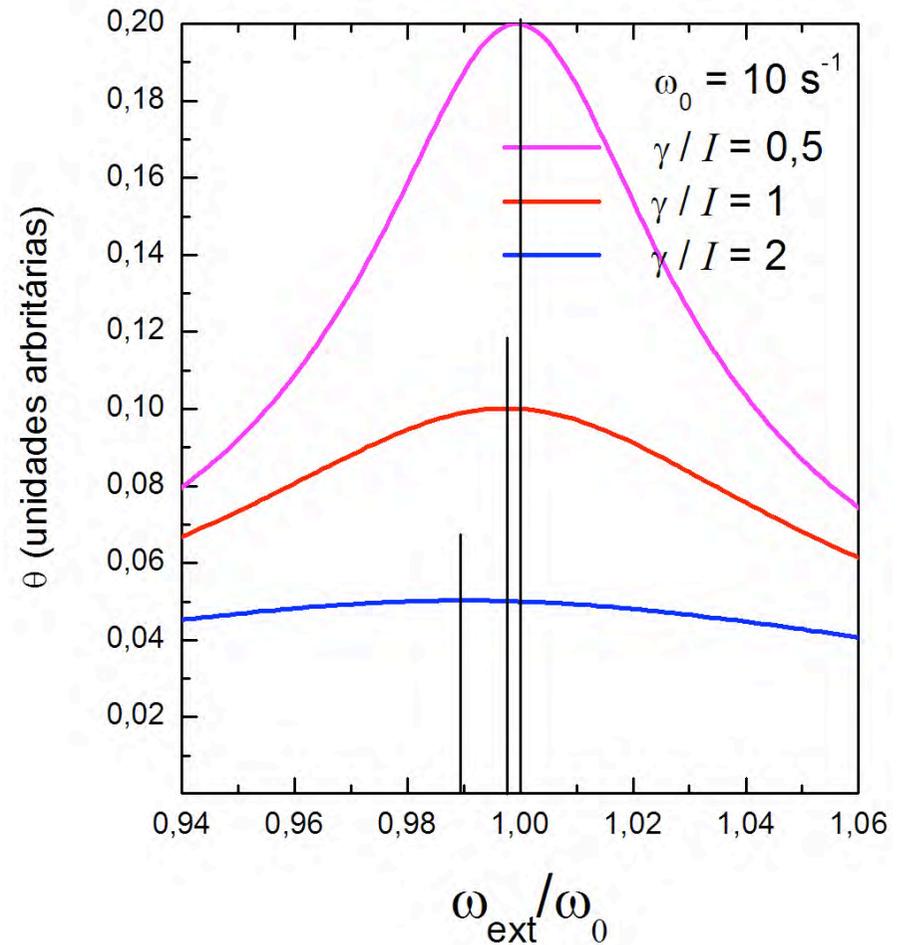
# Movimento forçado e ressonância

- A frequência de máximo de amplitude é dada por

$$\frac{d}{d\omega_{ext}} \theta_0 = 0$$

- E vale:

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2I^2}$$



# Previsões com o modelo simplificado?

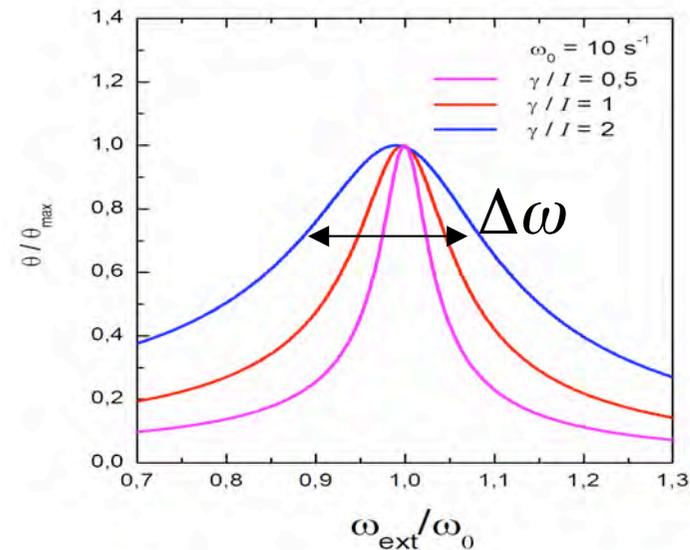
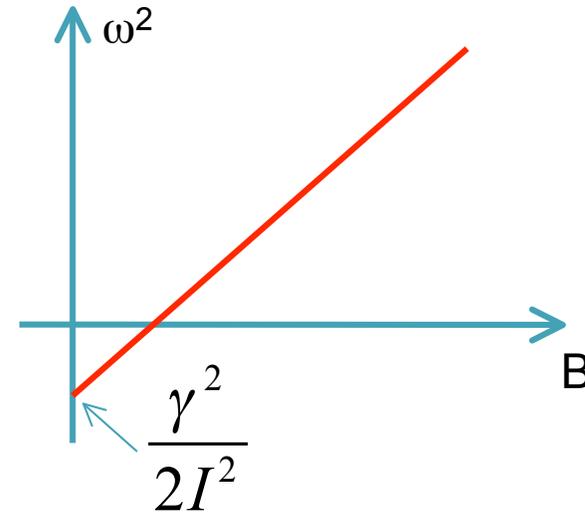
- A frequência de ressonância é dada por

$$\omega_1^2 = \frac{\mu}{I} B - \frac{\gamma^2}{2I^2}$$

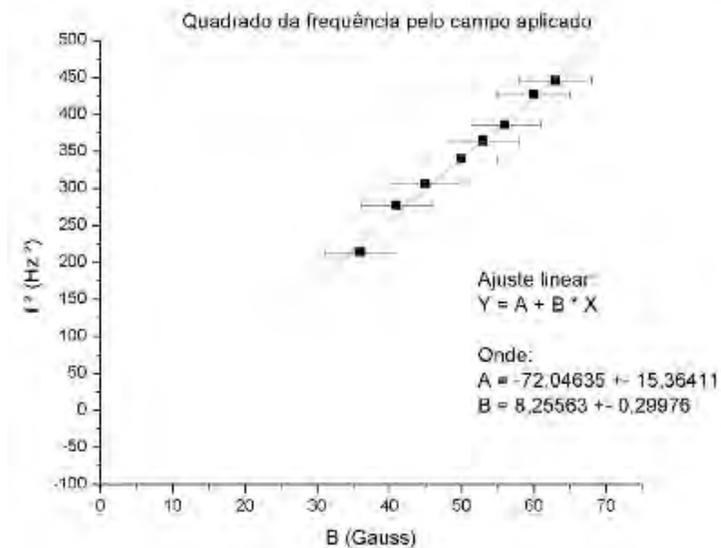
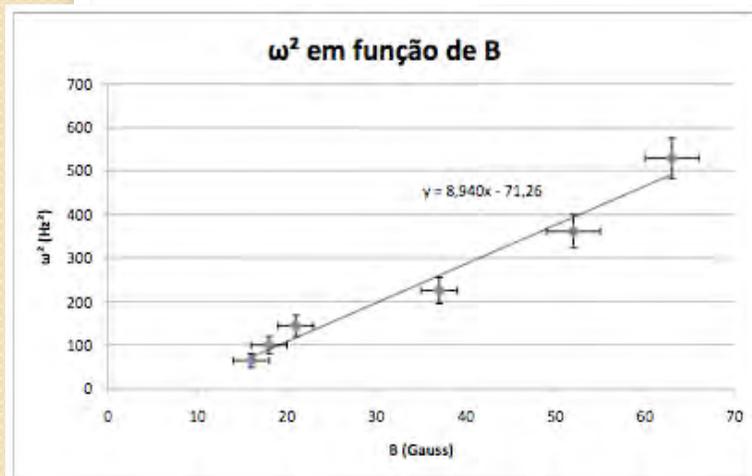
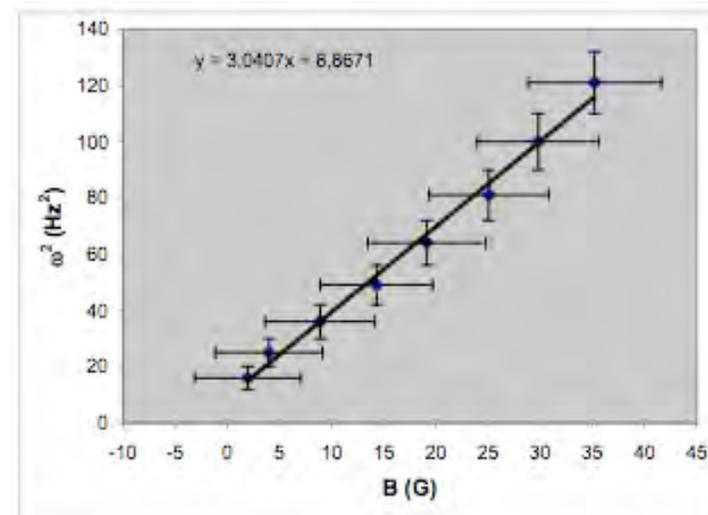
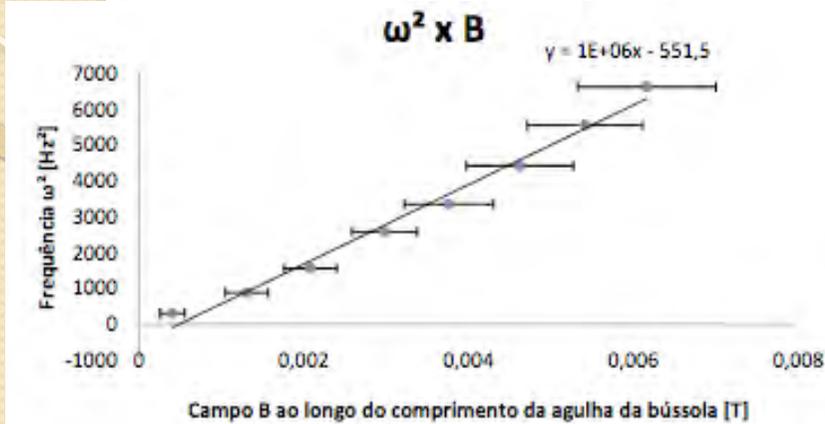
- Ou seja, um gráfico da frequência ao quadrado em função do campo magnético dá uma reta

- Fator de qualidade

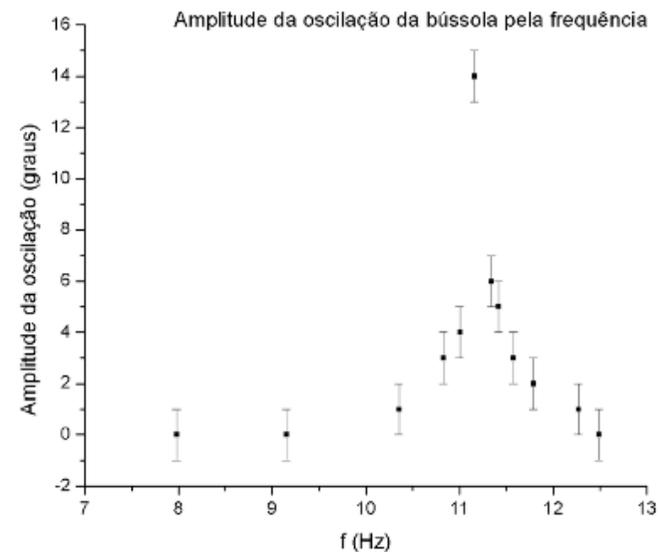
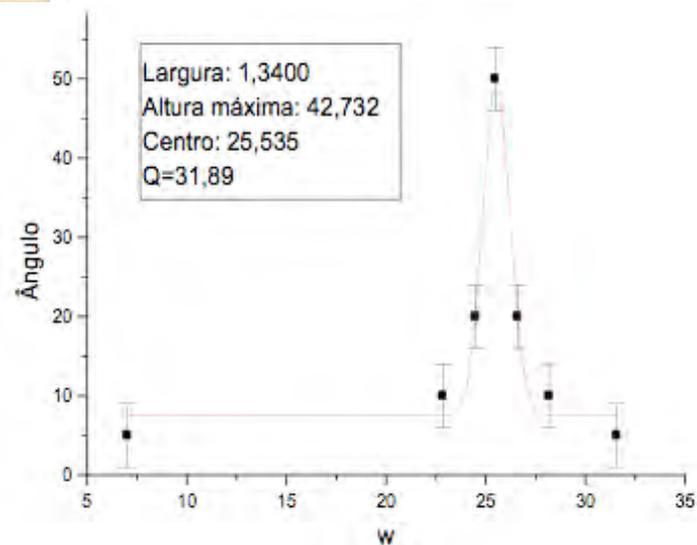
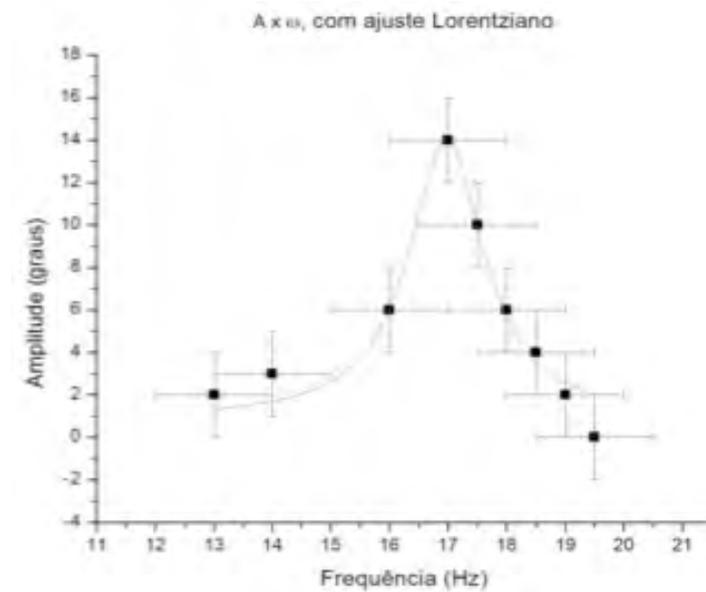
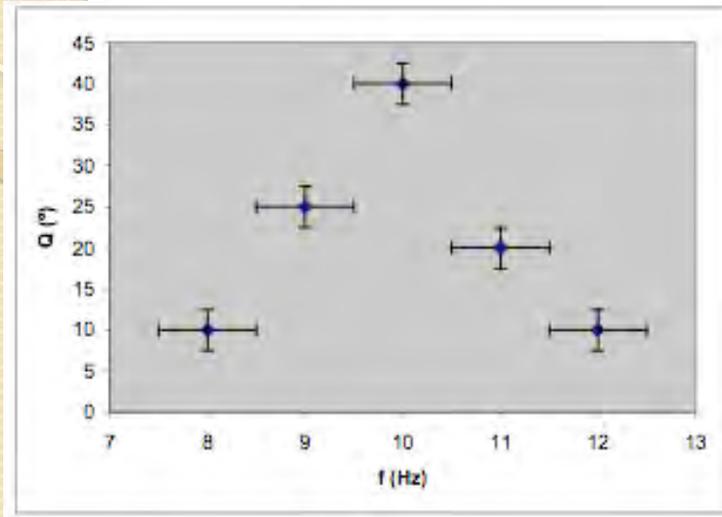
$$\text{fator} - Q \sim \frac{\omega_1}{\Delta\omega}$$



# Resultados dos grupos (amostra)

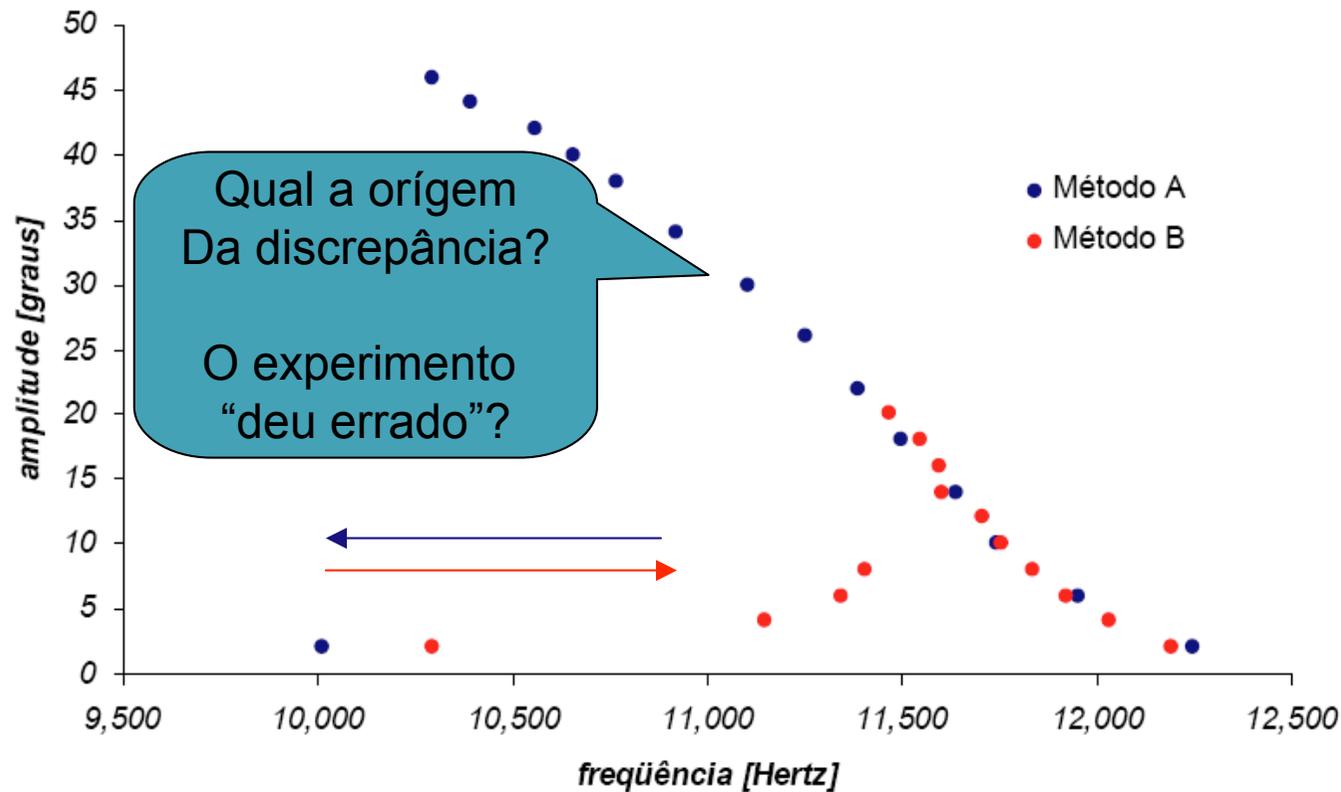


# Resultados dos grupos (amostra)



# Contudo, alguns grupos obtiveram resultados interessantes

- Vou usar como exemplo um grupo que mediu a curva de Q de duas formas





## O que aconteceu?

- Os resultados foram muito discrepantes em relação a previsão teórica
- Corte abrupto em baixas frequências
- Resultado dependente da forma na qual as medidas são realizadas
- Problema no experimento ou física não compreendida?

# Comparando previsões teóricas

- Vamos resolver as equações:

Solução numérica!

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \mu B \sin(\theta) + \mu B_T \cos(\omega_{ext} t) \sin(\pi/2 - \theta) = 0$$

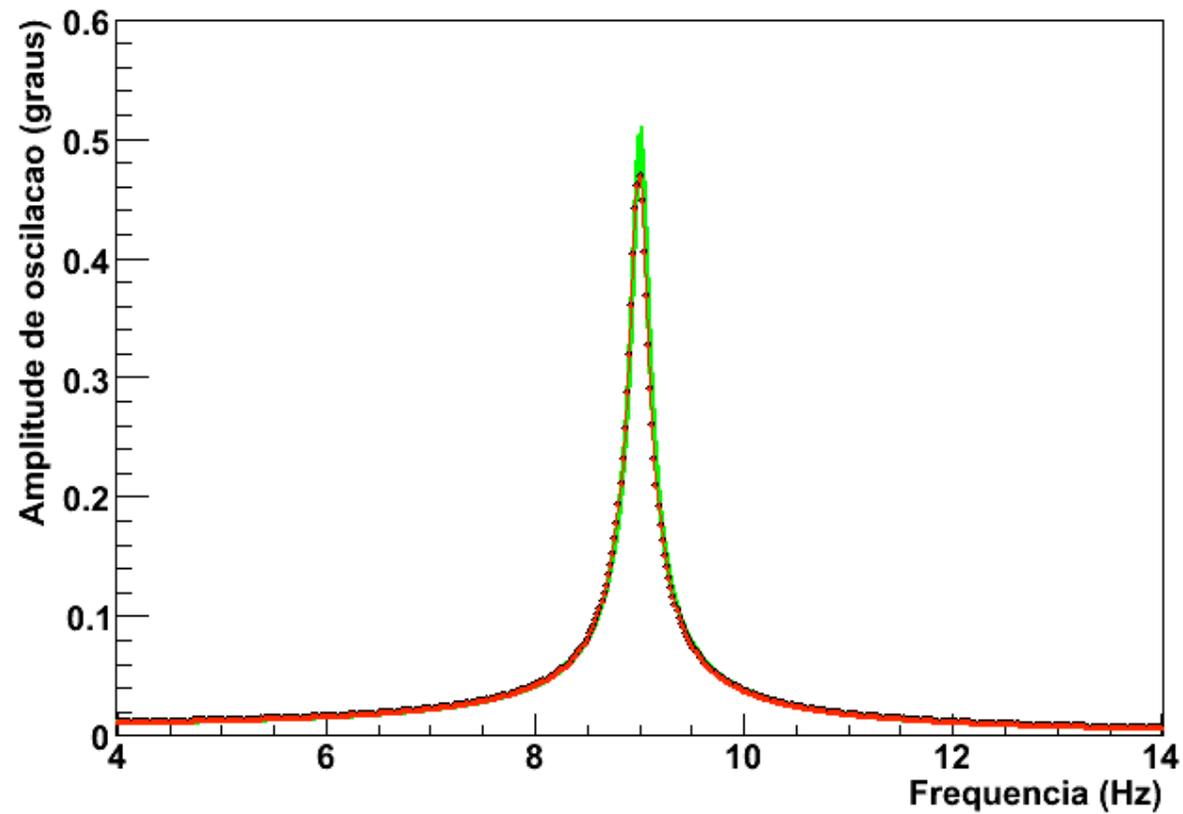
$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \mu B \theta + \mu B_T \cos(\omega_{ext} t) = 0$$

Solução exata!

- Utilizando:
  - B constante e uniforme
  - BT é um parâmetro de entrada (AMP)
  - Condições de contorno realistas, ou seja, a solução da frequência anterior é condição inicial para a próxima frequência
    - Representação realista de como fazemos as medidas no laboratório

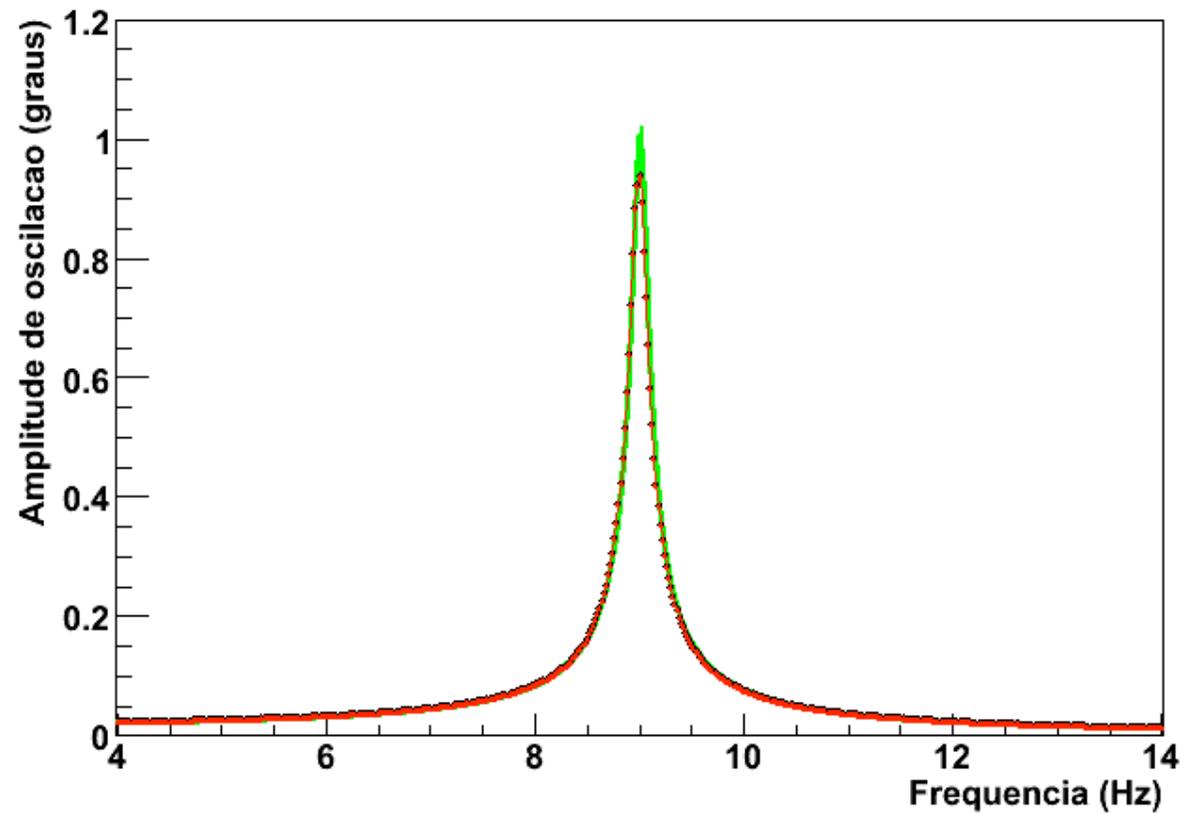
# Comparando previsões teóricas

$\mu/l = 40.00$   $\gamma/l = 1.00$   $B_{Max} = 80.00$   $AMP = 0.50$



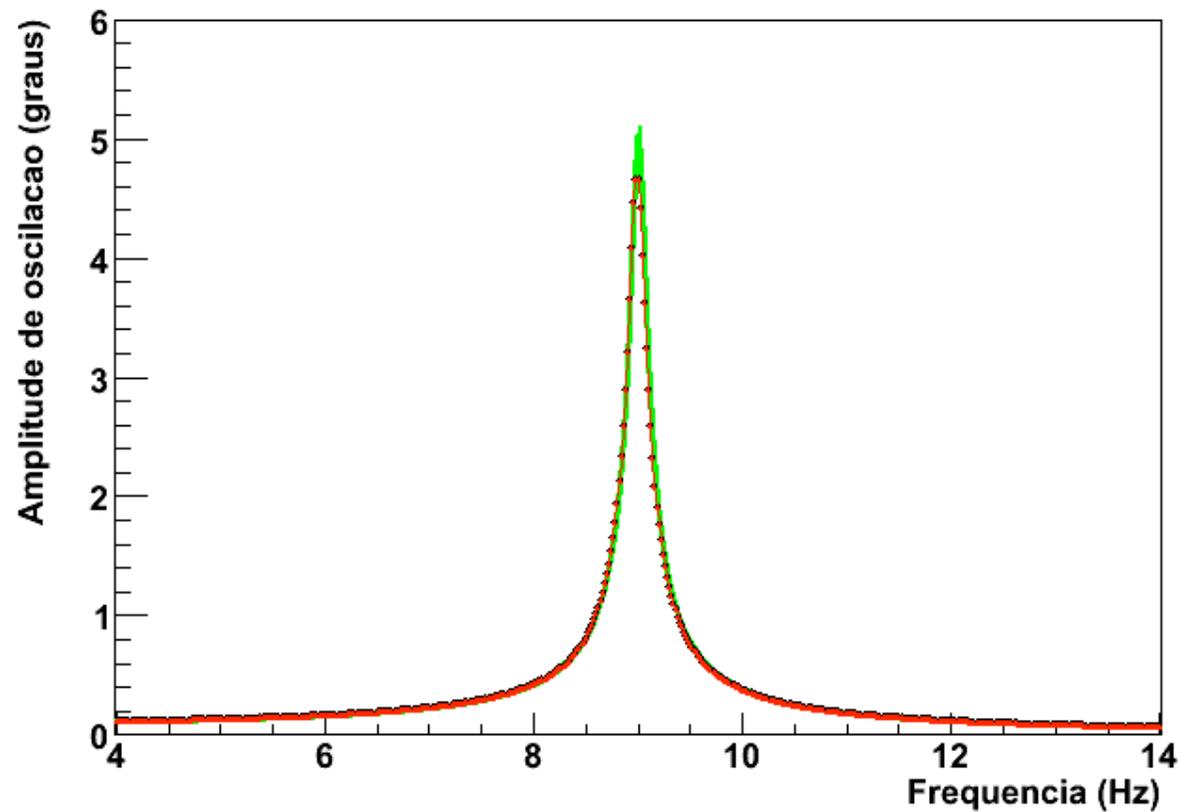
# Comparando previsões teóricas

$\mu/l = 40.00$   $\gamma/l = 1.00$   $B_{Max} = 80.00$   $AMP = 1.00$



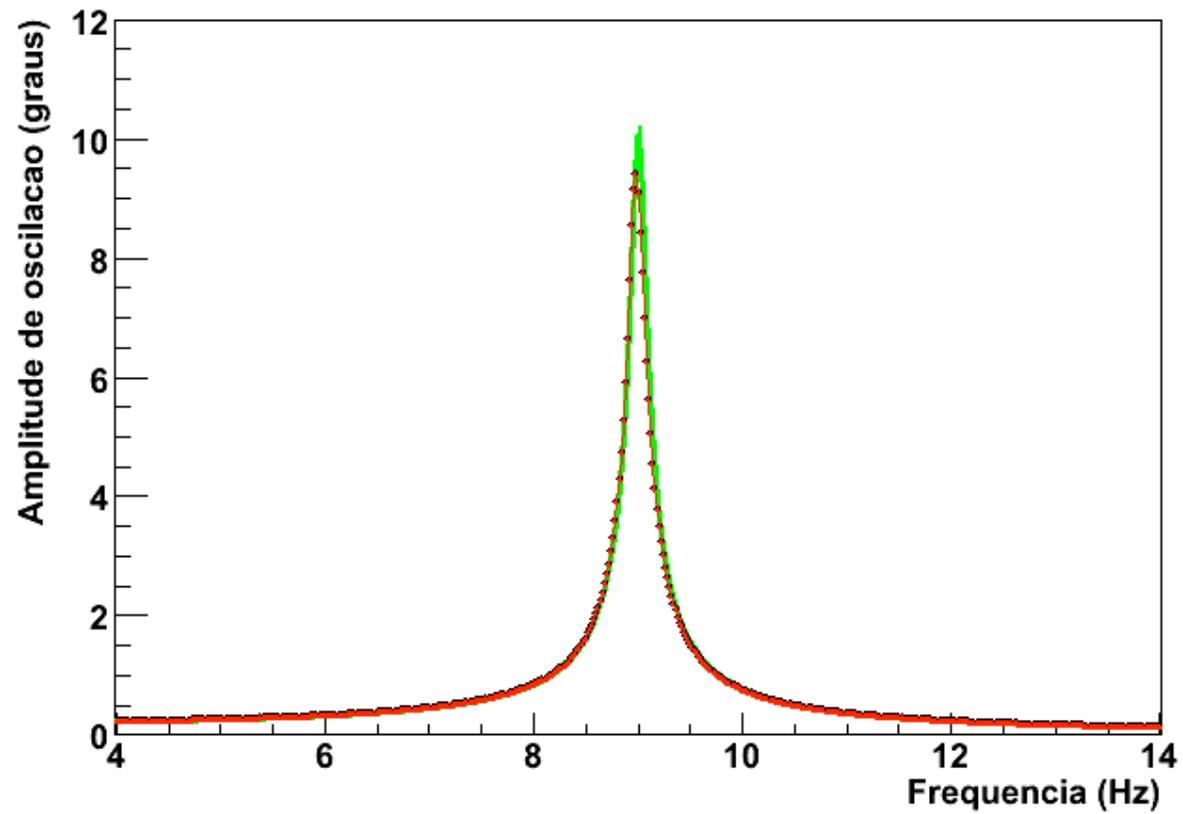
# Comparando previsões teóricas

$\mu/l = 40.00$   $\gamma/l = 1.00$   $B_{Max} = 80.00$   $AMP = 5.00$



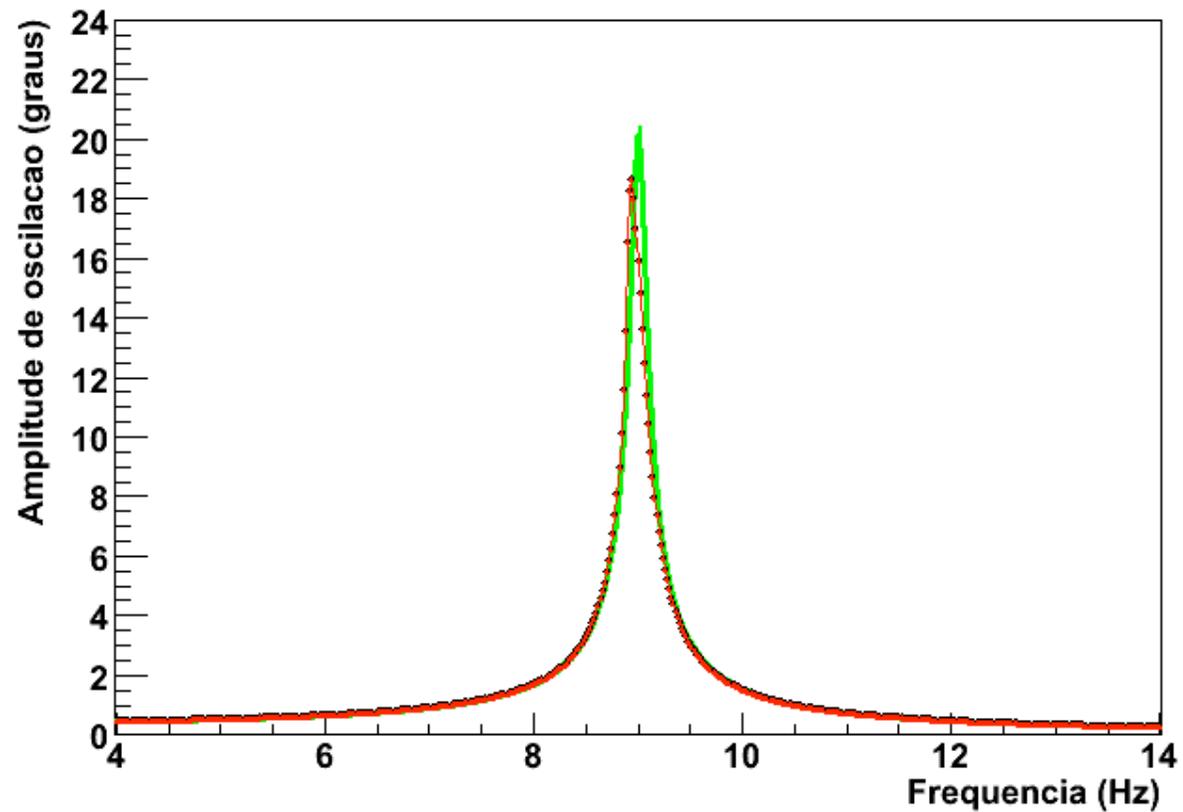
# Comparando previsões teóricas

$\mu/l = 40.00$   $\gamma/l = 1.00$   $B_{Max} = 80.00$   $AMP = 10.00$



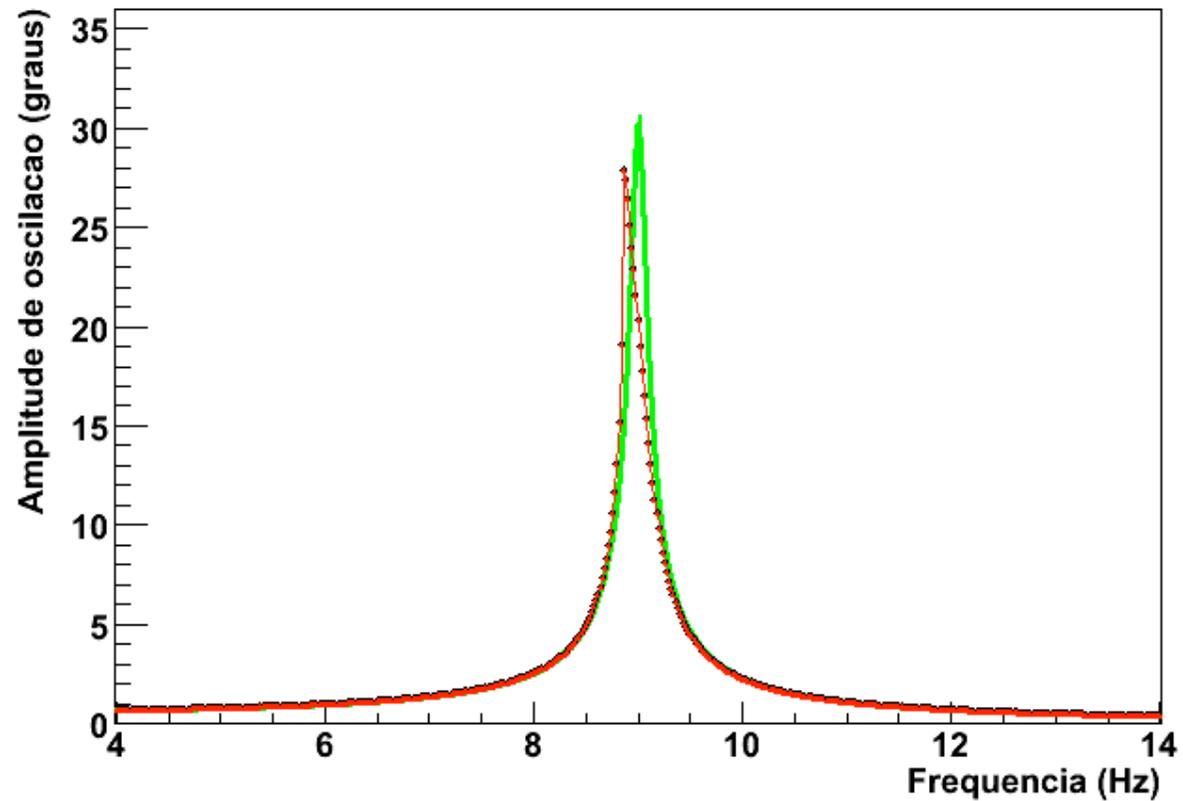
# Comparando previsões teóricas

$\mu/l = 40.00$   $\gamma/l = 1.00$   $B_{Max} = 80.00$   $AMP = 20.00$



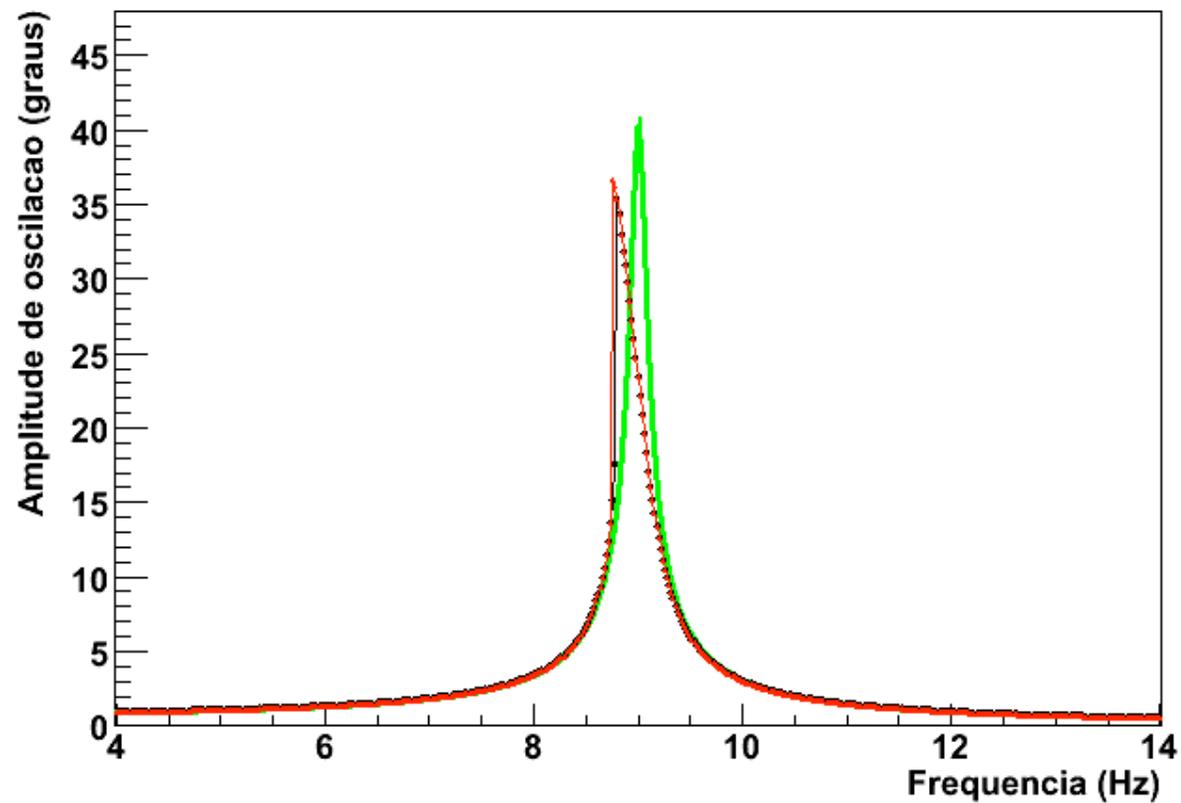
# Comparando previsões teóricas

$\mu/l = 40.00$   $\gamma/l = 1.00$   $B_{Max} = 80.00$   $AMP = 30.00$



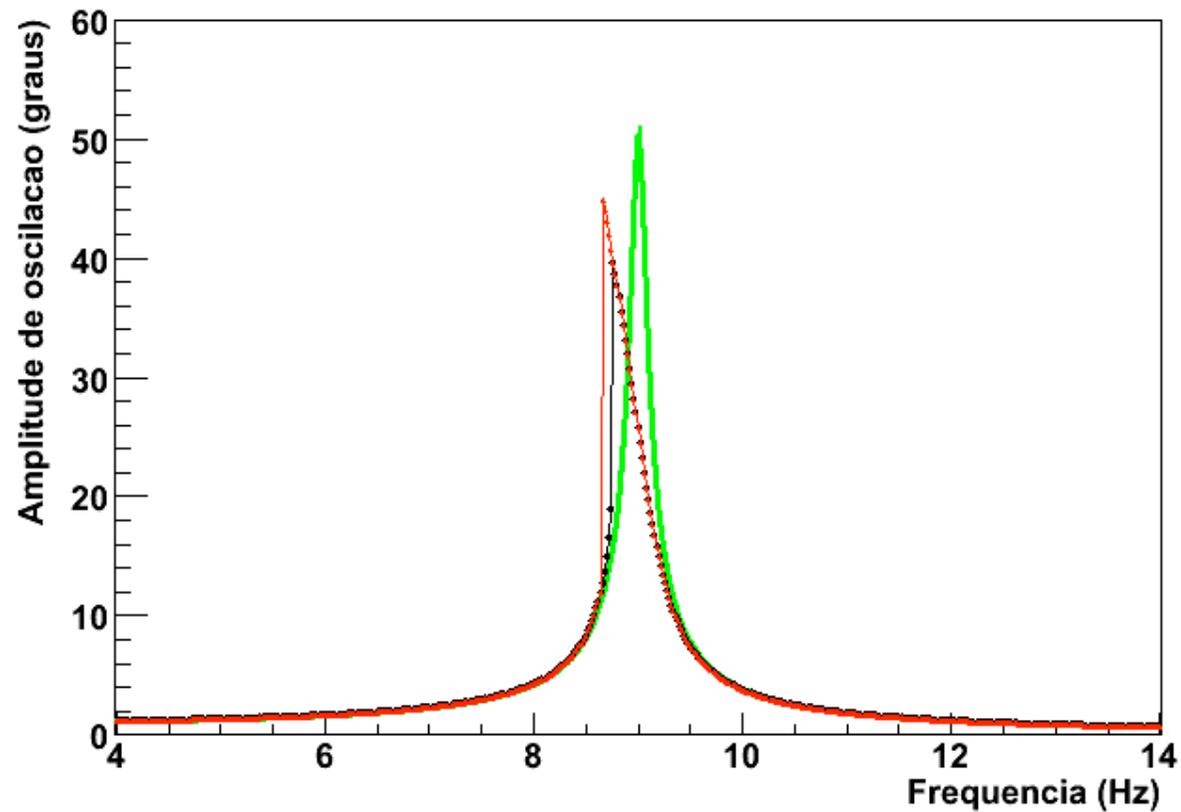
# Comparando previsões teóricas

$\mu/l = 40.00$   $\gamma/l = 1.00$   $B_{Max} = 80.00$   $AMP = 40.00$



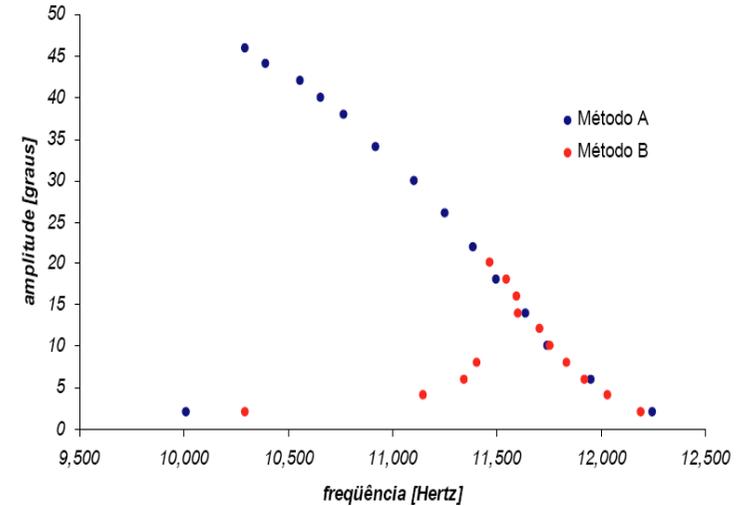
# Comparando previsões teóricas

$\mu/l = 40.00$   $\gamma/l = 1.00$   $B_{Max} = 80.00$   $AMP = 50.00$

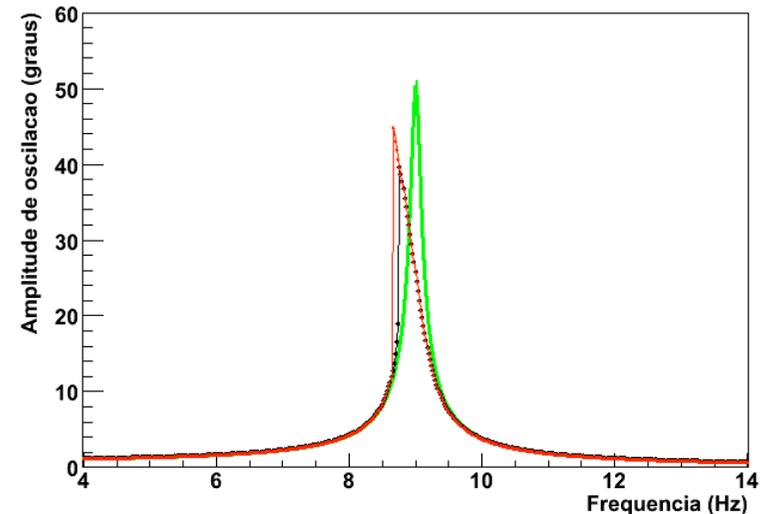


# Comparando previsões teóricas

- Quando aumentamos o campo perturbativo, a solução exata da equação diferencial diverge da solução aproximada
  - Isto porque as aproximações
    - $\sin(\theta) \sim \theta$
    - $\sin(\pi/2 - \theta) \sim 1$
  - deixam de valer
- Mas a divergência não é grande o suficiente para explicar os dados
  - O que mais pode estar acontecendo?

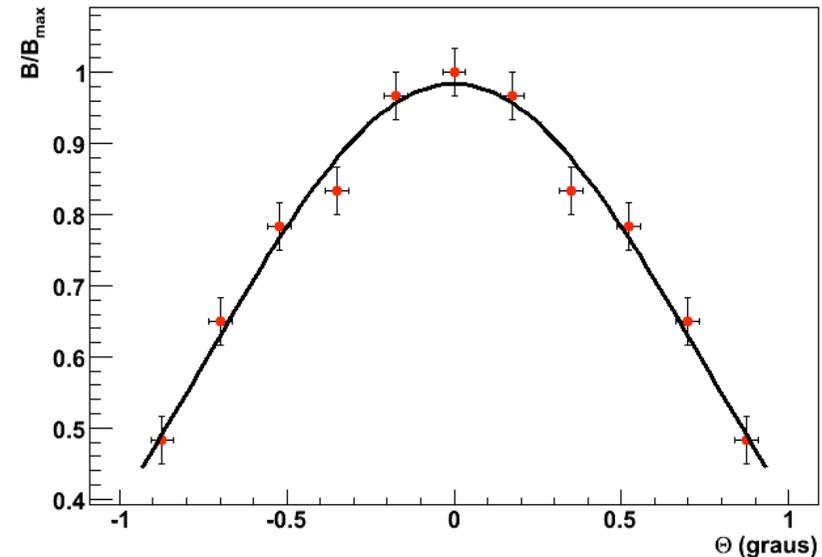


$\mu/l = 40.00$   $\gamma/l = 1.00$   $B_{Max} = 80.00$   $AMP = 50.00$



# Comparando previsões teóricas

- Que outros efeitos podem ser importantes?
  - Se lembrarmos a experiência II nós sabemos que o campo entre as duas bobinas não é uniforme
    - Mapeamento de campo magnético
- Como isto influencia os resultados?



$$B(\theta) = B e^{-\frac{\theta^2}{\sigma^2}}$$

Obtida do ajuste aos  
Dados do mapeamento  
Do campo magnético

# Comparando previsões teóricas

- Vamos resolver as equações:

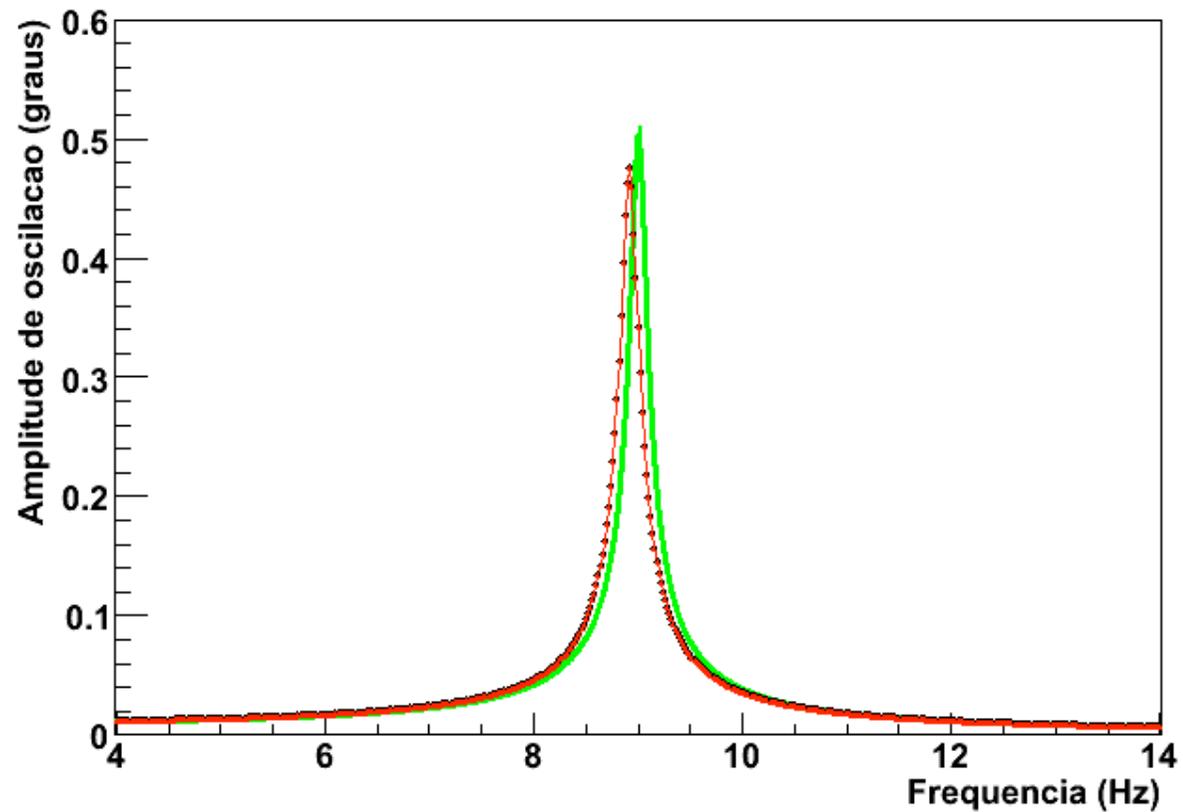
$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \mu B e^{-\frac{\theta^2}{\sigma^2}} \sin(\theta) + \mu B_T \cos(\omega_{ext} t) \sin(\pi/2 - \theta) = 0$$

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \mu B \theta + \mu B_T \cos(\omega_{ext} t) = 0$$

- Utilizando:
  - B real
  - BT é um parâmetro de entrada (AMP)
  - Condições de contorno realistas, ou seja, a solução da frequência anterior é condição inicial para a próxima frequência
    - Representação realista de como fazemos as medidas no laboratório

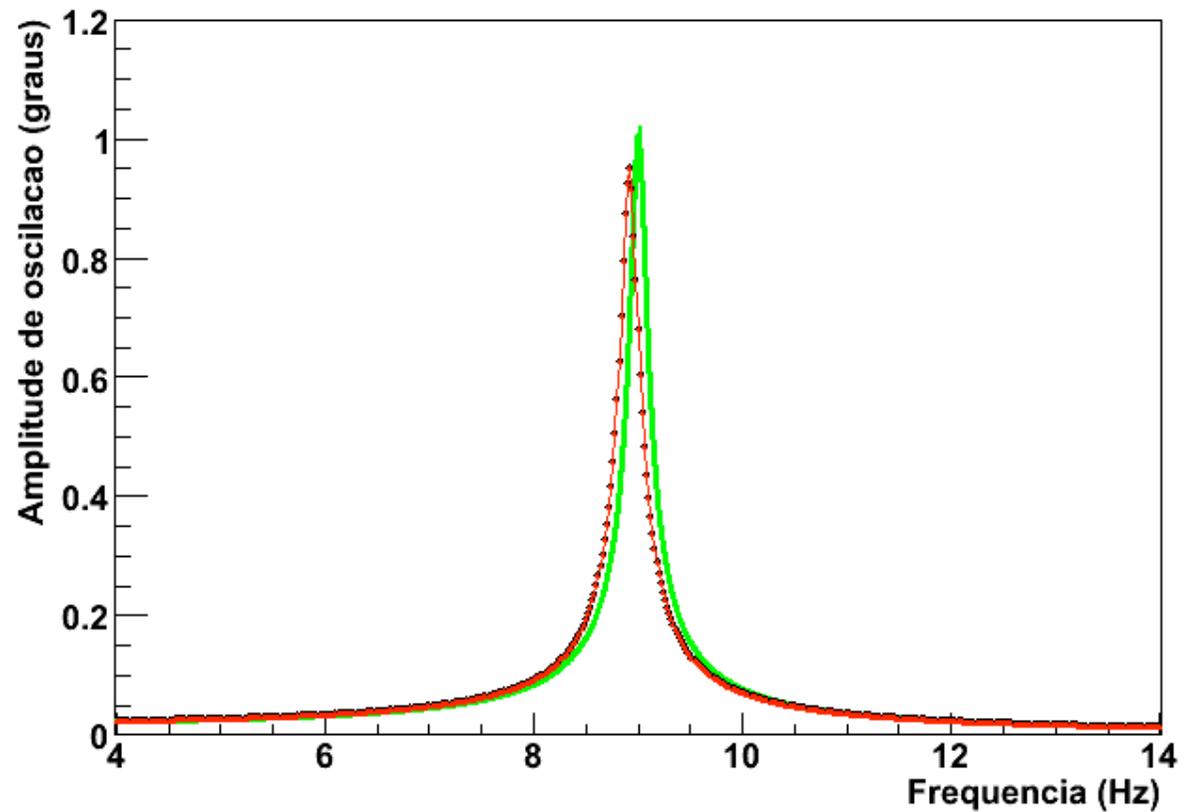
# Comparando previsões teóricas

$\mu/l = 40.00$   $\gamma/l = 1.00$   $B_{Max} = 80.00$   $AMP = 0.50$



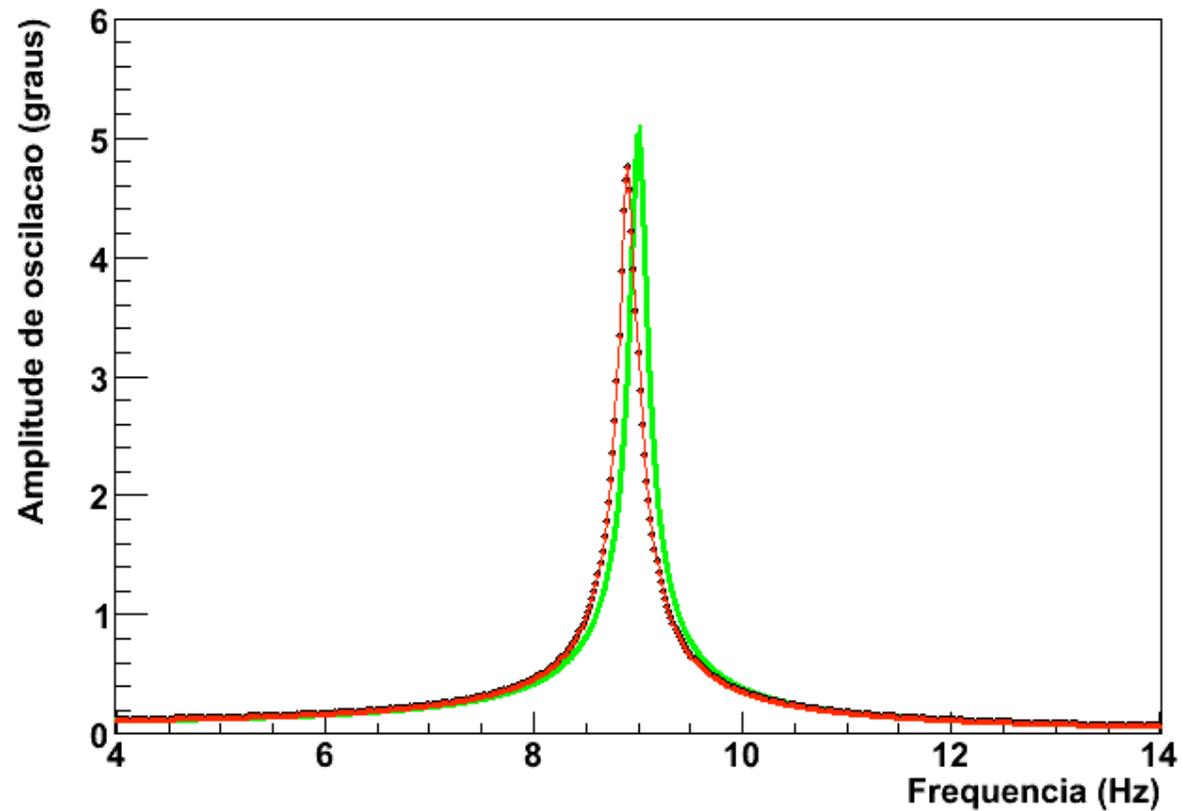
# Comparando previsões teóricas

$\mu/l = 40.00$   $\gamma/l = 1.00$   $B_{Max} = 80.00$   $AMP = 1.00$



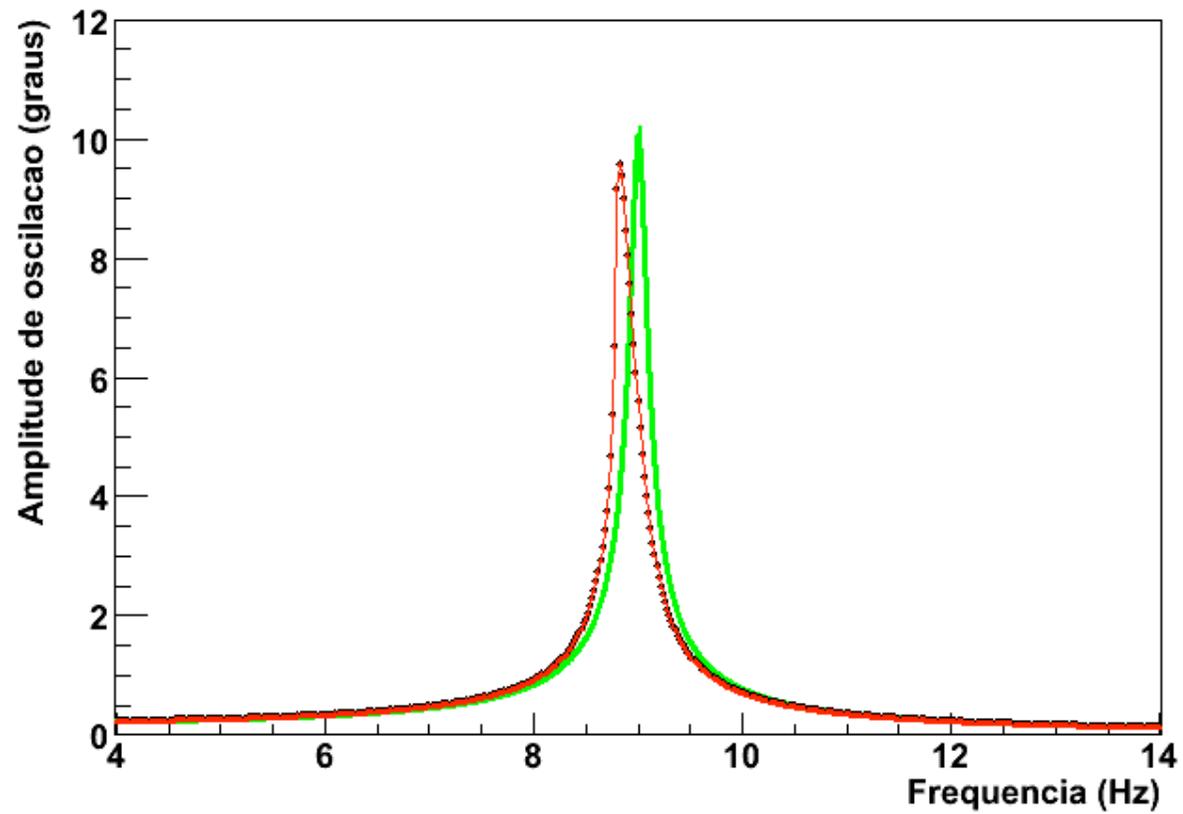
# Comparando previsões teóricas

$\mu/l = 40.00$   $\gamma/l = 1.00$   $B_{Max} = 80.00$   $AMP = 5.00$



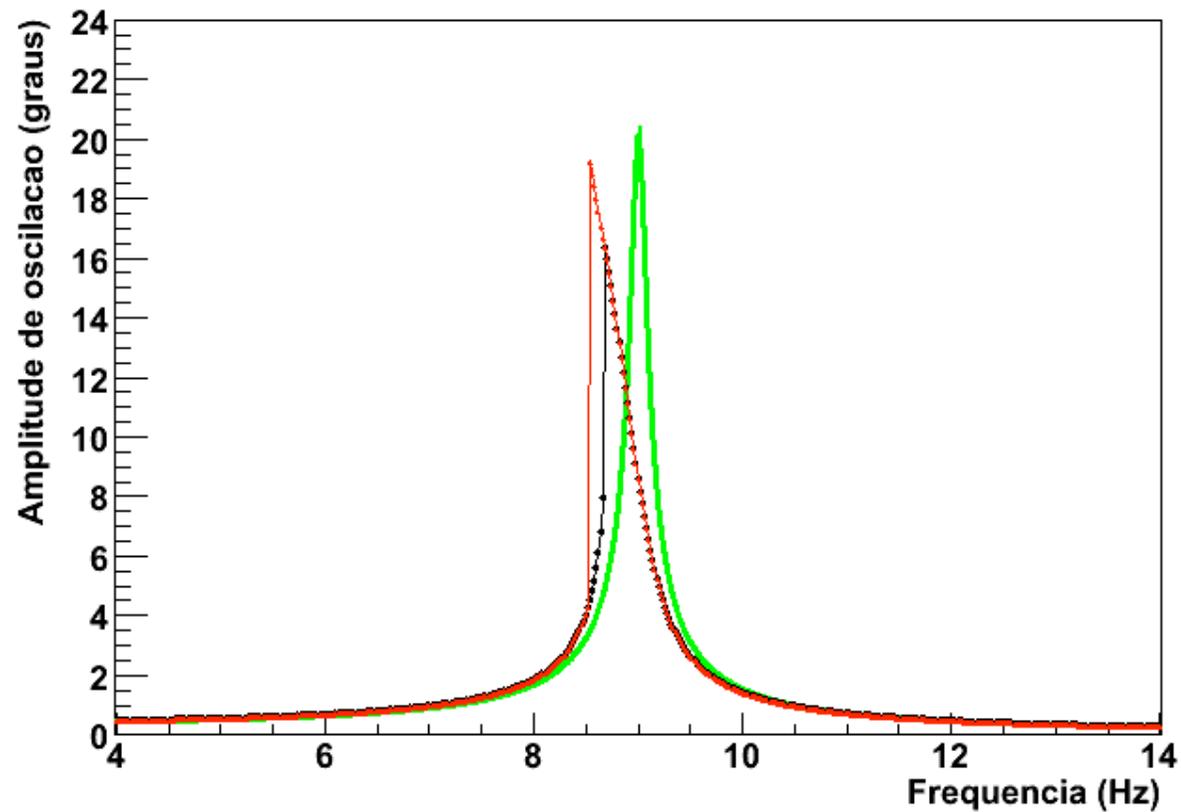
# Comparando previsões teóricas

$\mu/l = 40.00$   $\gamma/l = 1.00$   $B_{Max} = 80.00$   $AMP = 10.00$



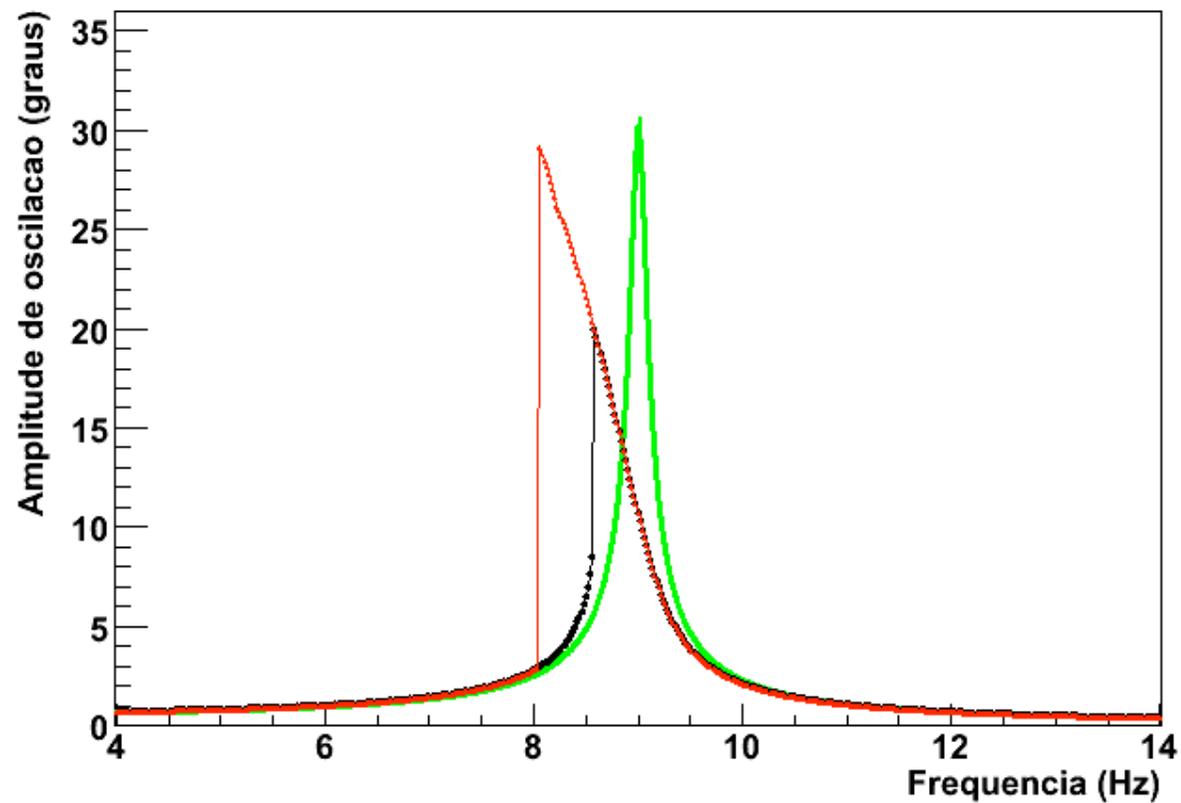
# Comparando previsões teóricas

$\mu/l = 40.00$   $\gamma/l = 1.00$   $B_{Max} = 80.00$   $AMP = 20.00$



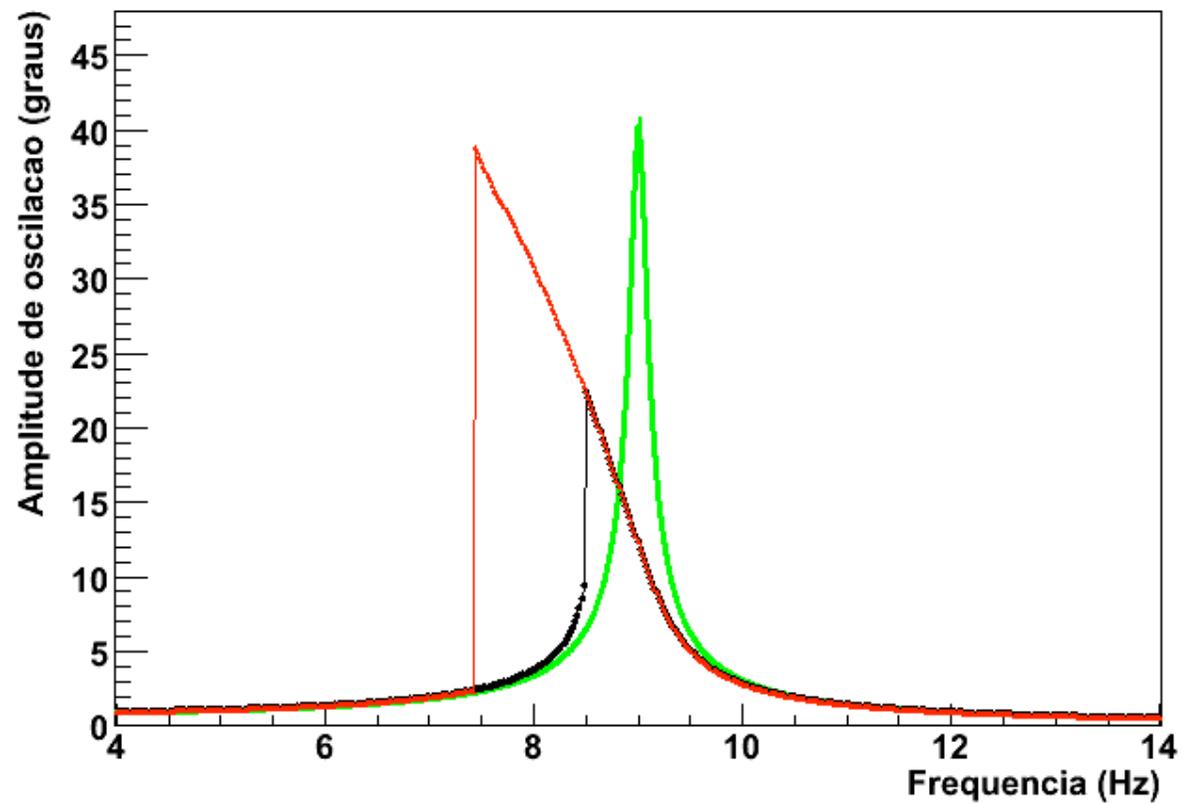
# Comparando previsões teóricas

$\mu/l = 40.00$   $\gamma/l = 1.00$   $B_{Max} = 80.00$   $AMP = 30.00$



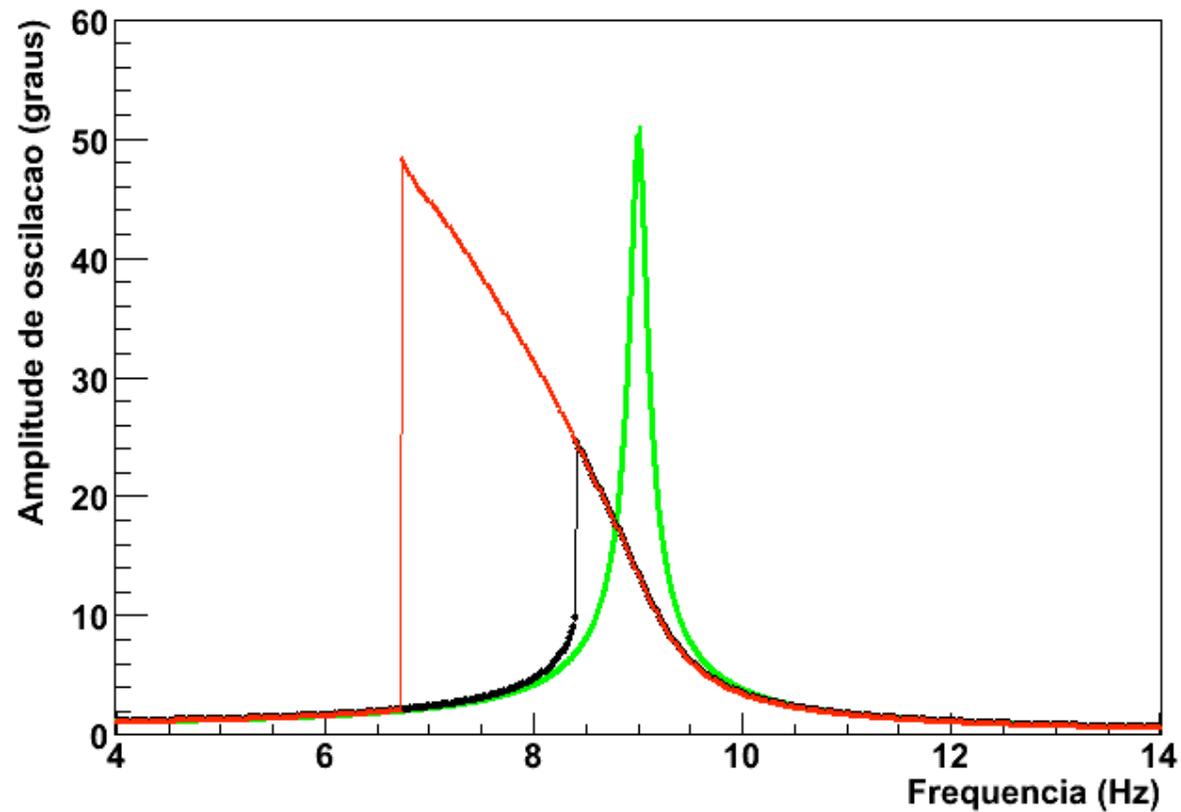
# Comparando previsões teóricas

$\mu/l = 40.00$   $\gamma/l = 1.00$   $B_{Max} = 80.00$   $AMP = 40.00$



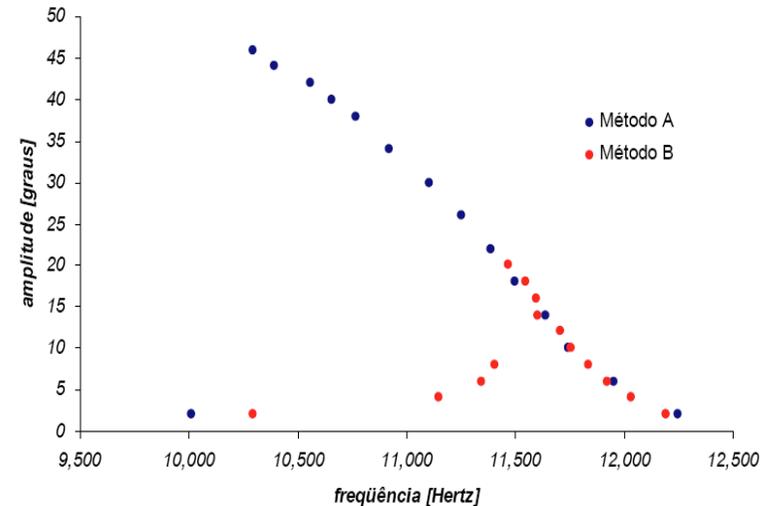
# Comparando previsões teóricas

$\mu/l = 40.00$   $\gamma/l = 1.00$   $B_{Max} = 80.00$   $AMP = 50.00$

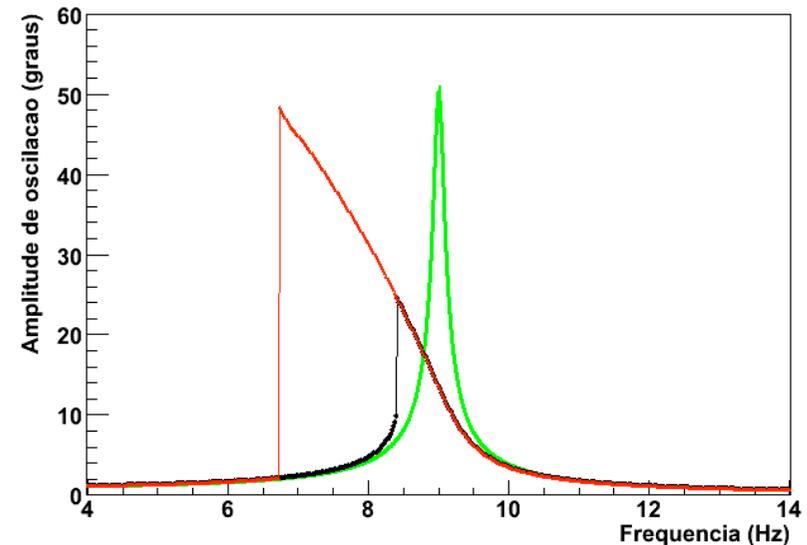


# Comparando previsões teóricas

- Ou seja, a não uniformidade do campo magnético causa a diferença entre os métodos A e B
- Este é um efeito físico mas de características extremamente vinculadas ao método de medida?



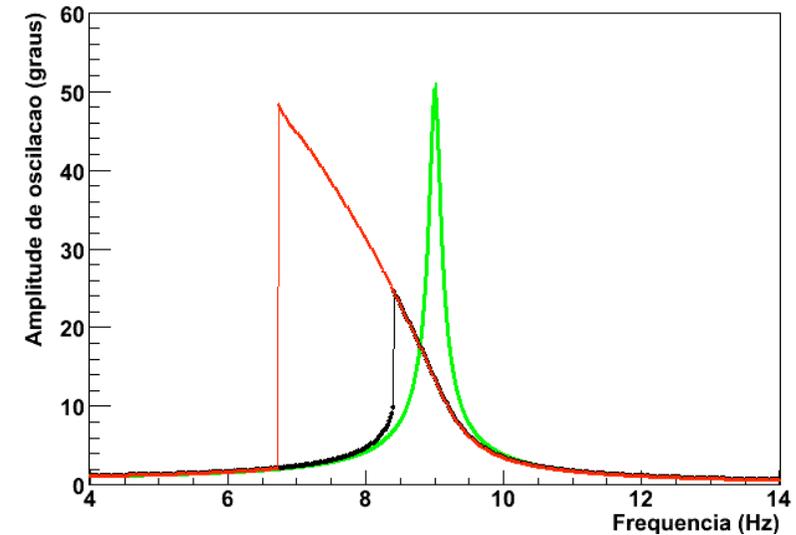
$\mu/l = 40.00$   $\gamma/l = 1.00$   $B_{Max} = 80.00$   $AMP = 50.00$



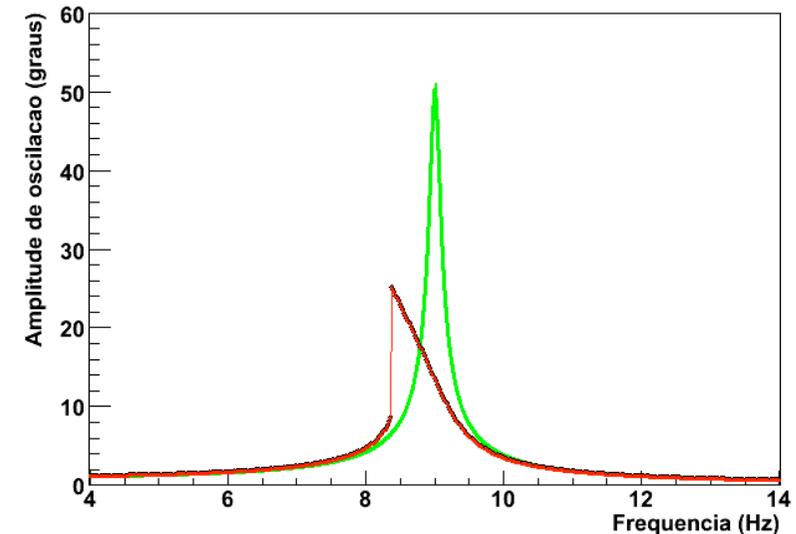
# Comparando previsões teóricas

- Comparando condições iniciais diferentes:
  - Utilizando a situação anterior como condição inicial
  - Desligando o campo perturbador, esperando a bússola parar de oscilar antes de mudar a frequência
    - Neste caso, tanto faz a direção na qual as medidas são realizadas

$\mu/I = 40.00$   $\gamma/I = 1.00$  BMax = 80.00 AMP = 50.00



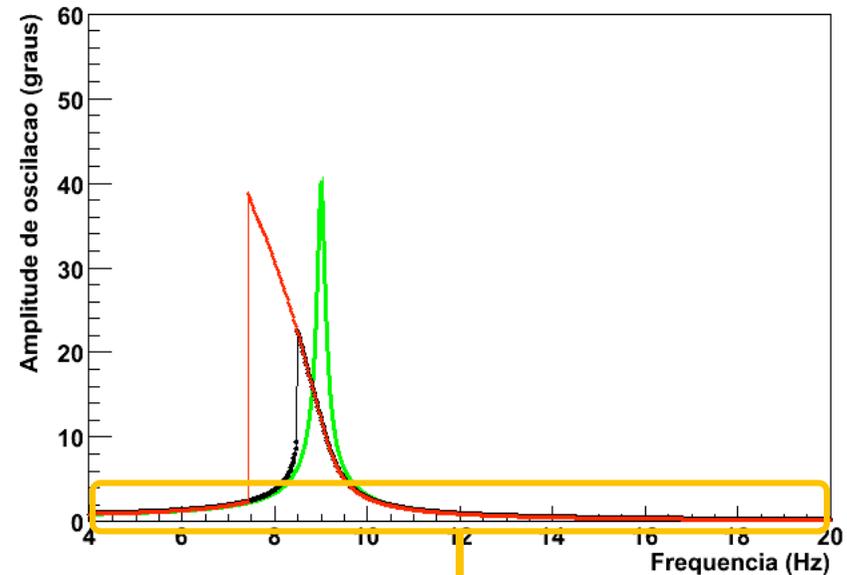
$\mu/I = 40.00$   $\gamma/I = 1.00$  BMax = 80.00 AMP = 50.00



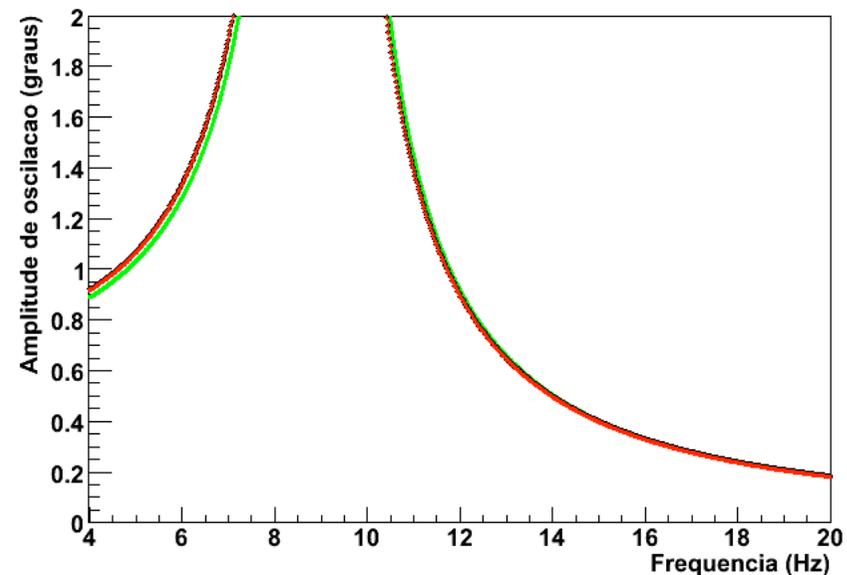
# Outros efeitos

- Alguns grupos também notaram que a bússola oscila em determinadas frequências que não são a de ressonância
  - O que origina isto?
- Vamos, primeiramente olhar a solução do nosso problema
  - Não vemos indício de oscilações secundárias

$\mu/l = 40.00$   $\gamma/l = 1.00$   $B_{Max} = 80.00$   $AMP = 40.00$

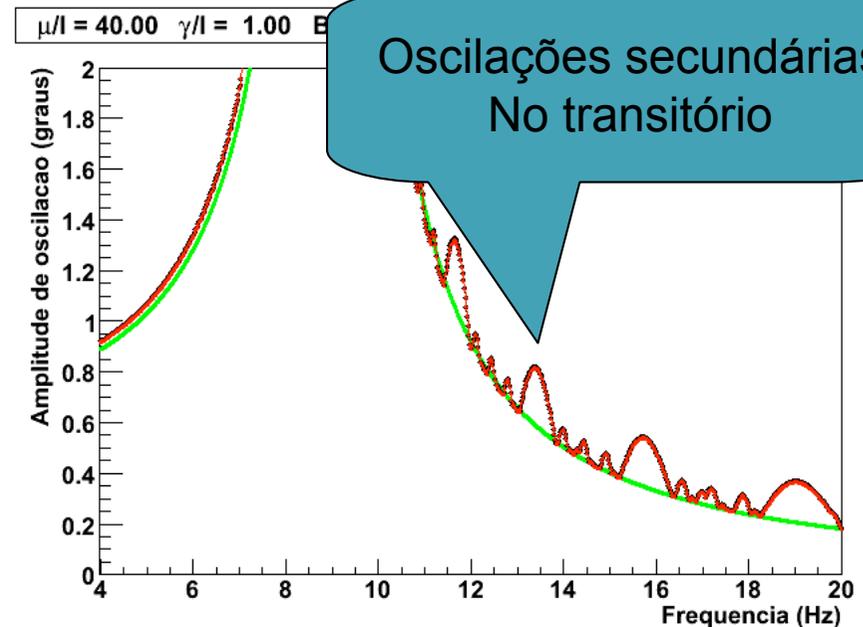
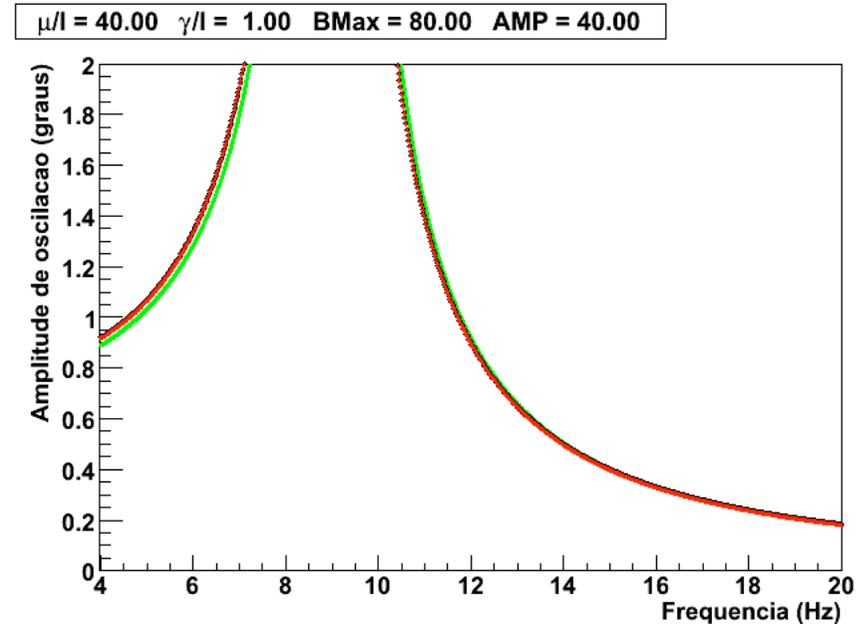


$\mu/l = 40.00$   $\gamma/l = 1.00$   $B_{Max} = 80.00$   $AMP = 40.00$



# Outros efeitos

- Vamos, primeiramente olhar a solução do nosso problema
  - Não vemos indício de oscilações secundárias
- Contudo, esta é a solução estacionária
  - $t \gg t_{inicial}$
- O que ocorre no transitório?
  - $t \sim \text{pequeno}$





# Moral da estória

- Resultados inesperados podem surgir de um experimento
- Se o nosso procedimento está correto isto significa que não há uma compreensão total da Física envolvida
  - Devemos entender onde estão as limitações teóricas empregadas e dar o próximo passo
- Não existem experimentos que “dão errado”

# Resolvendo equações diferenciais numericamente

- Seja uma equação diferencial do tipo

$$y' = f(y, x)$$

- Por exemplo:

$$y' = 9x\sqrt{y}$$

- Como obter  $y(x)$ ?
  - Conhecendo as condições iniciais  $y(0)$  e  $y'(0)$ .

# Método de Euler

- Se eu sei a condição inicial  $y(0)$ , eu posso calcular  $y'(0)$
- A condição  $y(0+dx)$  e  $y'(0+dx)$  eu calculo usando extrapolação linear, ou seja:

$$y(0 + dx) = y(0) + y'(0) \cdot dx$$

$$y'(0 + dx) = f(y(0 + dx), dx)$$

# Método de Euler

- Por exemplo, seja  $y' = 9x\sqrt{y}$   $\{y(0) = 4$

$$y'(0) = 9 \cdot 0 \cdot \sqrt{0} = 0$$

- Tomando  $dx = 0,1$  ( $x=0,1$ )

$$y(0,1) = y(0) + y'(0) \cdot 0,1 = 4 + 0 \cdot 0,1 = 4$$

$$y'(0,1) = 9 \cdot 0,1 \cdot \sqrt{y(0,1)} = 1,8$$

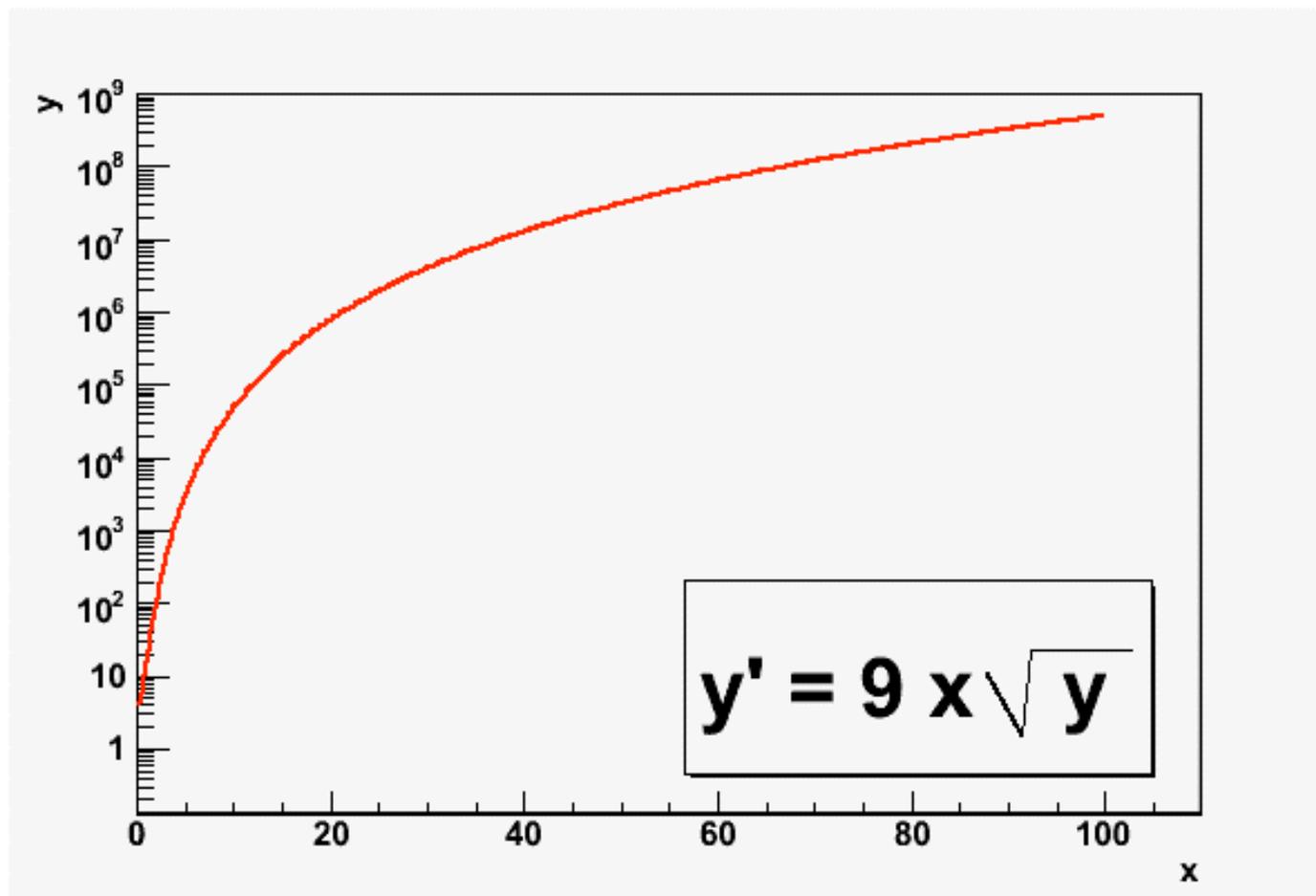
- Para  $x = 0,2$

$$y(0,2) = y(0,1) + y'(0,1) \cdot 0,1 = 4 + 1,8 \cdot 0,1 = 4,18$$

$$y'(0,2) = 9 \cdot 0,2 \cdot \sqrt{y(0,2)} = \dots$$

# Método de Euler

- Por exemplo, seja  $y' = 9x\sqrt{y}$   $\{y(0) = 4$



# Método de Euler

- Equações diferenciais de segunda ordem, do tipo

$$y'' = f(x, y', y)$$

- Também podem ser resolvidas facilmente. Precisamos apenas desmembrá-las em duas equações de primeira ordem e resolver o sistema recursivamente

# Método de Euler

- Exemplo

$$y'' = ay'\sqrt{y} + yx$$

- Fazemos a mudança de variável  $z = y'$ .
- Neste caso, temos o seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$z = y'$$

$$z' = az\sqrt{y} + yx$$

# Método de Euler

$$z = y'$$

$$z' = az\sqrt{y} + yx$$

- Conhecendo  $y(0)$  e  $z(0)$  procedemos da seguinte forma:
  - Calculamos o valor inicial de  $z'$ .

$$z'(0) = az(0)\sqrt{y(0)} + y(0) \cdot 0$$

- Calculamos o próximo valor de  $y$ .

$$y(0 + dx) = y(0) + z(0) \cdot dx$$

- Calculamos o próximo valor de  $z$ .

$$z(0 + dx) = z(0) + z'(0) \cdot dx$$

- Calculamos o próximo valor de  $z'$  e assim por diante

$$z'(dx) = az(dx)\sqrt{y(dx)} + y(dx) \cdot dx$$



# Método de Euler

- O método de Euler é o mais simples de todos
  - Possui muitas limitações quanto à precisão numérica
  - Não deve ser utilizado para fins sérios
- Métodos mais avançados, como o Runge-Kutta são mais indicados
  - O princípio básico é o mesmo
  - Ver, por exemplo, “Numerical Recipes in c”



## Recados finais

- Quando estiverem fazendo o experimento, prestem atenção nas condições teóricas utilizadas para previsões.
- Se estas condições não podem ser respeitadas, pense no que foi jogado para baixo do tapete quando simplificamos o problema.
- A chave para o sucesso está em entender a Física do problema como um todo.



# Recados finais

- Relatório para daqui a 10 dias
  - Sem ser esta segunda-feira, a próxima
- O laboratório continua aberto para medidas que forem necessárias
- Nos procurem para discutir os resultados
- Espero que tenham gostado deste formato de curso