

**Física Experimental IV - 7ª aula**  
**<http://www.dfn.if.usp.br/~suaide/>**

***Alexandre Suaide***

Ed. Oscar Sala

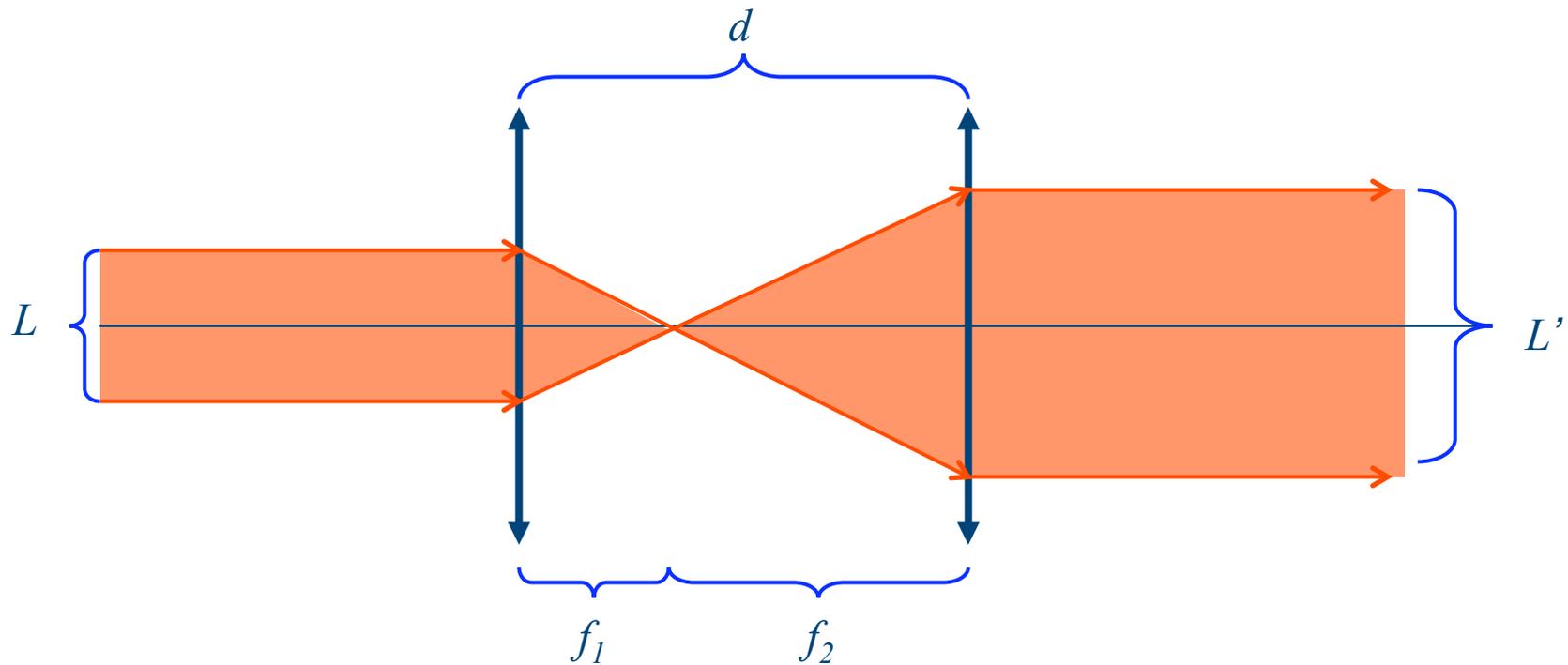
sala 246

ramal 7072

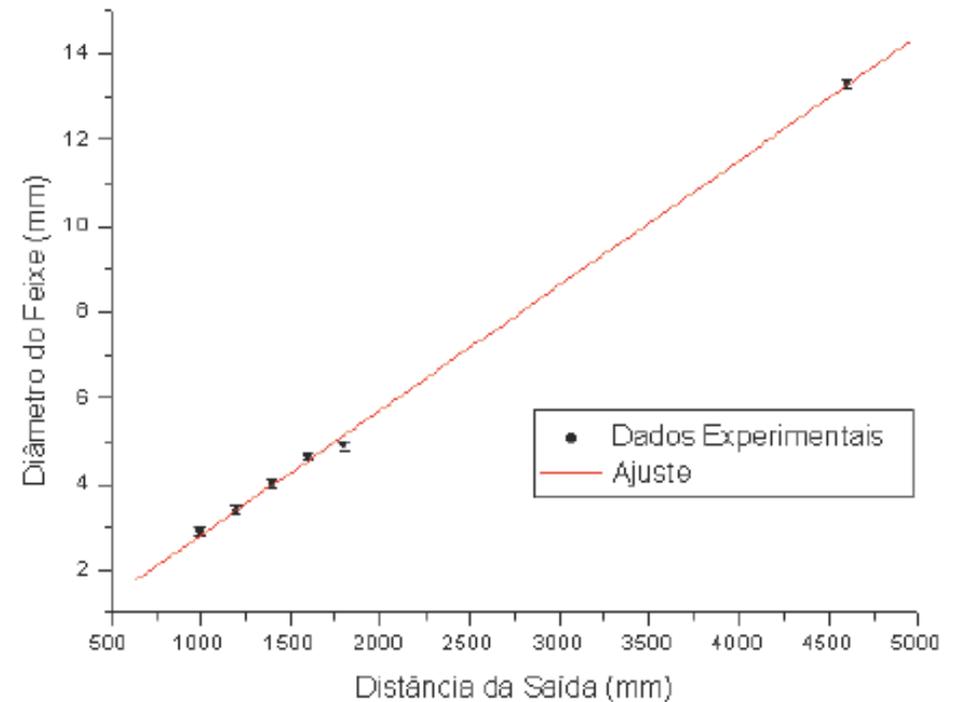
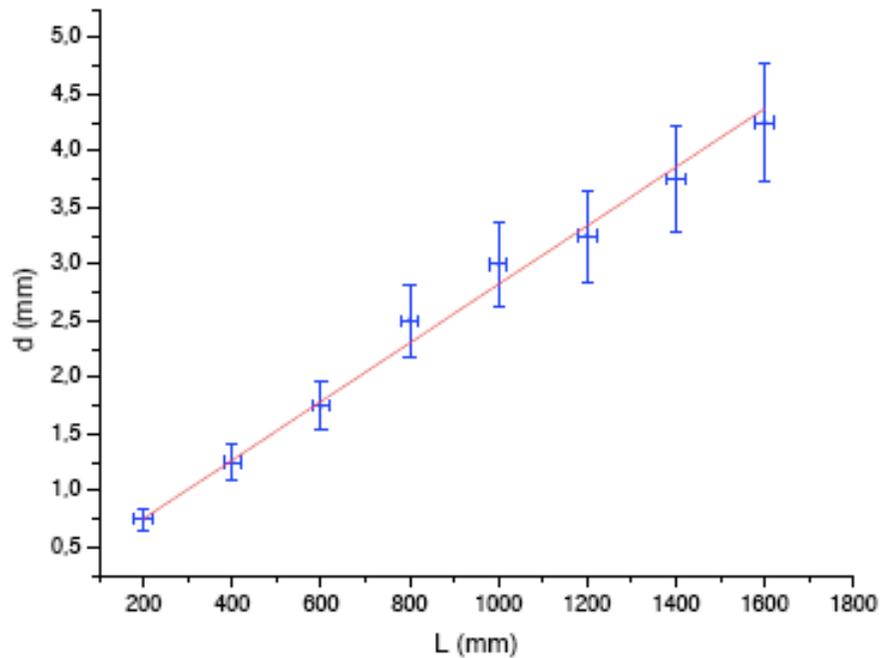
# Objetivos

$$m = \frac{L'}{L} = \frac{f_2}{f_1}$$

- Sistema convergente + convergente



# A divergência do laser diâmetro em função da distância



Para tal, utilizou-se dois métodos independentes: um que exigia a intervenção do medidor e o instrumento de medida (paquímetro), que possivelmente atribuía ao valor medido certa incerteza instrumental, inerente ao processo de medição, e outra trabalhando-se com fotos do anteparo e futura análise das imagens em programa de tratamento de imagens

# A divergência do laser

## diâmetro em função da distância (dois métodos)

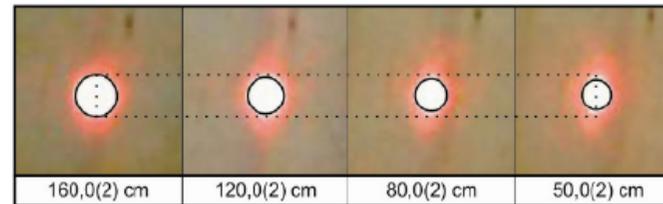
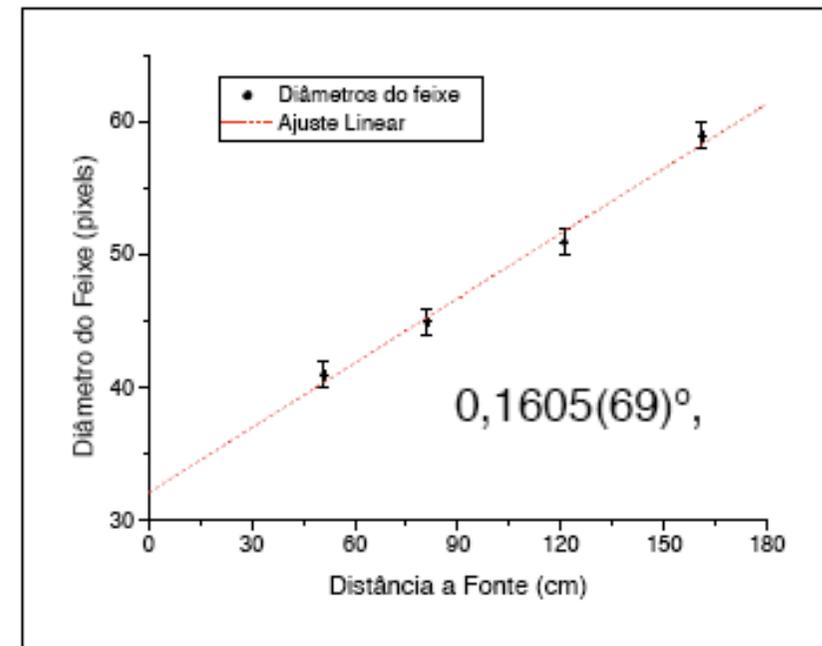
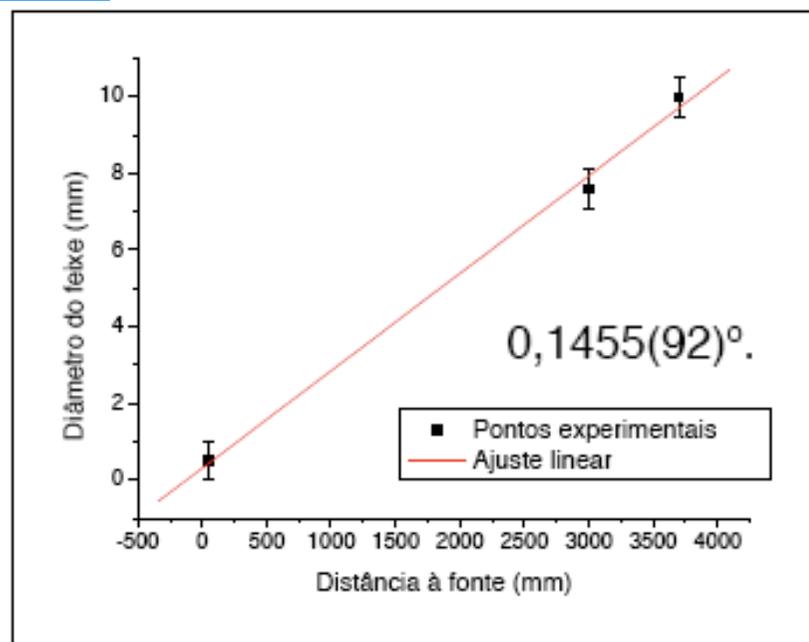
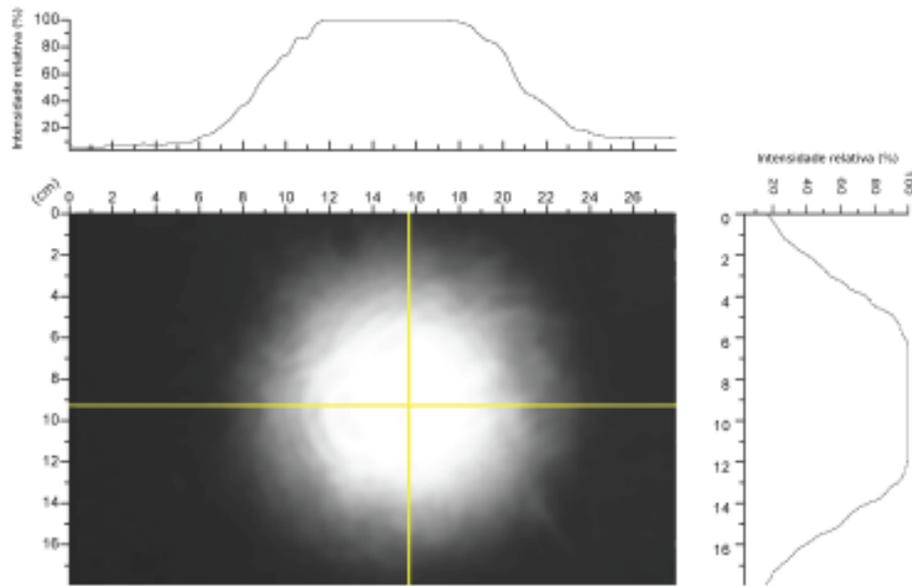


Figura 4: Tamanho do feixe em função da distância a fonte. A linha tracejada indica o diâmetro do feixe em 160,0(2) cm. Os círculos pretos indicam o diâmetro estimado para o feixe.

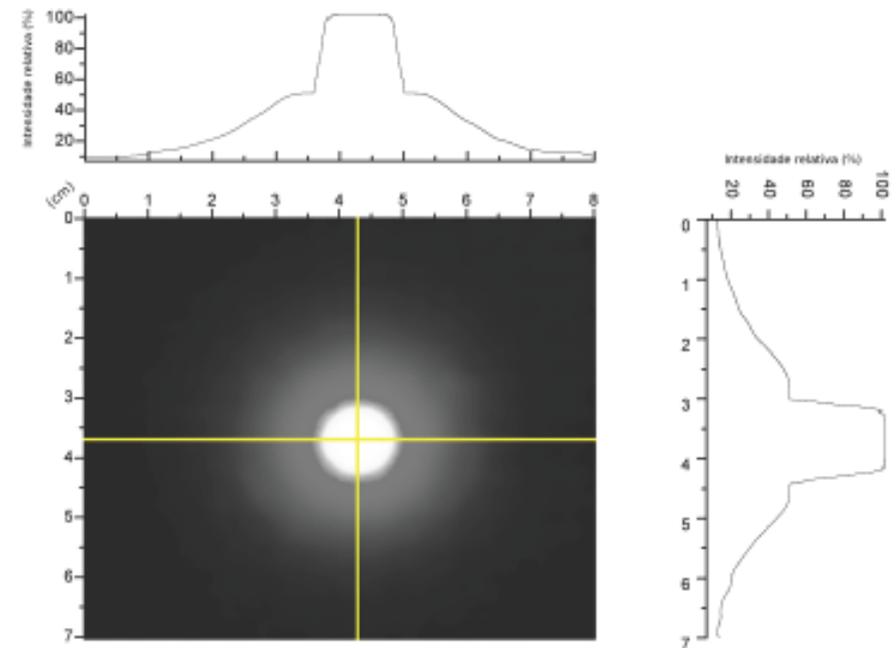


Tirava-se uma foto do feixe incidente sobre um anteparo com uma escala milimetrada e, mediante a aplicação de filtros especiais e análises dos canais de cores da imagem, pôde-se obter um gráfico da intensidade relativa do feixe incidente.

## Qual é a distribuição de luz do LASER?



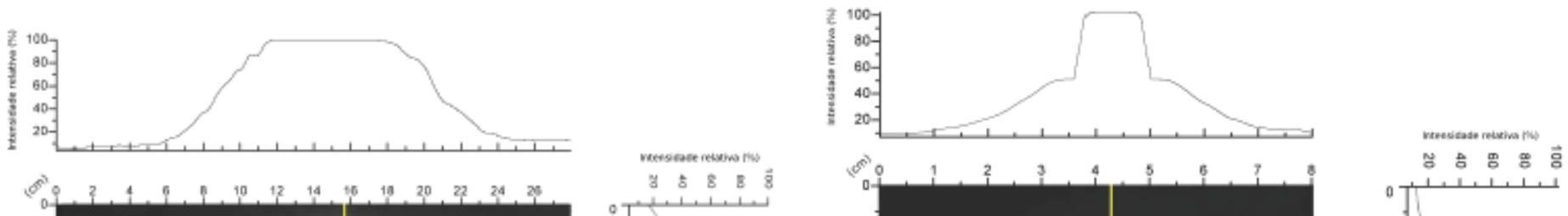
(b) Perfis de intensidade relativa do feixe ao longo dos diâmetros horizontal e vertical.



(b) Perfis de intensidade relativa do feixe ao longo dos diâmetros horizontal e vertical.

Tirava-se uma foto do feixe incidente sobre um anteparo com uma escala milimetrada e, mediante a aplicação de filtros especiais e análises dos canais de cores da imagem, pôde-se obter um gráfico da intensidade relativa do feixe incidente.

## Qual é a distribuição de luz do LASER?



Como se pode ver em ambas as análises, a intensidade do feixe se mantém em um patamar constante no máximo de intensidade, o que o caracteriza um feixe de raios laser. Porém, esta intensidade não cai abruptamente, mas sim gradualmente, gerando um halo.

Notamos que, em nossas análises, para feixes esparsos como os que sofriam ação das lentes, mediamos como diâmetro do feixe a região compreendida entre os pontos de intensidade aproximadamente 50% da intensidade máxima. As duas análises para este tipo de laser forneceram os valores de 1,67 e 1,43 para a razão entre a largura do patamar constante e a largura entre os pontos de intensidade 50%.

(b) Perfis de intensidade relativa do feixe ao longo dos diâmetros horizontal e vertical.

(b) Perfis de intensidade relativa do feixe ao longo dos diâmetros horizontal e vertical.

# A divergência do laser

## Divergência do LASER [mRad]

**$6 \pm 3$**

**$0.72 \pm 0.06$**

$2.32 \pm 0.15$

$2.59 \pm 0.07$

$2.33 \pm 0.16$

$2.56 \pm 0.10$

$2.90 \pm 0.04$

$2.41 \pm 0.17$

$2.4 \pm 0.1$

**$7.2 \pm 0.6$**

**$21 \pm 3$**

- Há algum parâmetro de comparação que podemos utilizar?
- Qual é a origem da divergência do LASER?

# A divergência do laser

Sabe-se que para lasers comerciais valores no intervalo  $0,25 - 7 \text{ mrad}$  são esperados para a divergência [1], portanto pode-se dizer que o valor encontrado está dentro do esperado. Ainda assim, uma estimativa para o valor da divergência pode ser obtida teoricamente sabendo que:  $\Phi \approx 2,44 \frac{\lambda}{d}$  e que o diâmetro inicial  $w$  de  $d_{inicial} = 0,75 \pm 0,09 \text{ mm}$ . O laser de hélio-neônio apresenta  $\lambda = 632,8$  e encontra-se que  $\Phi_{teorico} = 2,06 \pm 0,25 \text{ mrad}$ . A compatibilidade entre os valores teórico e encontrado é de:  $Z = 2$ .

[1] Hecht, E., "Optics", 3ª ed., Addison Wesley Longman, Inc., 1998



## Esta divergência é importante?

$$\underbrace{\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}}_{P_2} = M \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}}_{P_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & s_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_{L_2 \rightarrow i}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{pmatrix}}_{M_{L_2}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_{L_2 \rightarrow L_1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{pmatrix}}_{M_{L_1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & s_o \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_{o \rightarrow L_1}} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f_1} & d \\ -\frac{1}{f_2} \left(1 - \frac{d}{f_1}\right) - \frac{1}{f_1} & 1 - \frac{d}{f_2} \end{pmatrix}$$

Para  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ , devemos ter  $d = f_1 + f_2$ , como ilustrado na figura 1.

De acordo com a equação matricial acima, e considerando  $d = f_1 + f_2$ , temos  $\varphi_2 = -\frac{f_1}{f_2}\varphi_1$ . Para focos iguais a 1cm e 20cm, temos que o raio emergente converge com um ângulo 20 vezes menor que o ângulo de incidência. Para um ângulo de  $1^\circ$ , ou seja,  $0,017rad$ , temos um ângulo de emergência de  $8,7 \cdot 10^{-2}rad$ , ou seja, quase paralelo.

# Esta divergência é importante?

Quando queremos que o feixe emergente da lente 2 seja paralelo ao eixo da lente e que o diâmetro do laser seja aumentado 20 vezes, mesmo quando o feixe incidente da lente 1 não é paralelo ao eixo da lente (divergência do laser sendo diferente de zero) temos a seguinte matriz de transformação M é:

$$M = \begin{bmatrix} 20 & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

ou seja,  $C \neq 0$ . Dessa forma, igualando M à M2 temos que:

$$-\frac{1}{f_2} + \frac{d}{f_2 f_1} - \frac{1}{f_1} = C$$

$$d_{teorico2} = f_1 + f_2 + C \cdot f_1 \cdot f_2$$

Como  $f_1$  e  $f_2$  são positivos, já que as duas lentes são convergentes, temos, a partir da equação acima, que a distância entre as lentes tem que aumentar quando os feixes incidentes na lente 1 são divergentes. Sabendo  $r_1 = \frac{L}{2}$ , temos que

$r_1 = 0,060 \pm 0,004cm$ . Dessa forma obtemos que  $C = 0,03867 \pm 0,0027 \frac{rad}{cm}$  e

$$d_{teorico2} = 21,8 \pm 1,5cm$$

Comparando o valor de  $d_{teorico1}$  com a diferença entre  $d_{teorico2}$  e  $d_{teorico1}$  obtivemos:

$$\frac{d_{teorico2} - d_{teorico1}}{d_{teorico1}} = 0,0367$$

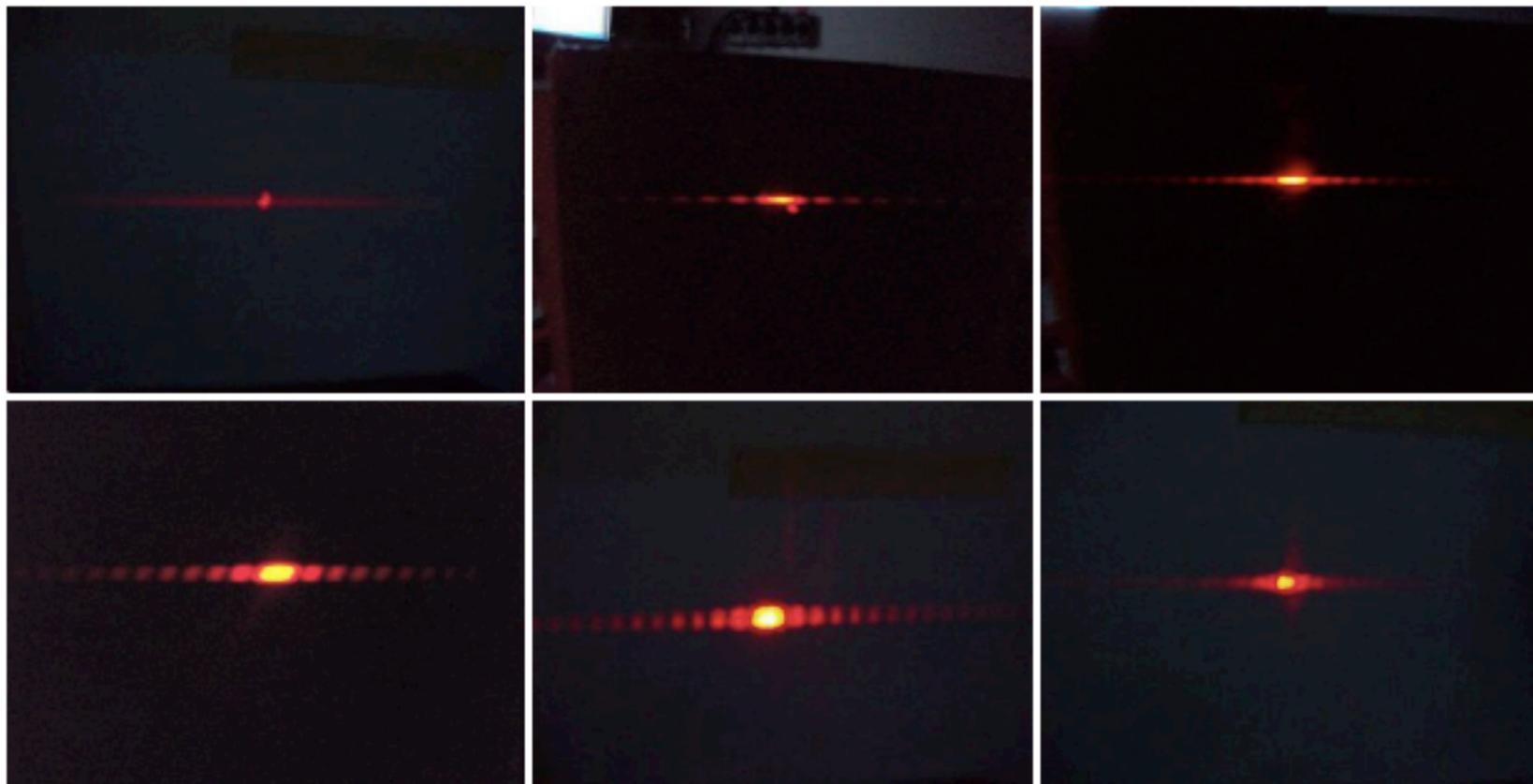
que vale 3,33% da incerteza de  $d_{teorico1}$ .

Como a razão acima é muito pequena em relação à incerteza de  $d_{teorico1}$ , nosso experimento não é sensível à divergência do feixe de laser.

# Figuras de difração

fenda simples

$$d \sin \theta = m\lambda$$



# Figuras de difração

fenda dupla

$$d \sin \theta = m \lambda$$

$$a \sin \theta = \left( n + \frac{1}{2} \right) \lambda$$

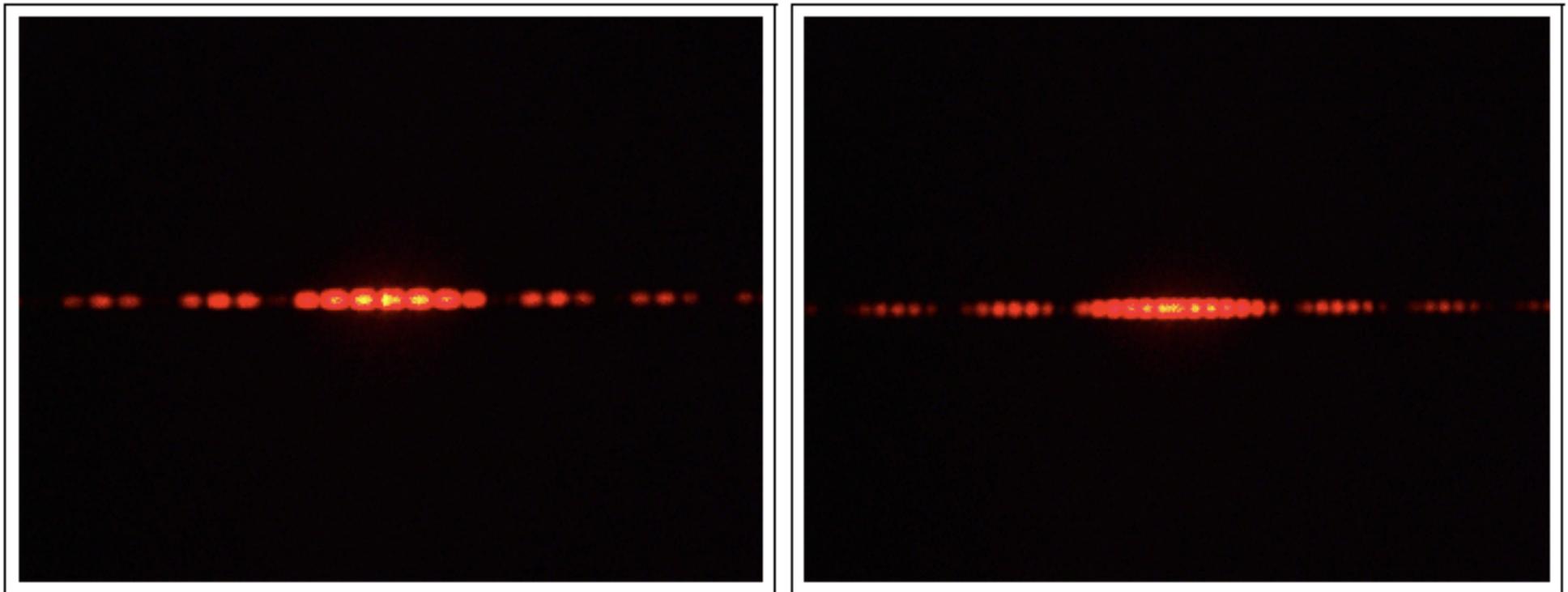
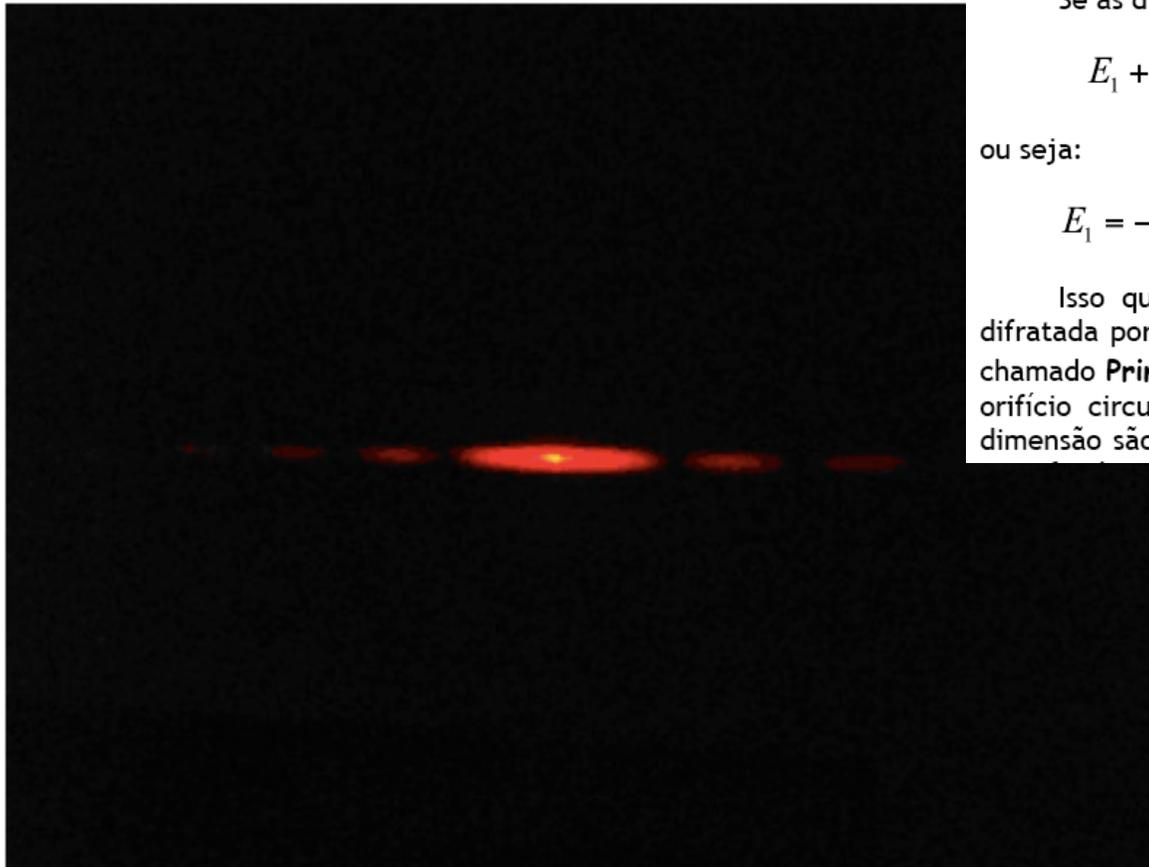


Figura 5: Figuras de difração para duas fendas duplas diferentes.

# Figuras de difração

## Fio de cabelo



*Figura 8 – fio de cabelo*

Se as duas superfícies estão presentes simultaneamente:

$$E_1 + E_2 = 0 \quad (4.16)$$

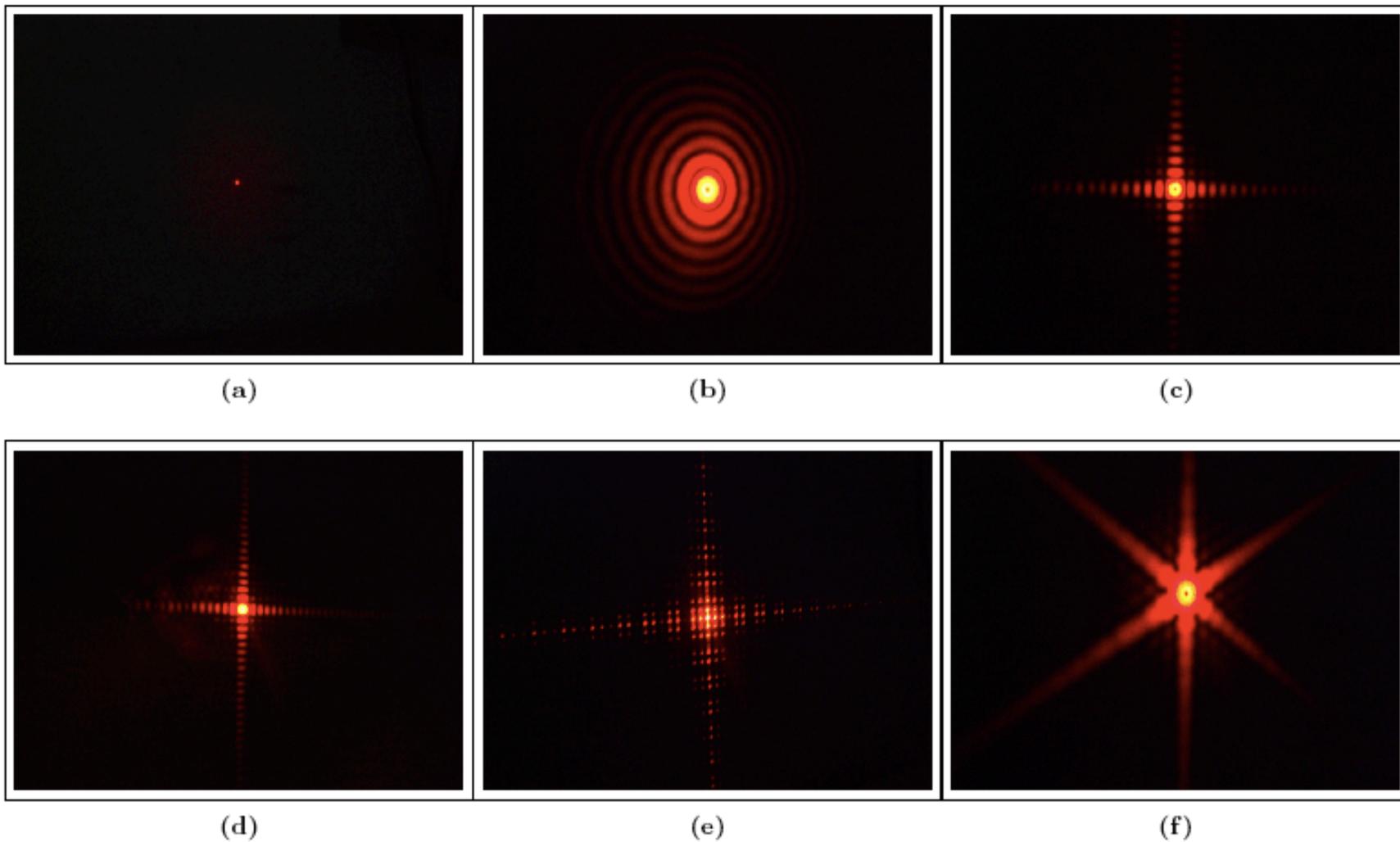
ou seja:

$$E_1 = -E_2 \quad (4.17)$$

Isso quer dizer que as intensidades, ou irradiâncias, da luz difratada por obstáculos (telas) complementares são iguais. Esse é o chamado **Princípio de Babinet**. Assim, o espectro de difração de um orifício circular e o espectro de difração de um disco de mesma dimensão são iguais. Esse princípio vale também, por exemplo, para

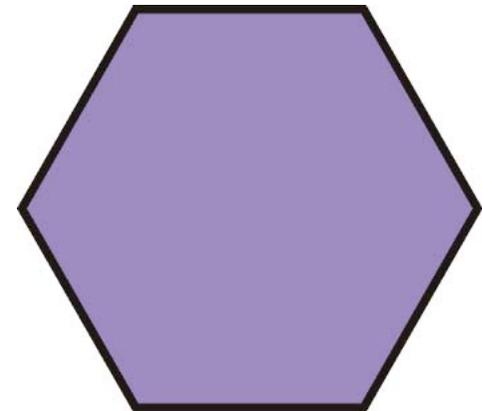
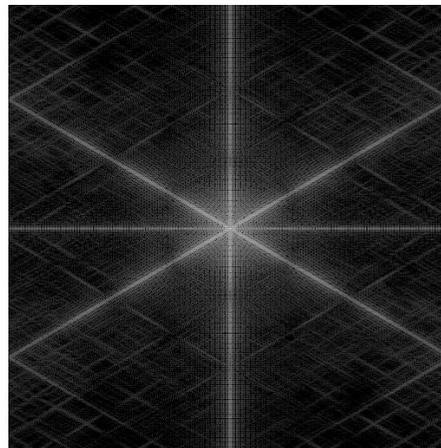
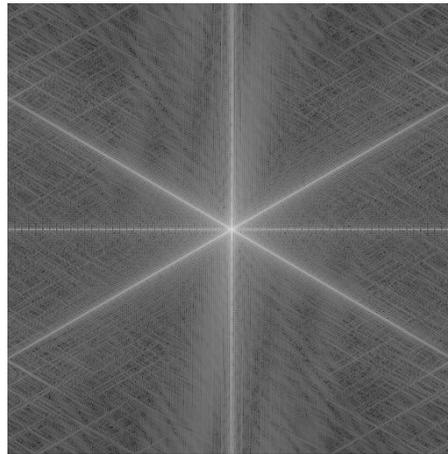
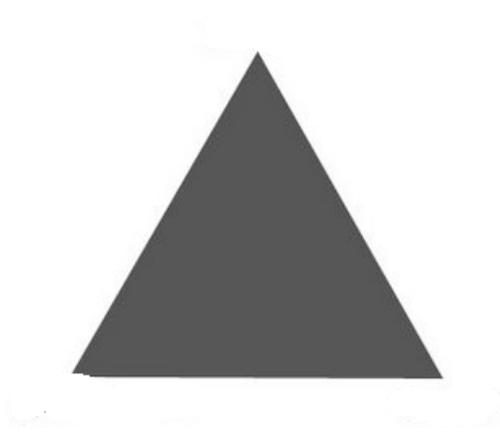
# Figuras de difração

## Outras figuras



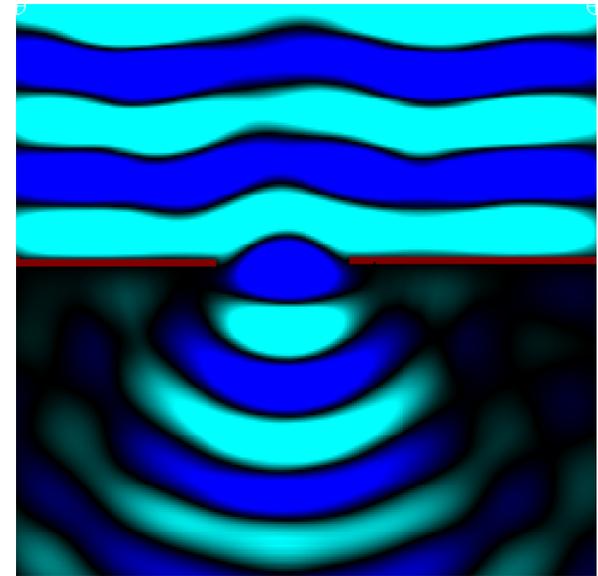
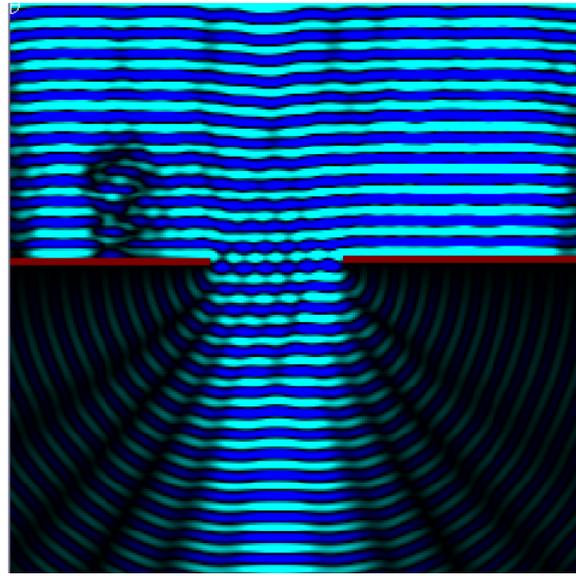
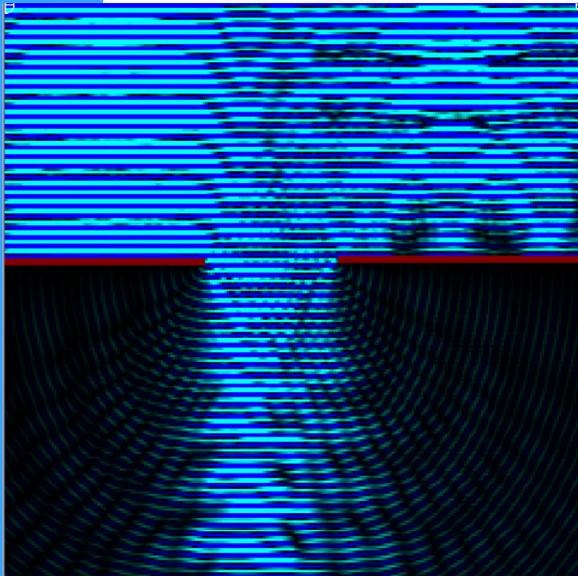
# Figuras de difração

## triângulo e hexágono



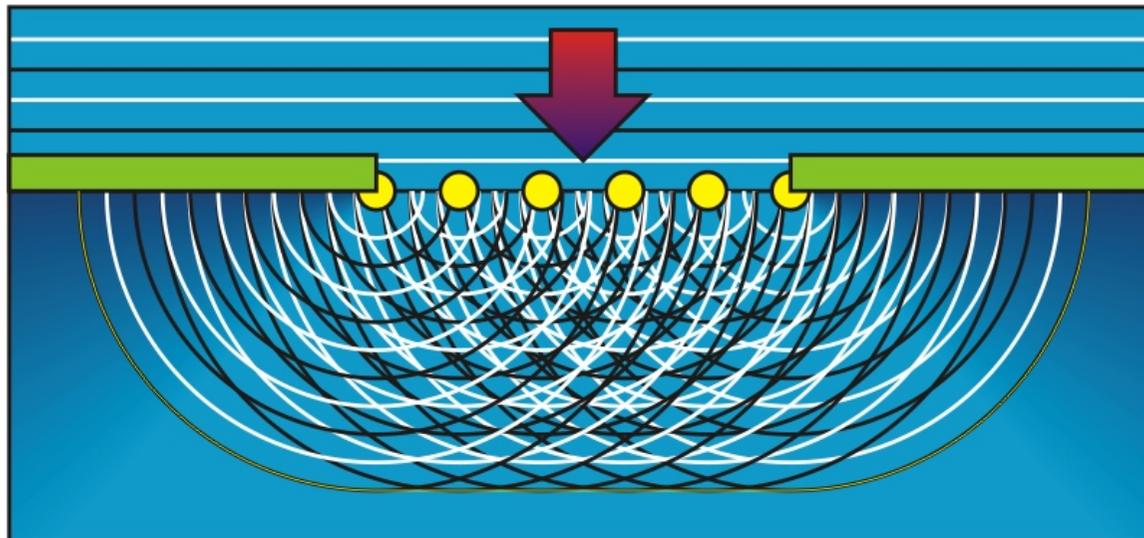
# Dependência das dimensões dos obstáculos

- Ondas de comprimento muito menor que as dimensões do obstáculo sofrem pouca difração
  - <http://sampa.if.usp.br/~suaide/applets/falstad/mirror1/ripple/>



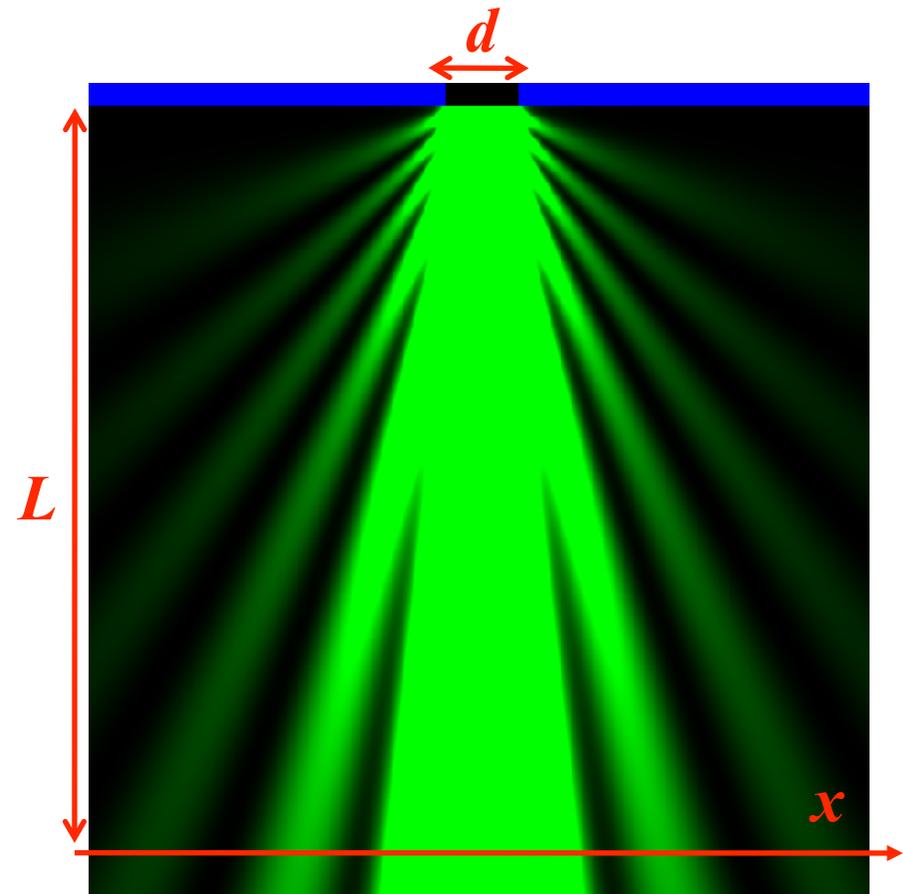
# Explicando o fenômeno de difração

- Princípio de Huygens-Fresnel
  - Cada ponto de uma frente de onda (não obstruído) funciona como uma fonte emissora puntiforme esférica
  - A onda resultante consiste da superposição de todas as ondas esféricas, levando em consideração a fase entre elas



# O estudo de uma fenda simples

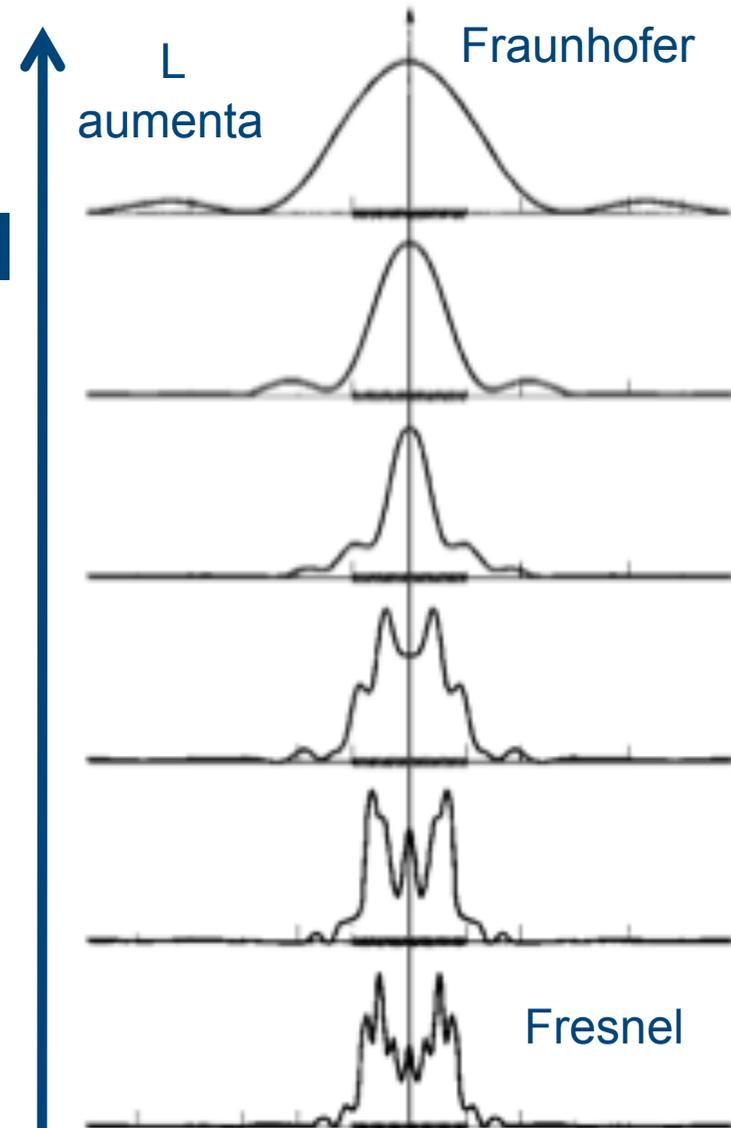
- Seja uma fenda de largura  $d$ .
- Se a largura  $d$  for comparável com o comprimento de onda  $\lambda$ , ocorre difração.
- Se colocarmos um anteparo a uma distância  $L$ , muito maior que  $d$ , qual é a intensidade luminosa ao longo do eixo  $x$ ?



## Porque $L \gg d$ ?

- Dois limites
  - Difração de Fresnel
    - Próximo ao obstáculo
    - Cálculos complexos
      - Efeitos de borda importantes
  - Difração de Fraunhofer
    - Longe do obstáculo
    - Muito mais simples de calcular
- Número de Fresnel
  - $F \ll 1$  (Fraunhofer)
  - $F \gg 1$  (Fresnel)

$$F = \frac{d^2}{\lambda L}$$



# Generalizando a difração de Fraunhofer

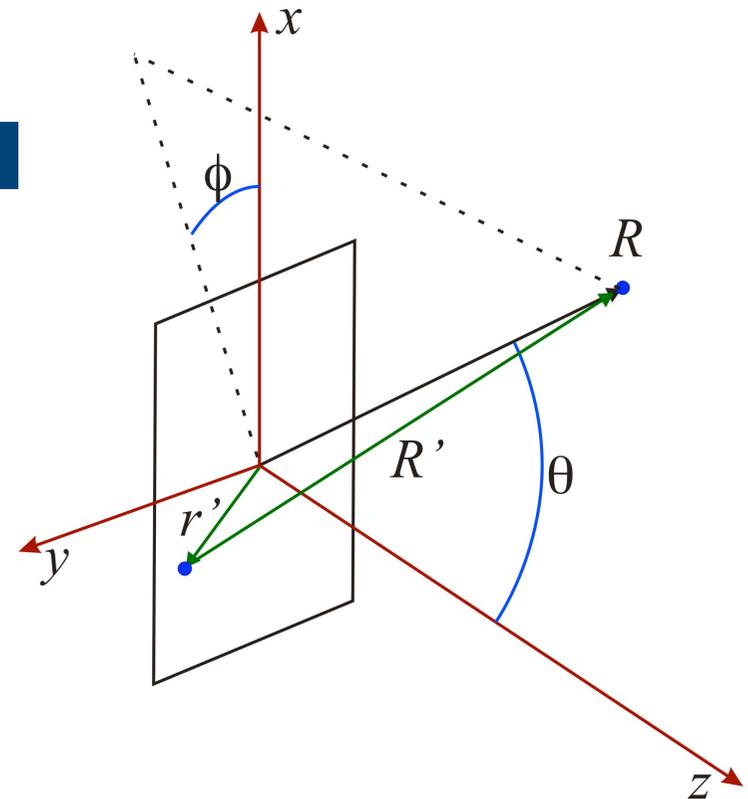
- Formalismo complexo para campo elétrico

$$\hat{E} = E_0 e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

por simplicidade

$$\hat{E} = E_0 e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

- Qual o campo elétrico no ponto R?



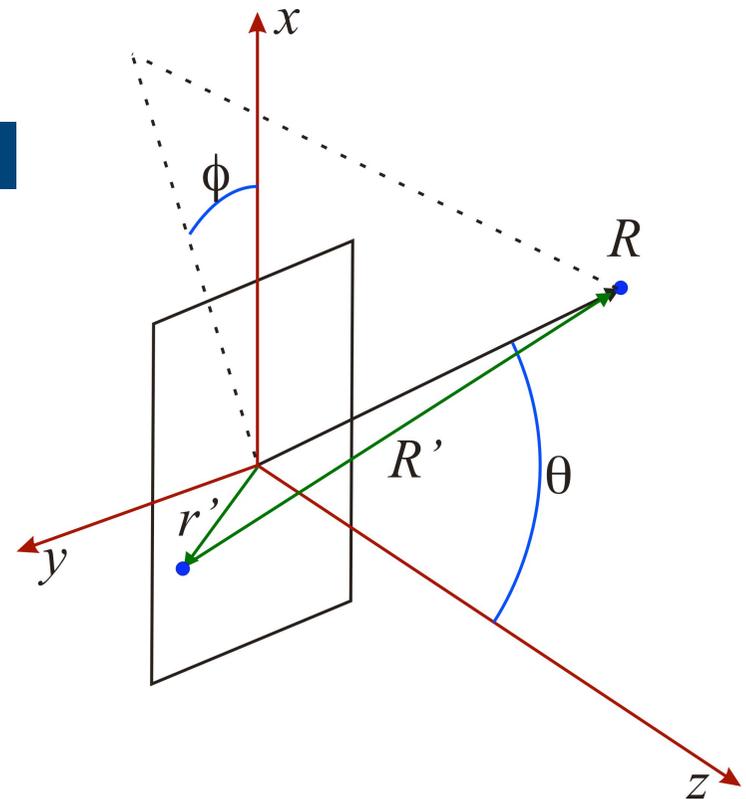
# Generalizando a difração de Fraunhofer

- Na posição  $R$ , o campo devido ao ponto em  $r'$  vale:

$$\hat{E}_{r'}(\vec{R}) = \frac{E_0(r')}{R'} e^{j\vec{k} \cdot \vec{R}'}$$

- O campo total é dado por:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \int \frac{E_0(r')}{R'} e^{j\vec{k} \cdot \vec{R}'} dx dy$$



# Generalizando a difração de Fraunhofer

- Sabemos que, para grandes distâncias:

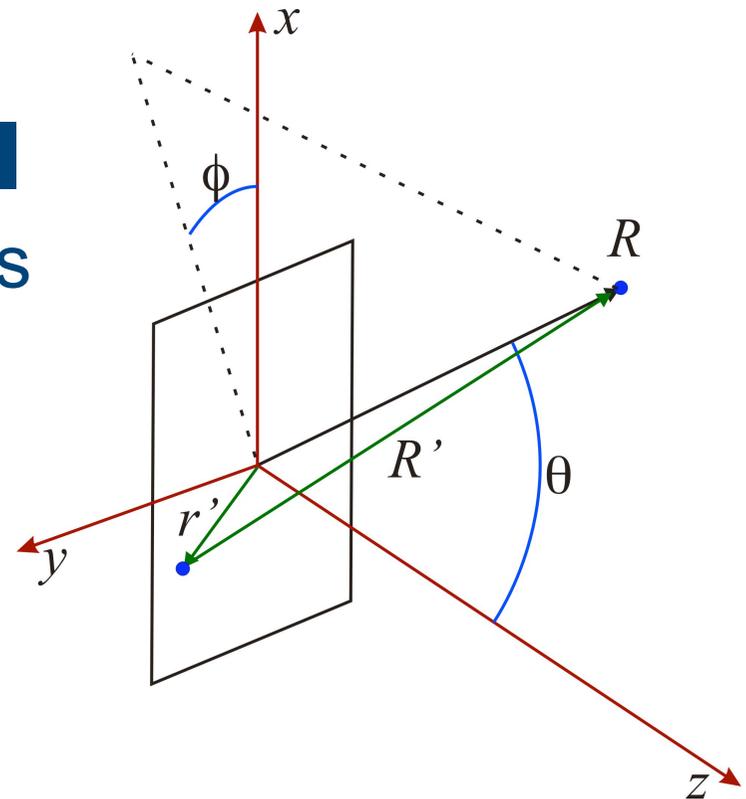
$$\vec{k} = k\hat{r}$$

$$\vec{R}' = \vec{R} - \vec{r} = R\hat{r} - \vec{r}'$$

- Assim:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \int \frac{E_0(\vec{r}')}{R'} e^{j(kR - \vec{k} \cdot \vec{r}')} dx dy$$

$$\hat{E}(\vec{R}) = e^{jkR} \int \frac{E_0(\vec{r}')}{R'} e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}'} dx dy$$



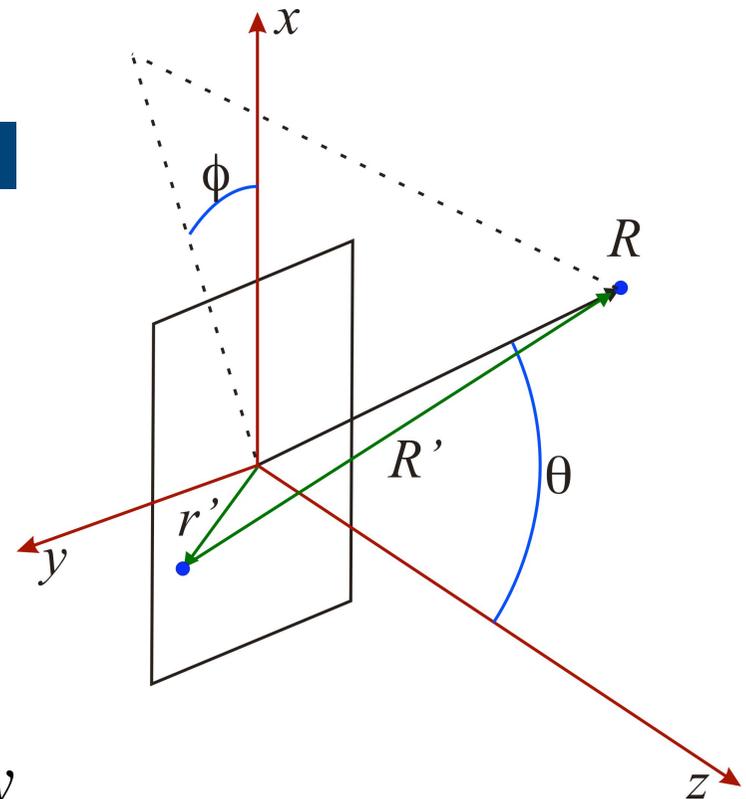
# Generalizando a difração de Fraunhofer

- Na condição de Fraunhofer

$$R' = R \text{ (módulo)}$$

- Assim:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(r') e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}'} dx dy$$



# Generalizando a difração de Fraunhofer

- Quem é  $\vec{k} \cdot \vec{r}'$  ?

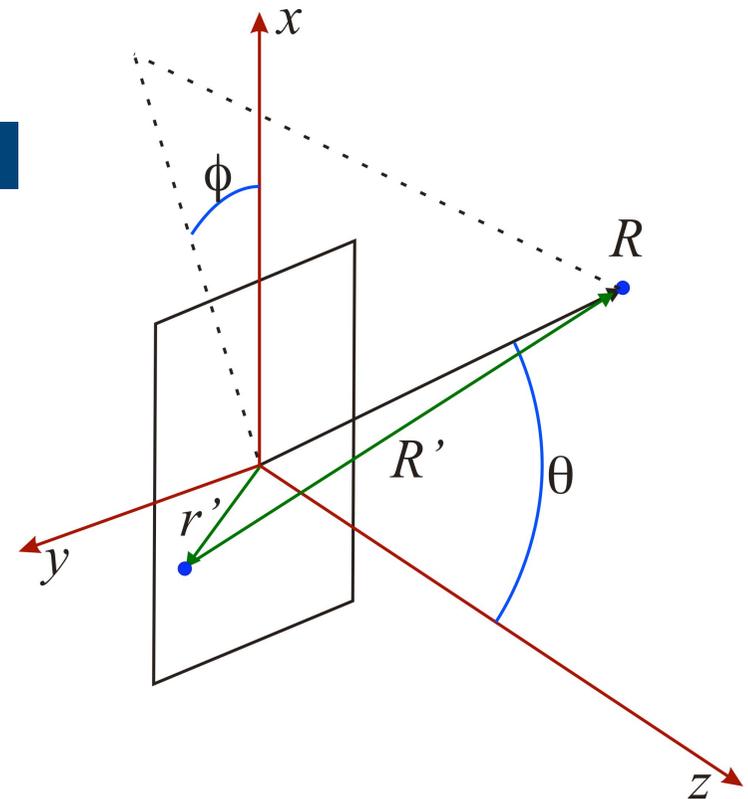
$$\vec{r}' = x\hat{x} + y\hat{y}$$

$$\vec{k} = k\hat{r} = (k \sin \theta \cos \phi)\hat{x} + (k \sin \theta \sin \phi)\hat{y} + (k \cos \theta)\hat{z}$$

- Assim:

$$\vec{k} \cdot \vec{r}' = k \sin \theta \cos \phi x + k \sin \theta \sin \phi y$$

- Definindo  $\begin{cases} k_x = k \sin \theta \cos \phi \\ k_y = k \sin \theta \sin \phi \end{cases} \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r}' = k_x x + k_y y$



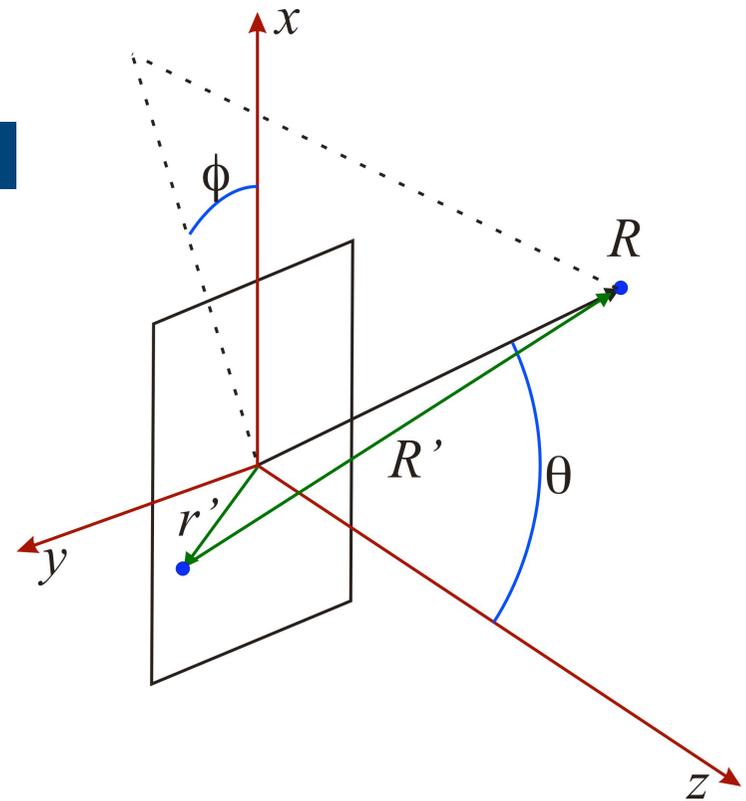
# Generalizando a difração de Fraunhofer

- A expressão para o campo

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(r') e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}'} dx dy$$

- Torna-se:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy$$

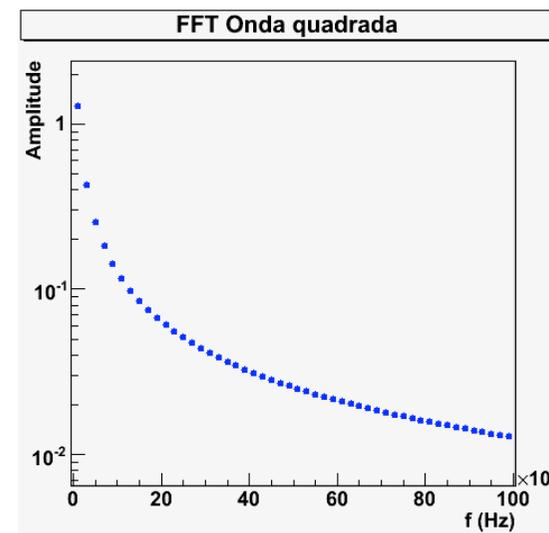
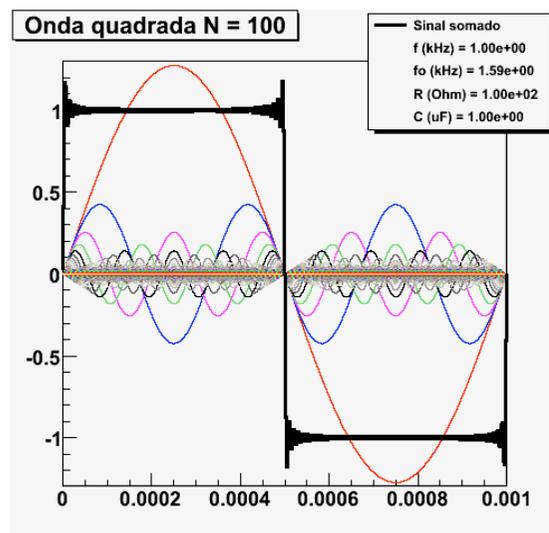


# Lembrando: Séries de Fourier

- Aula 2 – Série de Fourier em uma dimensão

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnx} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-jnx} dx$$

- Transformada de Fourier



# Lembrando: Séries de Fourier

- Transformada de Fourier em 2D

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{j(nx+my)}$$

$$c_{nm} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) e^{-j(nx+my)} dx dy$$

- No caso da difração de Fraunhofer

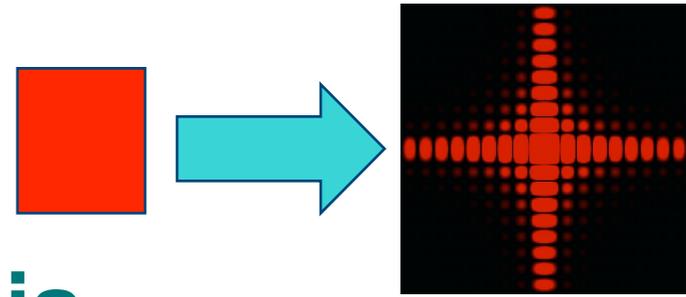
$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy$$

# Difração e transformada de Fourier

- A figura de difração está relacionada à transformada de Fourier do objeto iluminado

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x,y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy$$

A transformada de Fourier se dá no campo elétrico. Contudo, medimos intensidade luminosa, que é proporcional a  $E^2$ .



## Freqüências espaciais

- A intensidade luminosa em uma dada posição está relacionada às componentes da T.F. para cada freqüência espacial

$$\hat{E}(\vec{R}) \rightarrow E(R_x, R_y) \rightarrow E(k_x, k_y)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \begin{cases} k_x = k \sin \theta \cos \phi \\ k_y = k \sin \theta \sin \phi \end{cases}$$

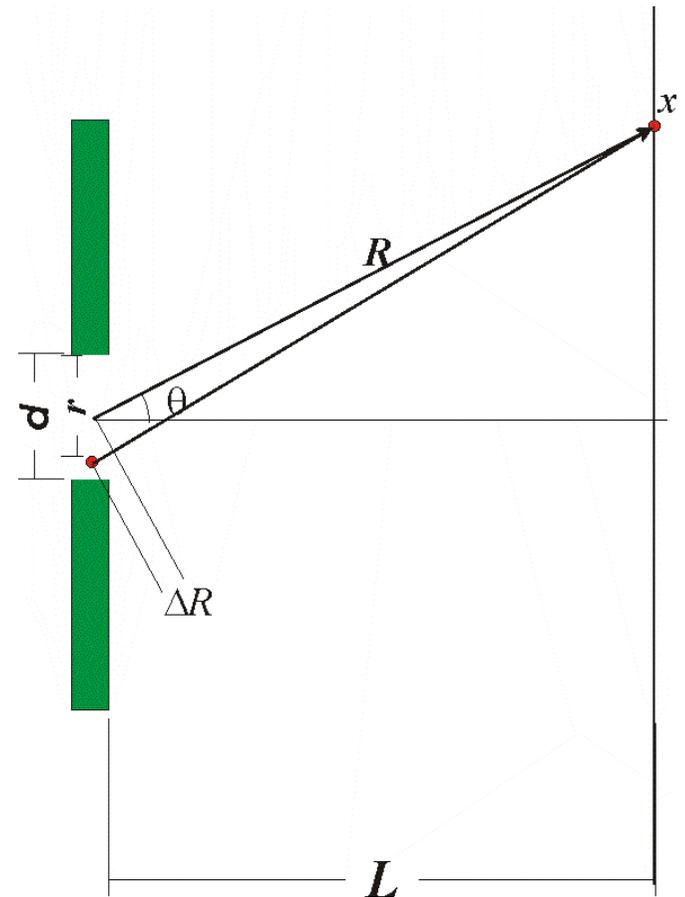
# O estudo de uma fenda simples em 1D

- O problema em 2D se resume a uma dimensão:

$$\phi = 0 \Rightarrow \begin{cases} k_x = k \sin \theta \cos \phi = k \sin \theta \\ k_y = k \sin \theta \sin \phi = 0 \end{cases}$$

- O campo elétrico em um ponto  $x$  qualquer, distante da fenda vale:

$$\begin{aligned} \hat{E}(\vec{R}) &= \frac{e^{jkR}}{R} \int_{-d/2}^{d/2} E_0 e^{-jk_x x} dx \\ &= \hat{C} \int_{-d/2}^{d/2} e^{-jk_x x} dx \end{aligned}$$



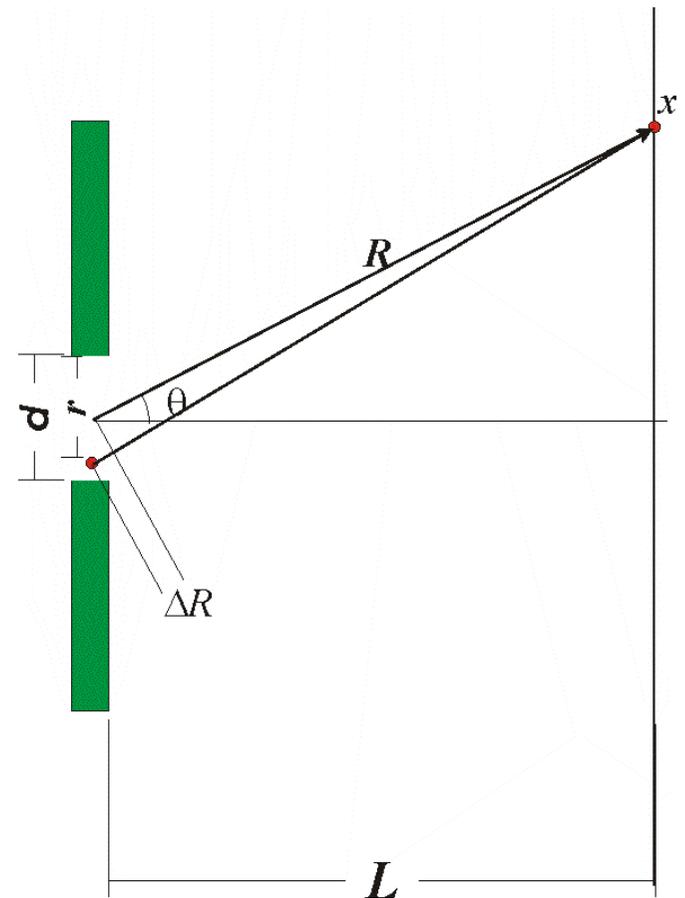
# O estudo de uma fenda simples em 1D

- Ou seja

$$\hat{E}(\vec{R}) = \hat{C} \int_{-d/2}^{d/2} e^{-jk_x x} dx$$

- Que resulta em:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{\hat{C}}{jk_x} \left( e^{jk_x \frac{d}{2}} - e^{-jk_x \frac{d}{2}} \right)$$



# O estudo de uma fenda simples em 1D

- Sabendo que:

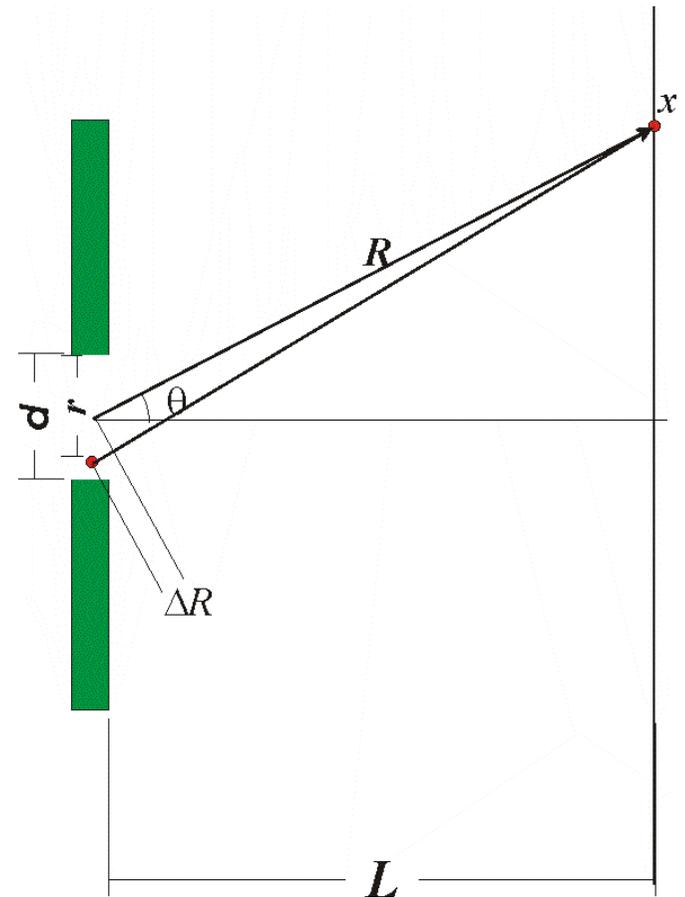
$$\sin \alpha = \frac{1}{2j} (e^{j\alpha} - e^{-j\alpha})$$

- Temos que:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{\hat{D}}{k_x} \sin\left(\frac{k_x d}{2}\right)$$

- Lembrando que:

$$k_x = k \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta$$

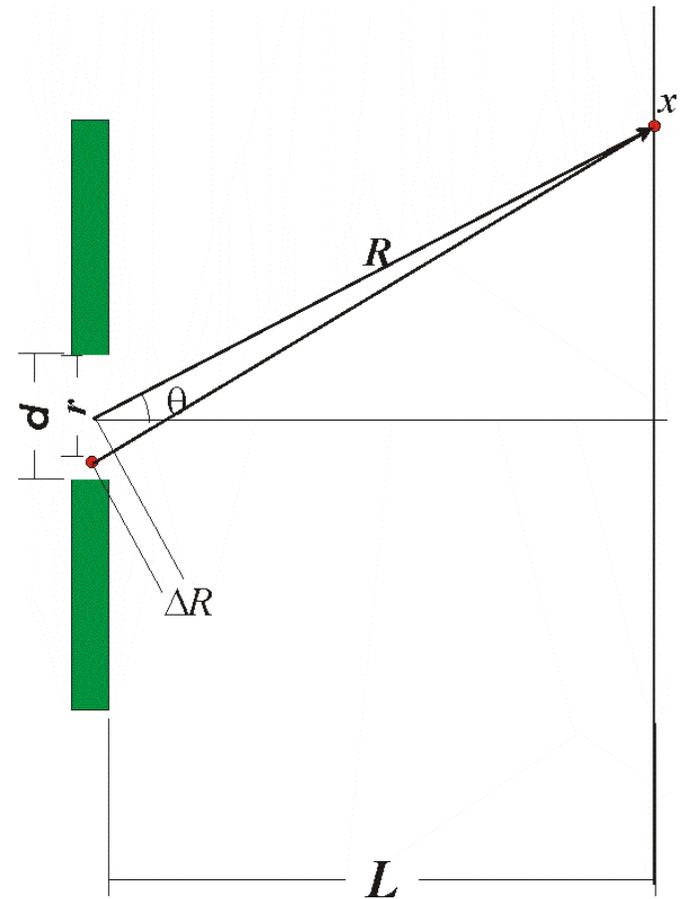


# O estudo de uma fenda simples em 1D

- Com um pouco de manipulação, podemos escrever que:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \hat{A} \frac{\sin(\beta)}{\beta}$$

$$\text{com } \beta = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta, \quad \hat{A} = \text{const.}$$



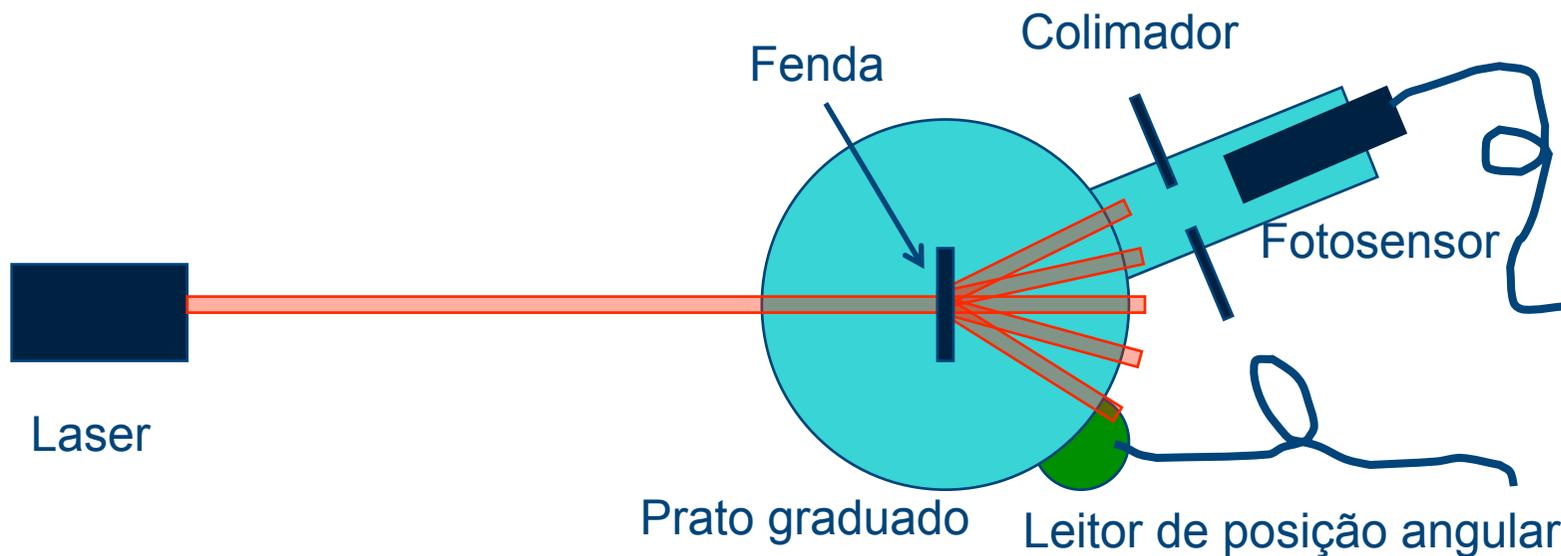


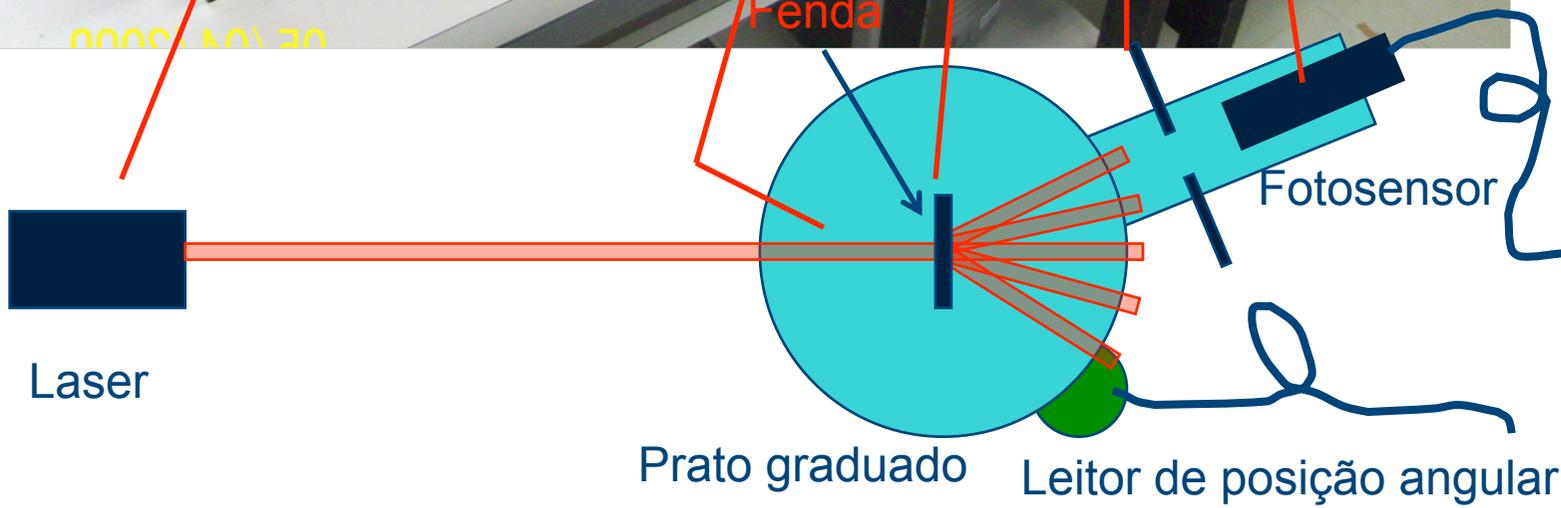
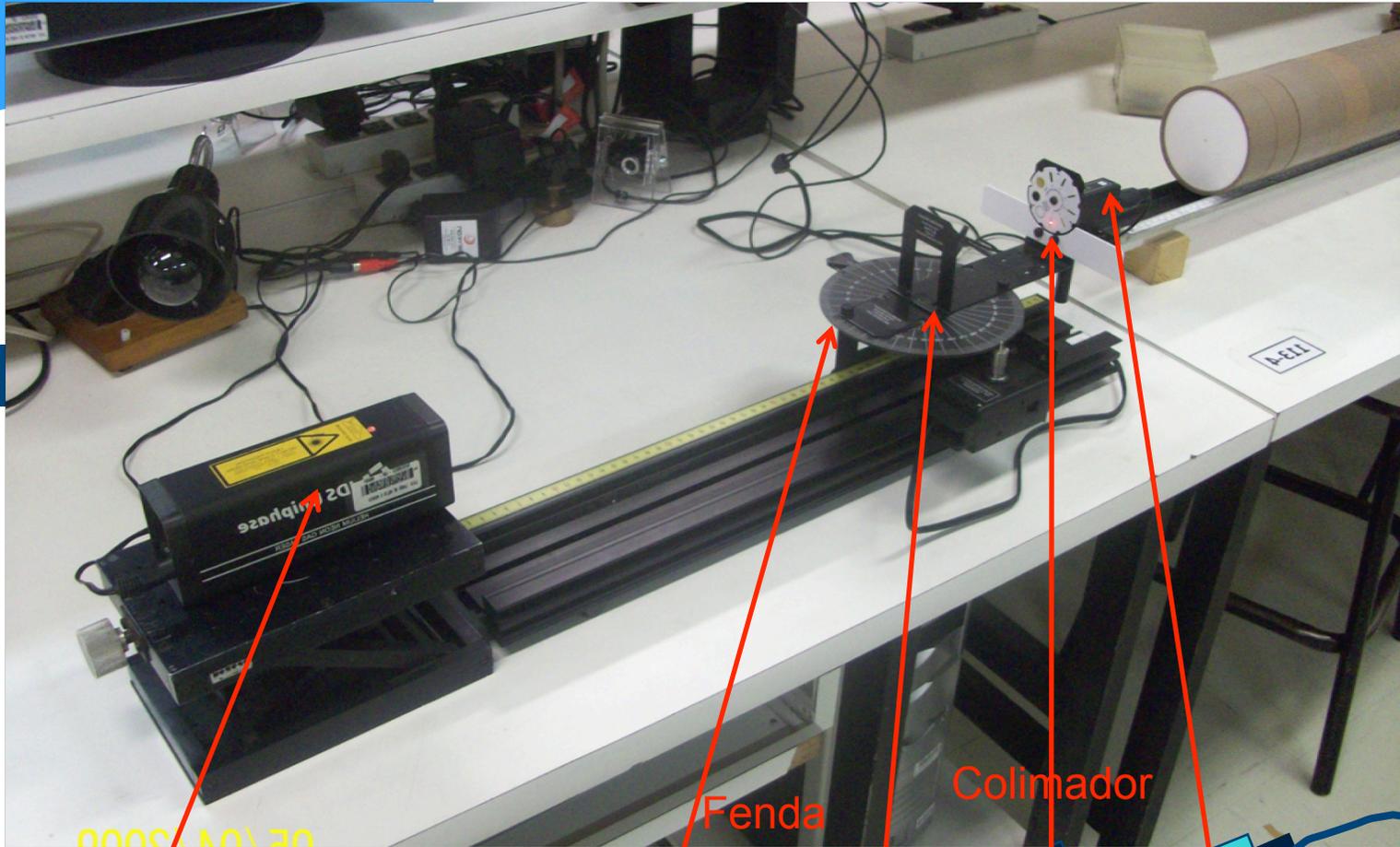
# Objetivos

- Estudar, quantitativamente, a figura de difração de uma fenda simples
  - Medir as intensidades para cada ângulo
  - Comparar com previsão teórica
    - Ajuste de  $X^2_{\text{red}}$  para obter a dimensão (d) da fenda

# Arranjo experimental

- Espectrofotômetro e datastudio
  - O espectrofotômetro consiste de um arranjo contendo um fotosensor (para medir intensidade) e um sensor de rotação para medir ângulo





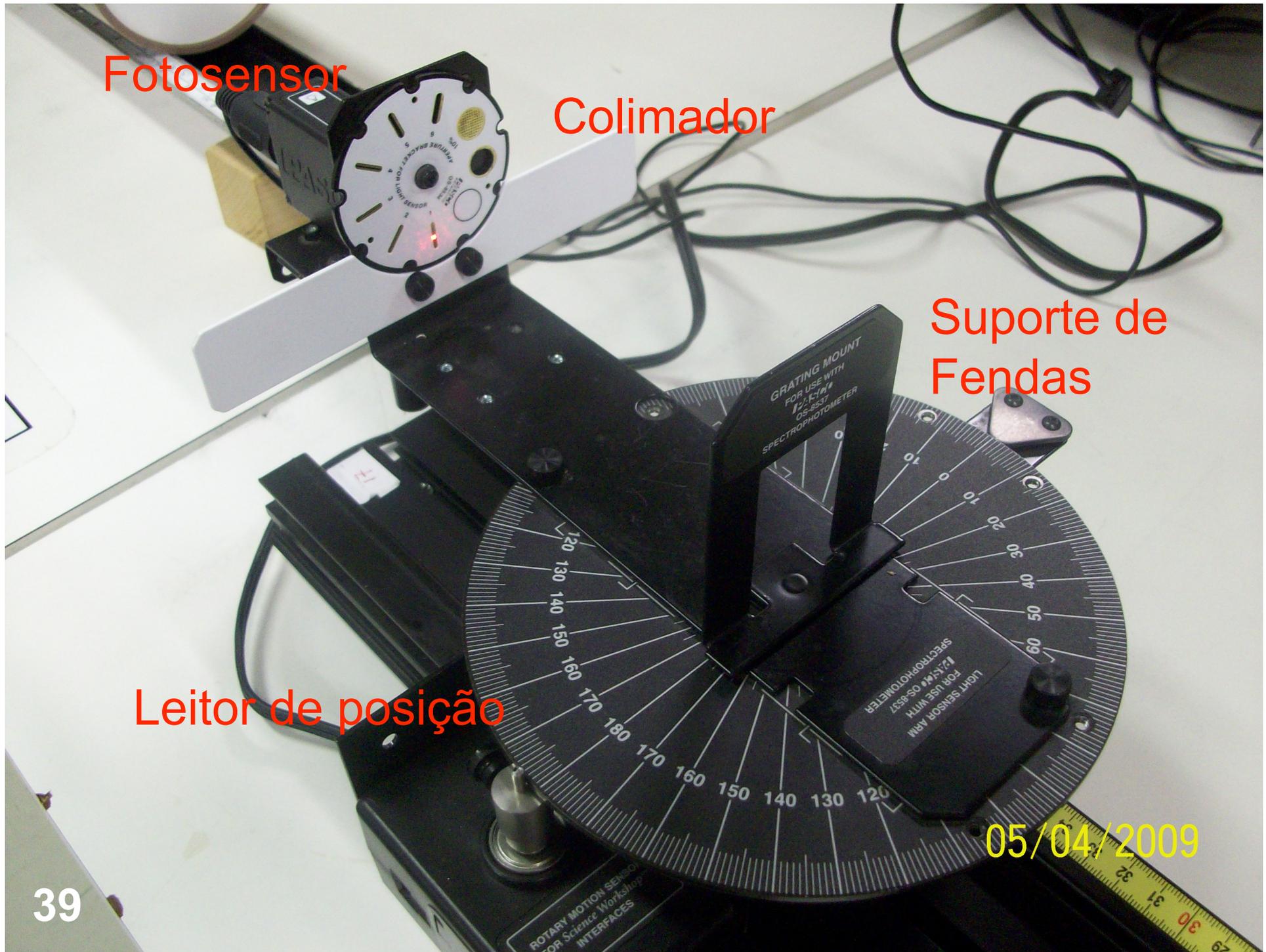
Fotosensor

Colimador

Suporte de Fendas

Leitor de posição

05/04/2009



A fenda escolhida deve estar bem centralizada no prato para garantir a correta medida angular. O que acontece se não estiver?

Colimador

Fotosensor

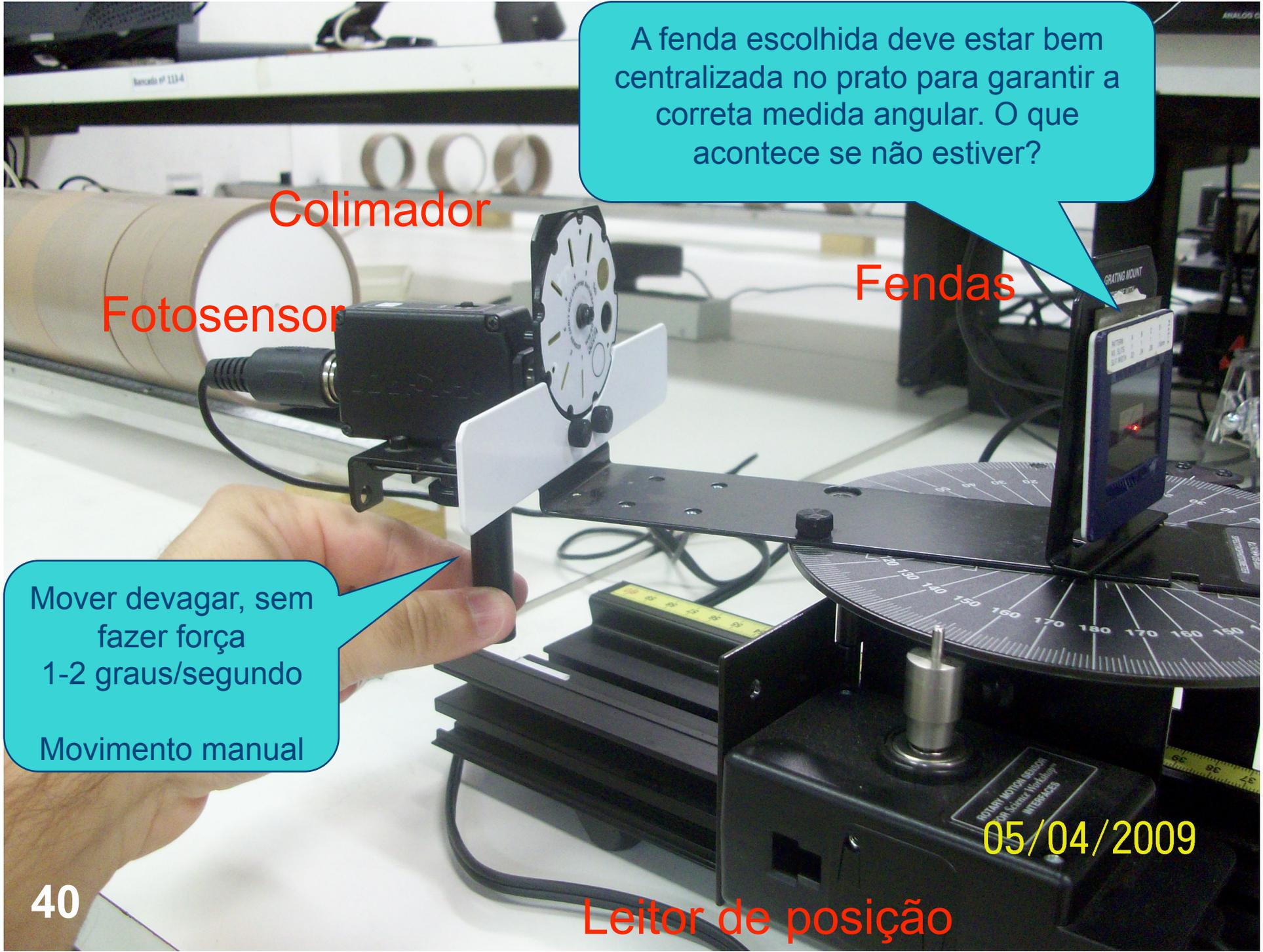
Fendas

Mover devagar, sem  
fazer força  
1-2 graus/segundo  
Movimento manual

05/04/2009

40

Leitor de posição



Fotosensor

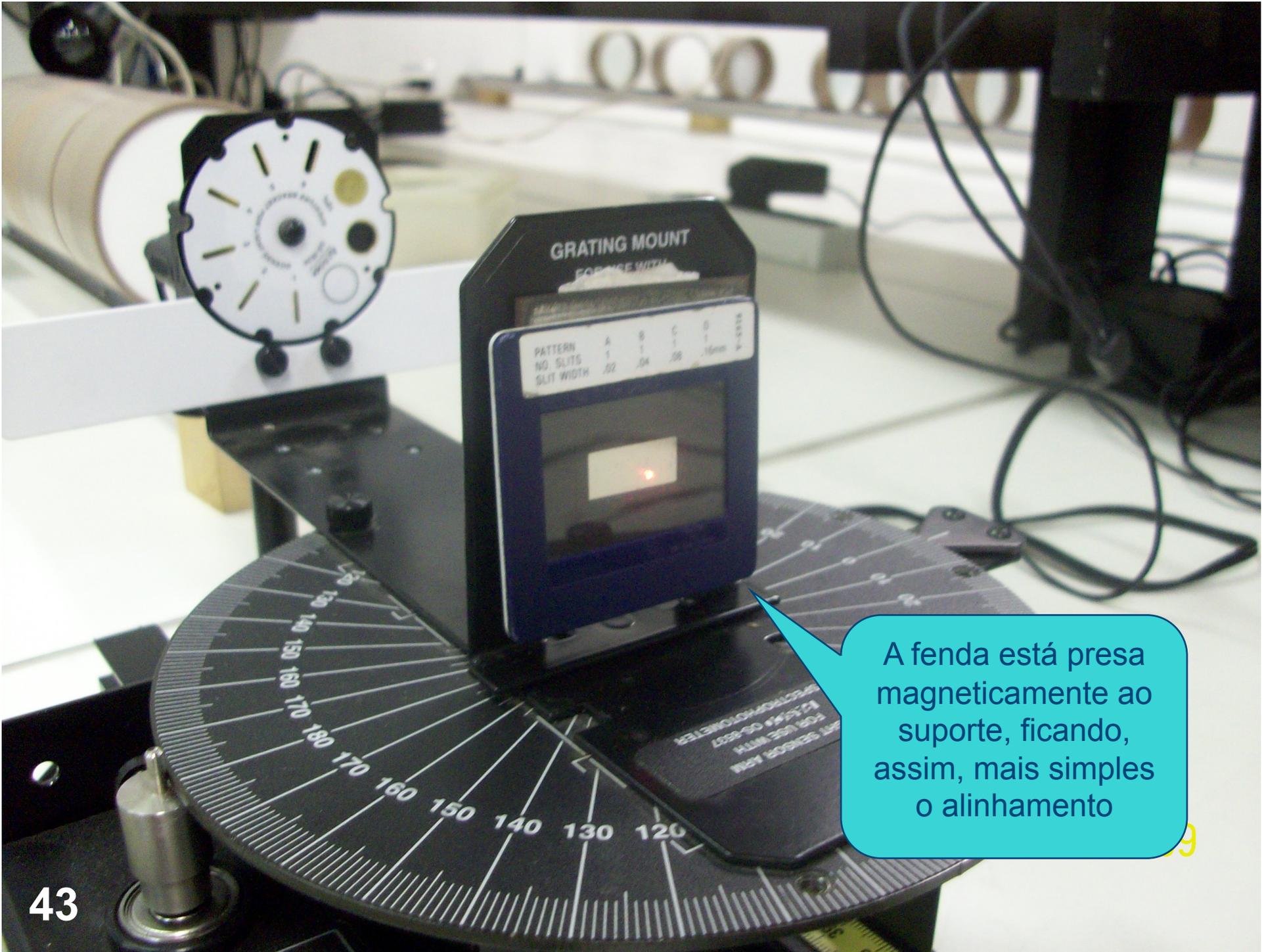
Colimadores

Usar este colimador

A largura da abertura do colimador define a precisão angular na qual a medida é feita. Quanto menor a abertura, maior é a precisão angular

## Colimador

Para prender a fenda use primeiro esta chapa metálica. Assim a fenda será presa magneticamente e será mais fácil posicioná-la



# USAR ESTE SLIDE DE FENDAS



Usar a segunda fenda mais larga.

05/04/2009

# Ligações no DataStudio



# Procedimento experimental

- Usar como fenda para a difração a SEGUNDA FENDA MAIS LARGA do slide que CONTÉM APENAS FENDAS SIMPLES
- Usar como colimador do fotosensor AQUELE MAIS ESTREITO. Isto aumenta a resolução na medida de ângulo.
- Fixar o slide com o conjunto de fendas no respectivo suporte. A fenda escolhida deve estar bem centralizada.
- Alinhar o laser com a fenda e o fotosensor
- Selecionar **a sensibilidade de 10X no fotosensor.**
  - Neste caso, a intensidade para o pico principal da difração pode estar saturada. O que fazer nesta região? Remover os dados?

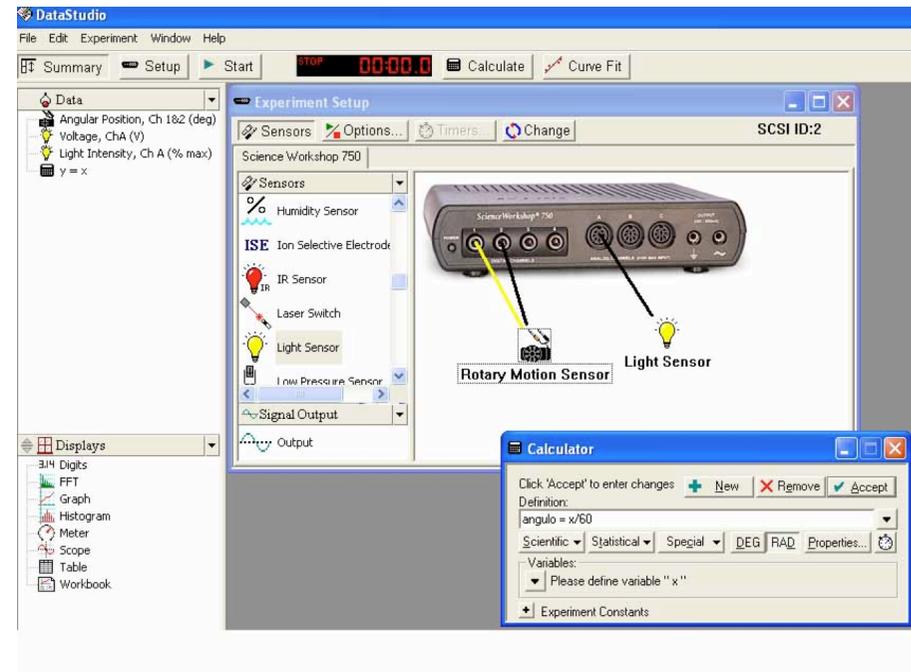
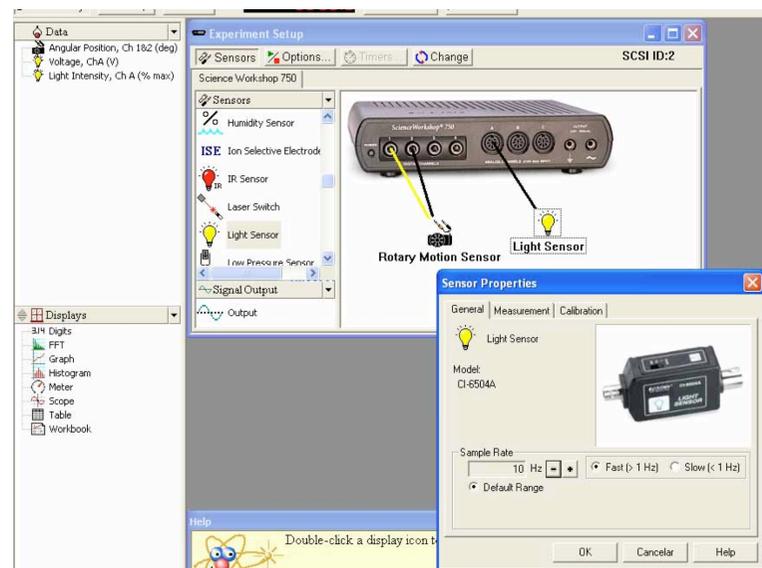
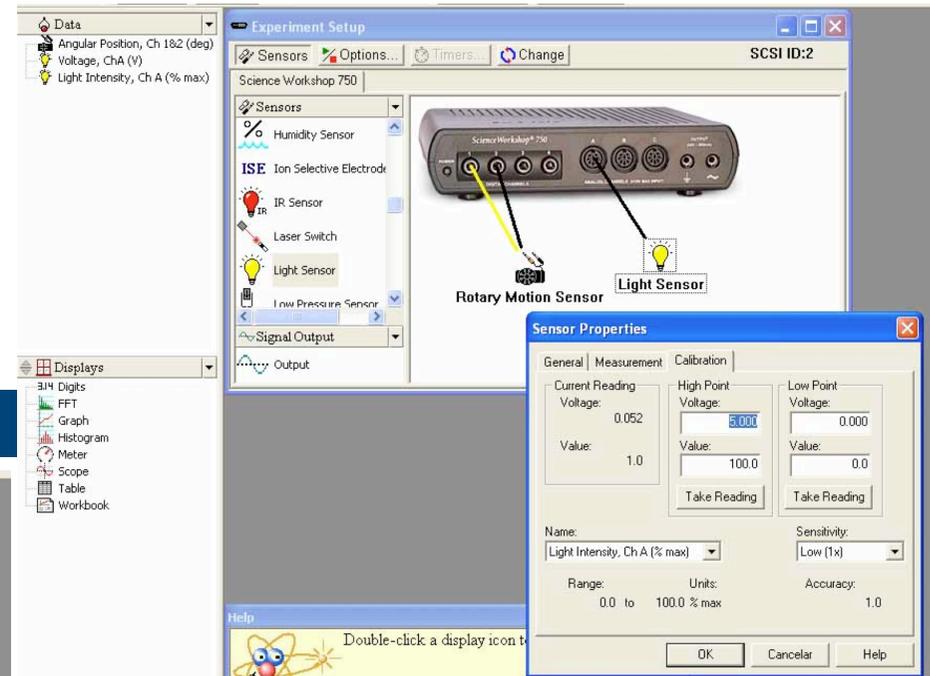
Só para a minha turma.

# Procedimento experimental Sobre o datastudio

The screenshot displays the Science Workshop 750 software interface. On the left, the 'Data' panel lists 'Angular Position, Ch 1&2 (deg)', 'Voltage, ChA (V)', and 'Light Intensity, Ch A (% max)'. The 'Displays' panel includes '3 1/4 Digits', 'FFT', 'Graph', 'Histogram', 'Meter', 'Scope', 'Table', and 'Workbook'. The main 'Experiment Setup' window shows a 'Science Workshop 750' interface with a 'Sensors' list containing 'Humidity Sensor', 'ISE Ion Selective Electrode', 'IR Sensor', 'Laser Switch', 'Light Sensor', and 'Low Pressure Sensor'. A 'Signal Output' section is also visible. A central image shows the hardware device with a 'Rotary Motion Sensor' connected to channel A and a 'Light Sensor' connected to channel B. A 'Sensor Properties' dialog box is open, showing the 'Rotary Motion Sensor' configuration. The 'Measurement List' includes 'Acceleration, Ch 1&2 (m/s/s)', 'Angular Acceleration, Ch 1&2 (deg/s/s)', 'Angular Acceleration, Ch 1&2 (rad/s/s)', 'Angular Position, Ch 1&2 (deg)' (checked), 'Angular Position, Ch 1&2 (rad)', 'Angular Velocity, Ch 1&2 (deg/s)', 'Angular Velocity, Ch 1&2 (rad/s)', and 'Position, Ch 1&2 (m)'. The 'Range' is set to '-6.00 to 6.00', the 'Unit' is 'm/s/s', and the 'Accuracy' is '0.05'. The dialog box has 'OK', 'Cancelar', and 'Help' buttons.

47

# Propriedades do sensor e cálculo do ângulo

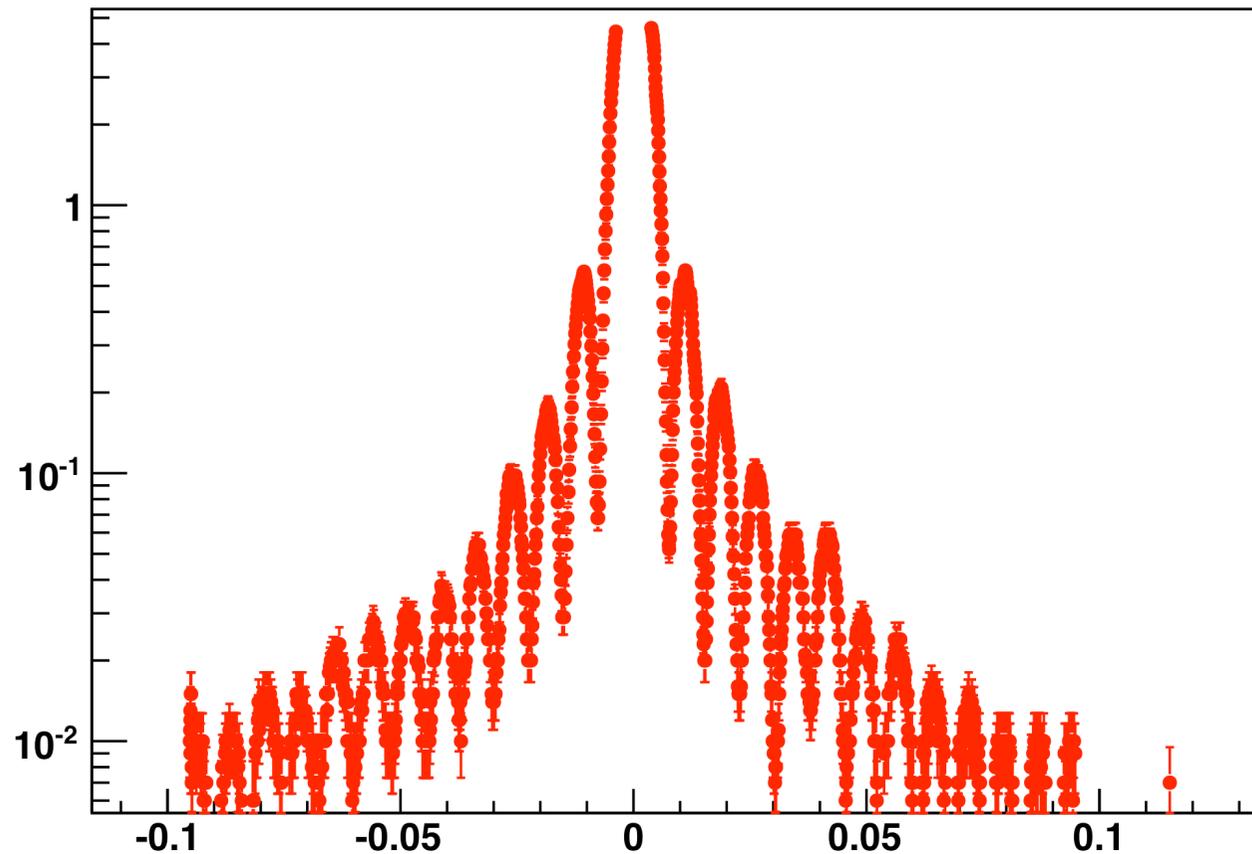


# Cuidados experimentais no DataStudio

- Sensibilidade do sensor de posição
  - Ajuste para 1440 divisões/grau
  - Ajuste a frequência de amostragem para 50-100 Hz
  - O cálculo do ângulo é leitura do sensor / 60
    - $\text{Angulo} = \text{leitura}/60$
  - Verifiquem a medida de ângulo, comparando a leitura do DS com a escala graduada no prato.

# Dados

Se houver cuidado e capricho com a montagem e tomada de dados é possível adquirir um espectro de altíssima qualidade para análise.



# Atividades da semana

- Estudar a difração de *uma fenda simples*.
  - Medir o espectro de difração desta fenda
    - Lembre-se que queremos uma fenda específica
  - *Ajustar a curva teórica aos dados, utilizando mínimos quadrados.*
    - A curva teórica descreve bem os dados? Há alguma discrepância? O que poderia explicar eventuais discrepâncias? Descreva os resultados.
      - Dica: Compare detalhadamente os dados com teoria.