
Experiência I

Circuitos CA e Caos

Aula 03

Prof. Alexandre Suaide
Ed. Oscar Sala, sala 246 – ramal 7072

SÉRIES DE FOURIER

- Expansão em série de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnx}$$

- Com:
$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-jnx} dx$$

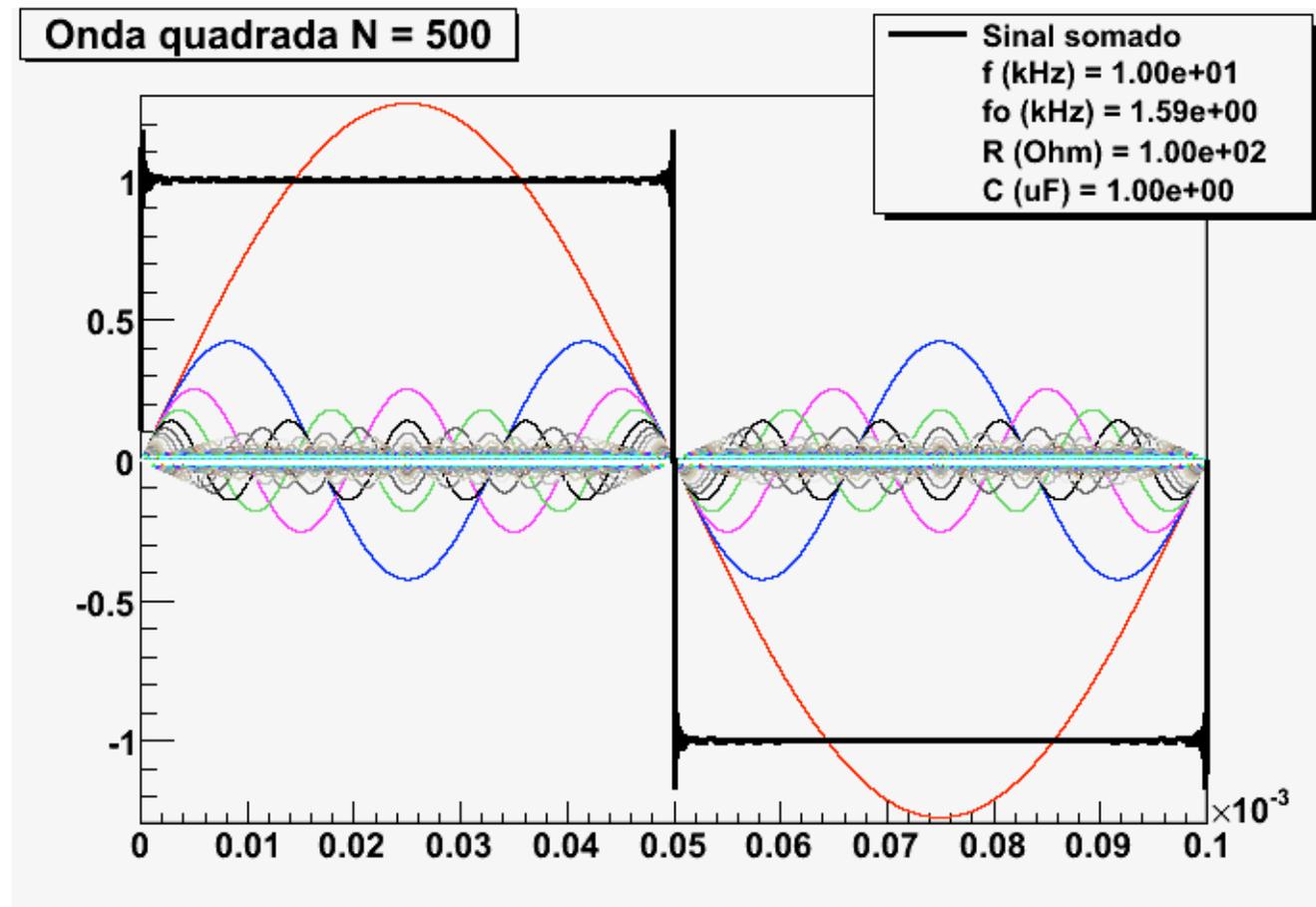
- As constantes a_n e b_n da expressão tradicional podem ser obtidas como:

$$a_n = c_n + c_{-n}, \text{ com } n = 0, 1, 2, \dots$$

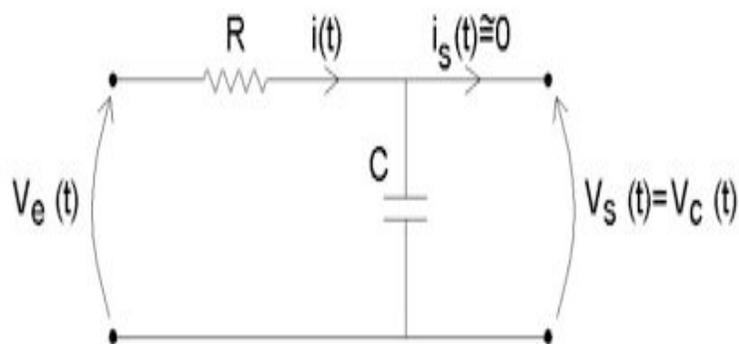
$$b_n = j(c_n - c_{-n}), \text{ com } n = 0, 1, 2, \dots$$

EXEMPLO: ONDA QUADRADA

$$V(t) = V_0 \left[\frac{4}{\pi} \sin(\omega t) + \frac{4}{3\pi} \sin(3\omega t) + \frac{4}{5\pi} \sin(5\omega t) + \dots \right]$$

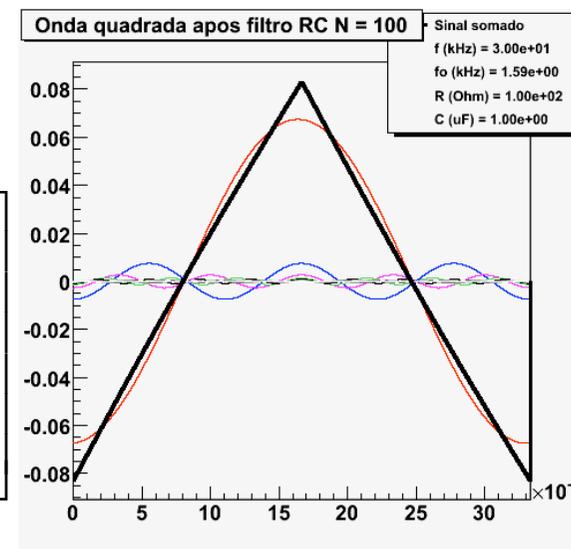
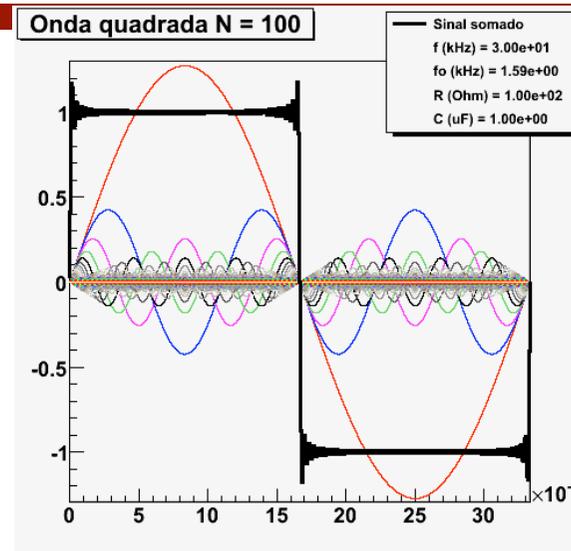


O QUE FIZEMOS ATÉ O MOMENTO? FILTRO RC

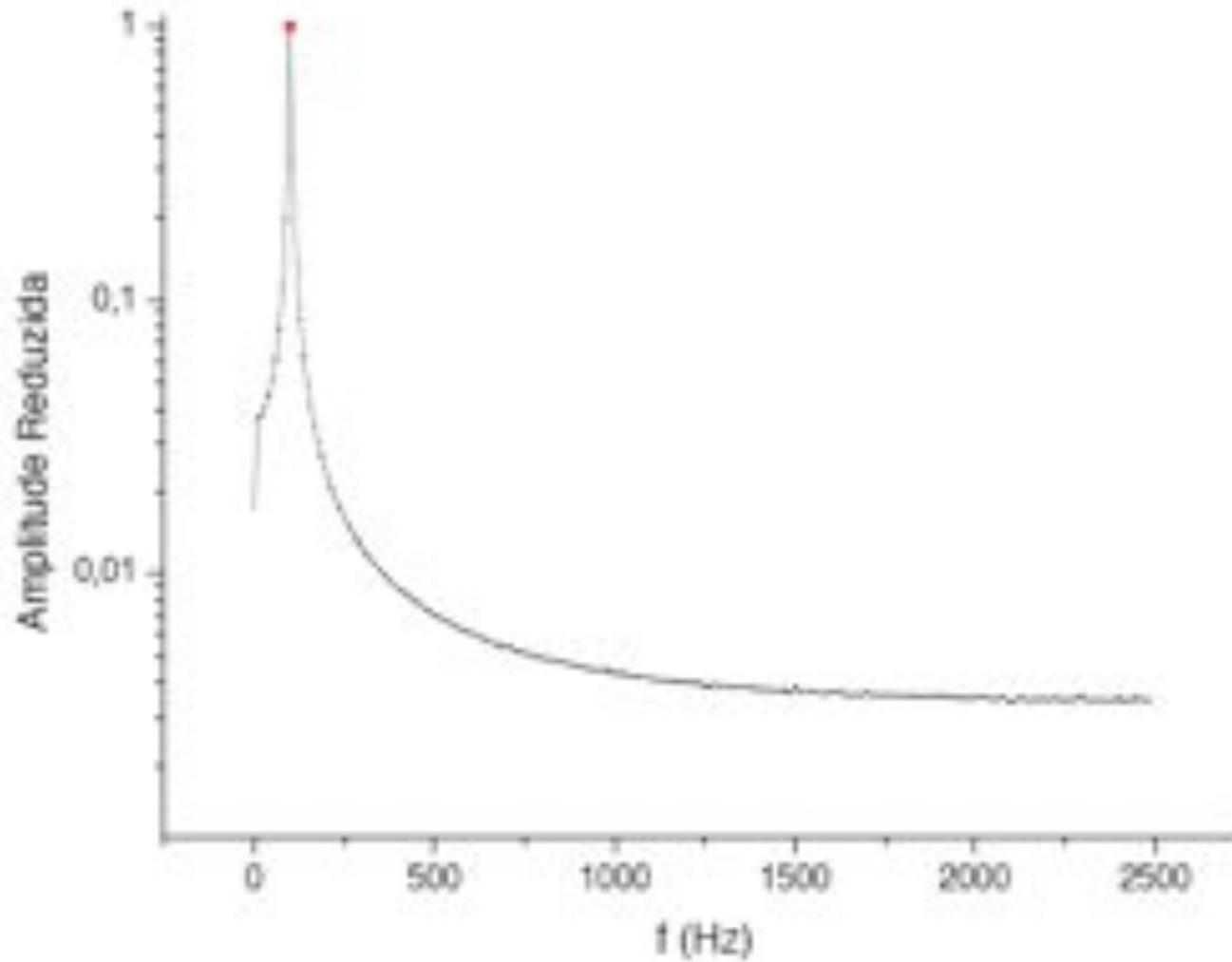


$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2}} \quad \phi(\omega) = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_C}\right)$$

$$V_e = V_0 \left[\begin{array}{l} \frac{4}{\pi} \sin(\omega t) + \\ \frac{4}{3\pi} \sin(3\omega t) + \\ \frac{4}{5\pi} \sin(5\omega t) + \dots \end{array} \right] \xrightarrow{G, \phi} V_S = V_0 \left[\begin{array}{l} G_{\omega} \cdot \frac{4}{\pi} \sin(\omega t + \phi_{\omega}) + \\ G_{3\omega} \cdot \frac{4}{3\pi} \sin(3\omega t + \phi_{3\omega}) + \\ G_{5\omega} \cdot \frac{4}{5\pi} \sin(5\omega t + \phi_{5\omega}) + \dots \end{array} \right]$$



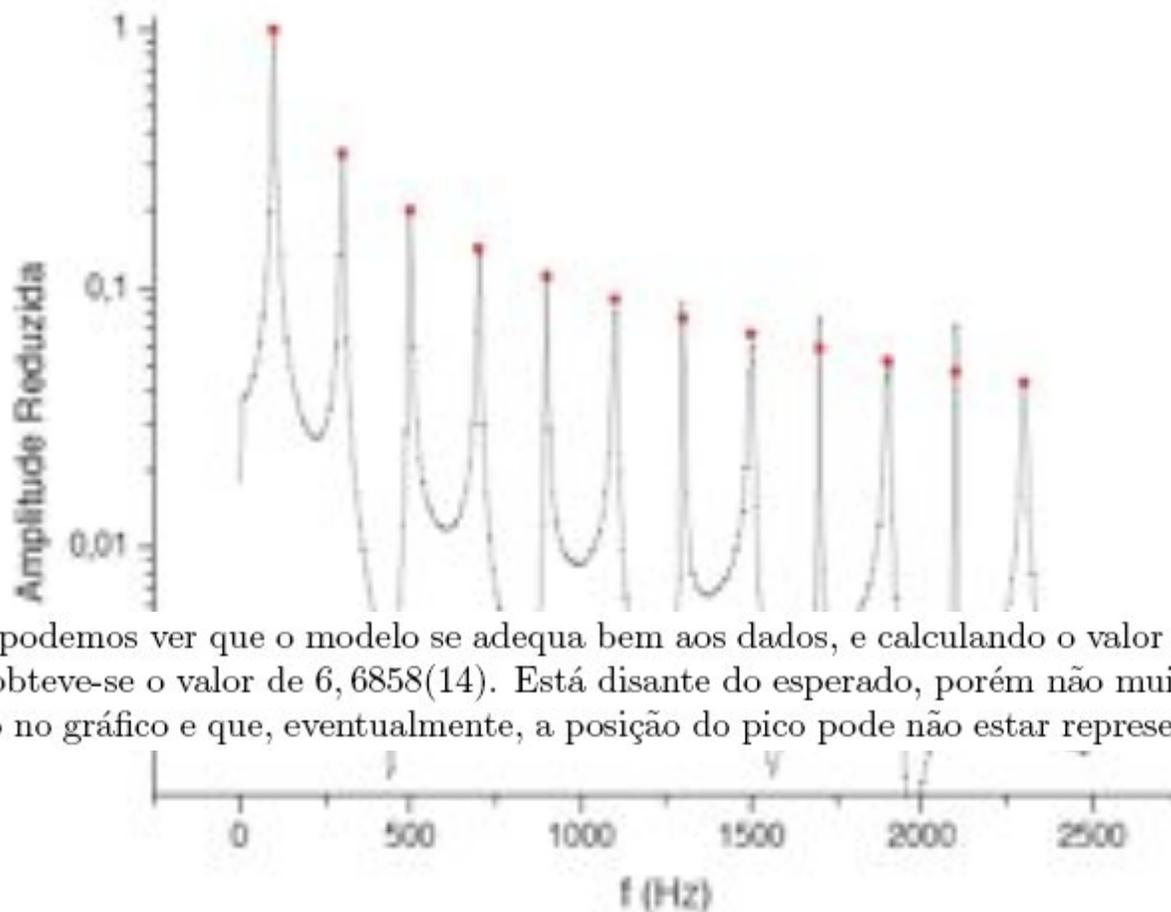
ALGUNS RESULTADOS



ALGUNS RESULTADOS

A Série de Fourier para uma onda quadrada de amplitude A e frequência angular ω é:

$$y(t) = \frac{4}{\pi} A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}[(2n-1)\omega t]}{2n-1}.$$



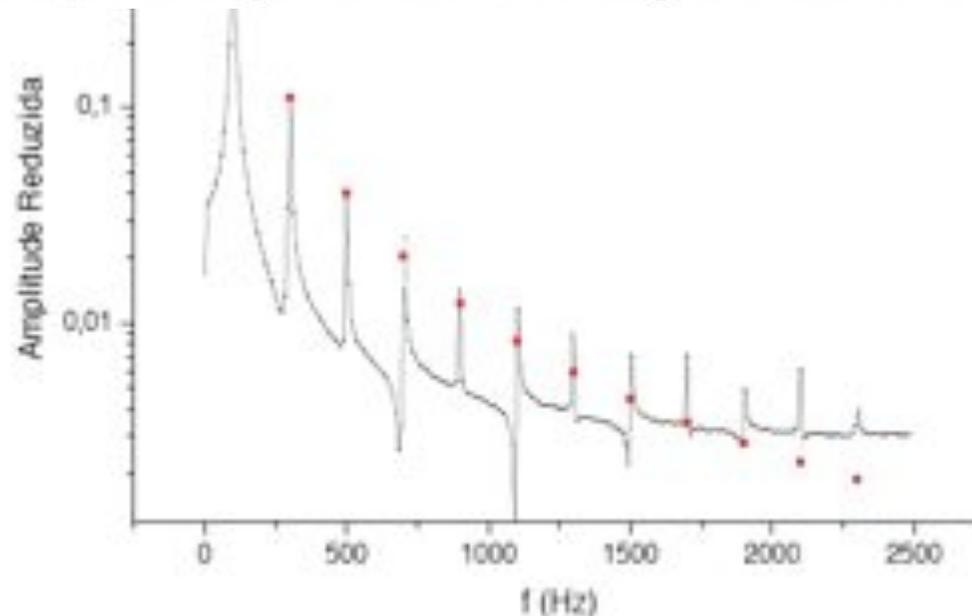
Visualmente, podemos ver que o modelo se adequa bem aos dados, e calculando o valor do χ^2 reduzido para o gráfico acima, obteve-se o valor de 6,6858(14). Está disante do esperado, porém não muito, contando que há presença de ruído no gráfico e que, eventualmente, a posição do pico pode não estar representada corretamente,

ALGUNS RESULTADOS

A Série de Fourier para uma onda triangular de amplitude A e frequência angular ω é:

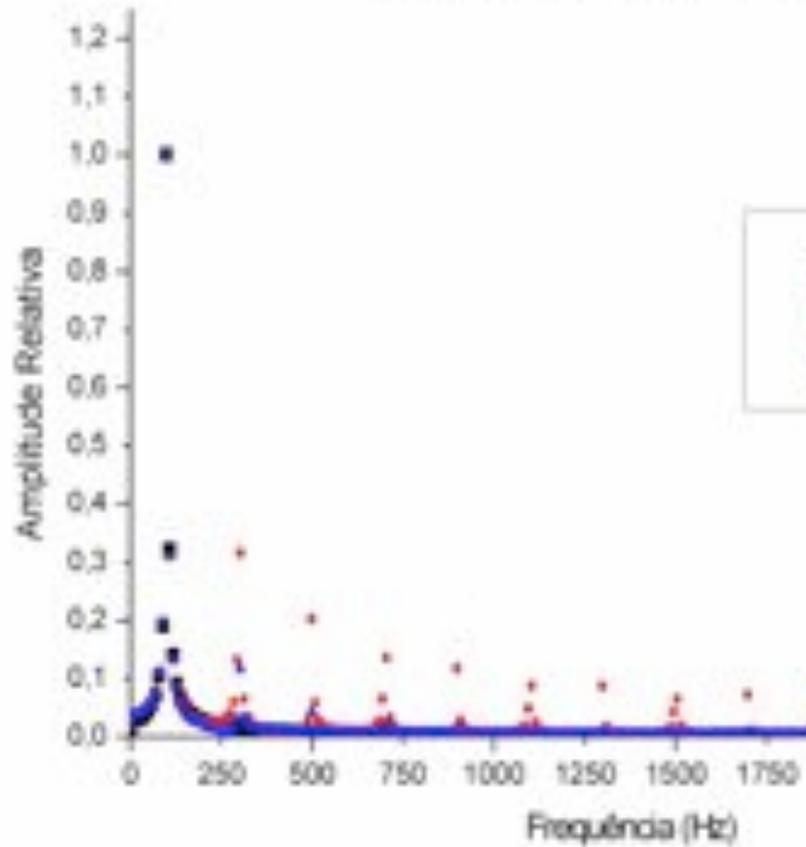
$$y(t) = \frac{8}{\pi^2} A \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\text{sen}[(2n-1)\omega t]}{(2n-1)^2}.$$

Mais uma vez, os dados experimentais parecem se sobrepor bem aos valores teóricos, e desta vez o valor do χ^2 reduzido é de 0,4376(14), mais próximo do esperado agora. Para amplitudes pequenas, vemos que a teoria se distancia muito dos dados obtidos, porém é novamente consequência da escala logarítmica. Os picos, neste caso, chegam a ser, em escala linear, praticamente um ponto acima de uma reta constante, de modo que a precisão aí é muito pequena. O valor baixo do χ^2 , então, se deve ao fato de que os valores são muito baixos, sejam os teóricos como os experimentais, de modo que esta falha observada pouco soma ao cálculo do χ^2 reduzido.

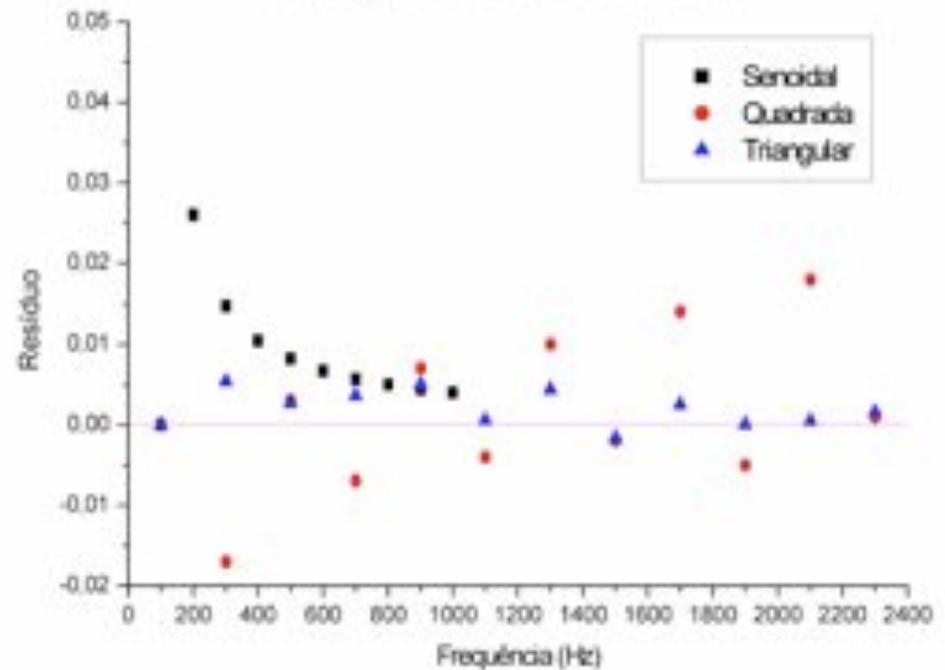


ALGUNS RESULTADOS

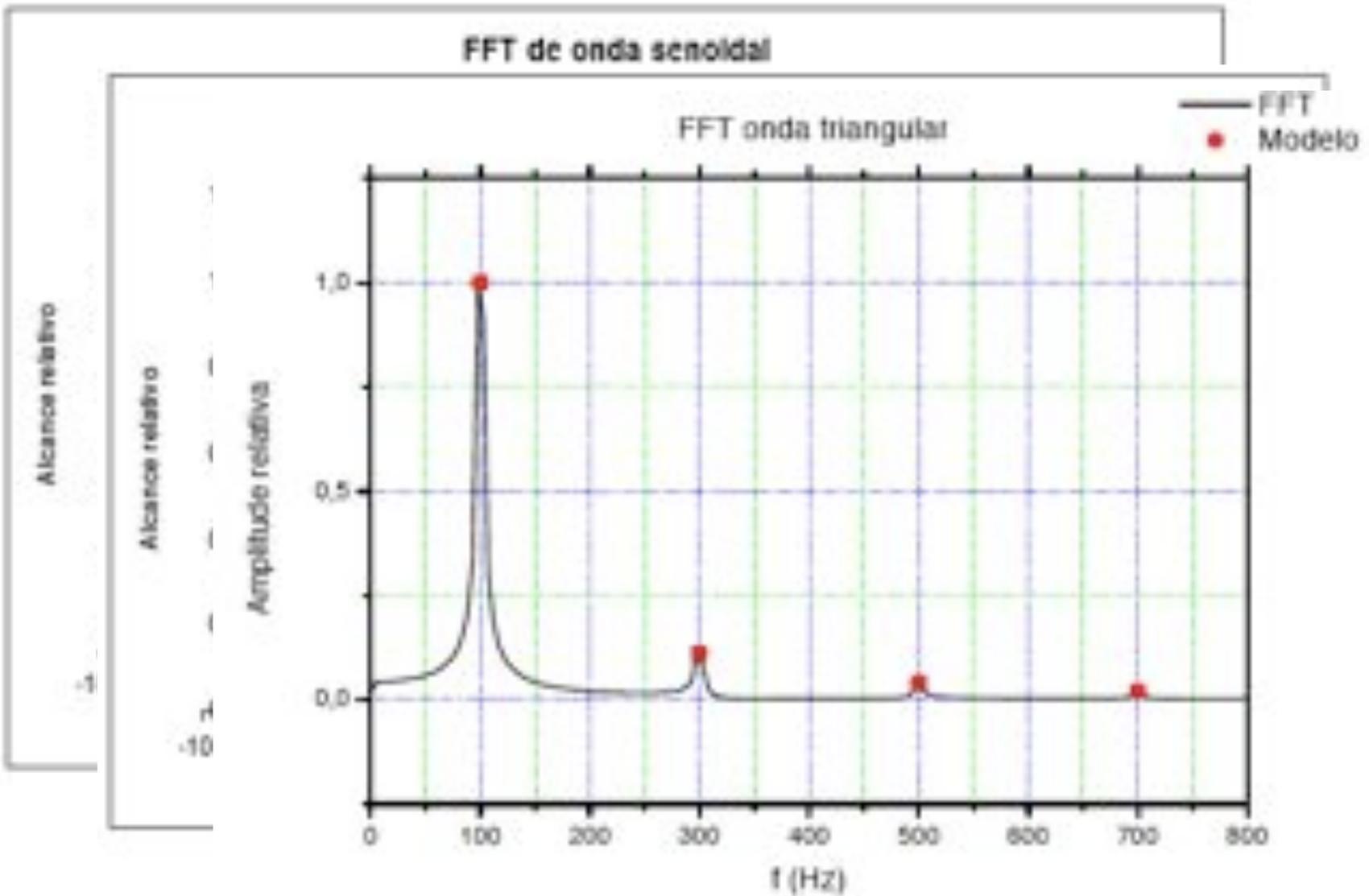
Transformada de Fourier



Comparação da Transformada de Fourier



ALGUNS RESULTADOS

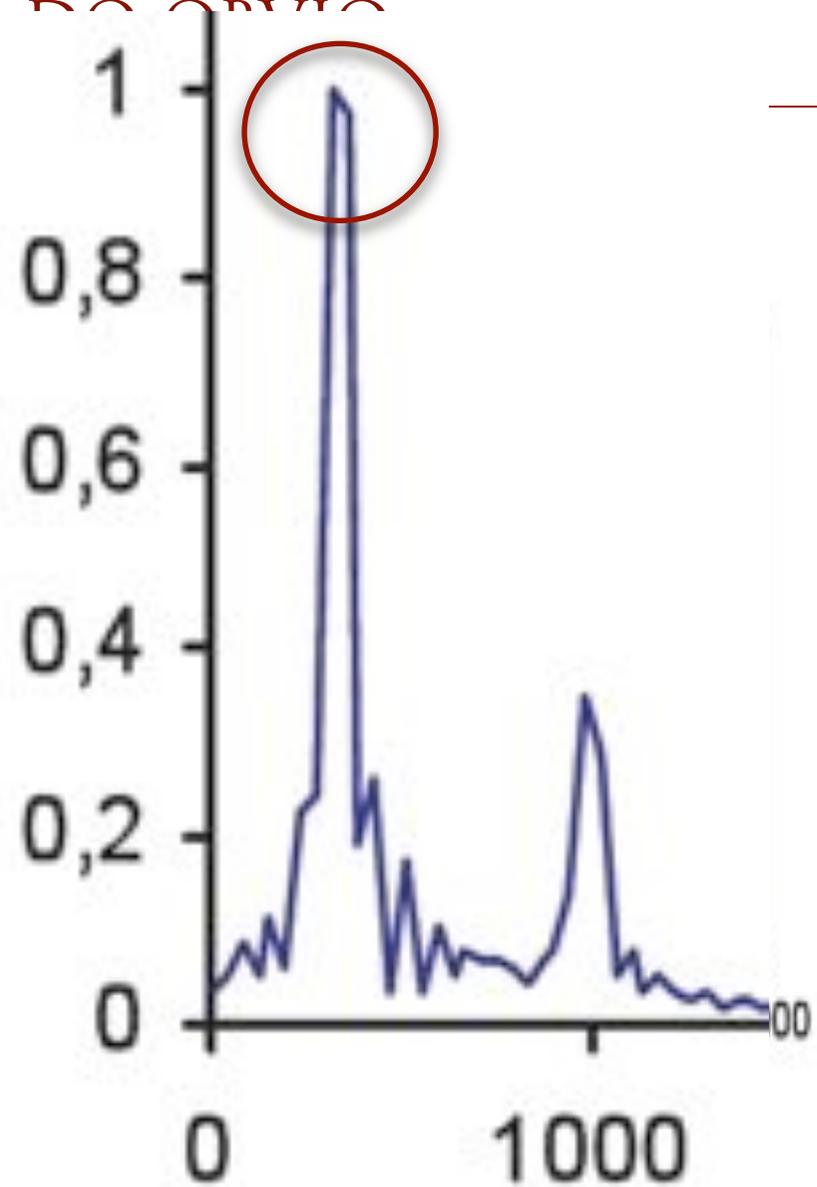
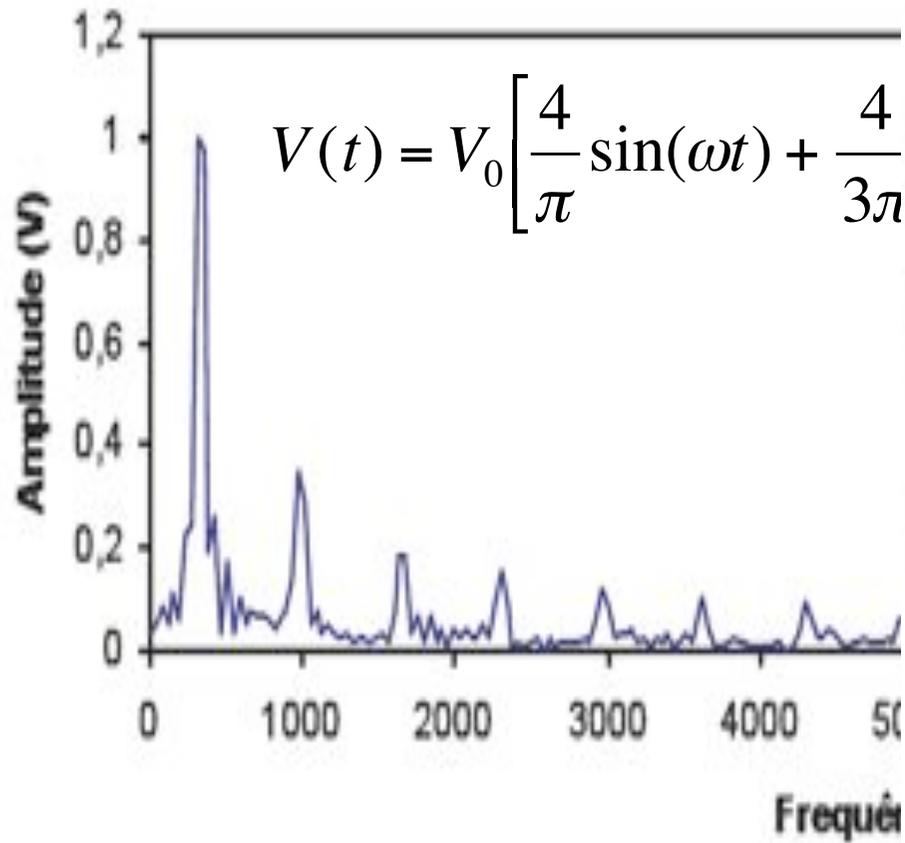


ALGUNS RESULTADOS

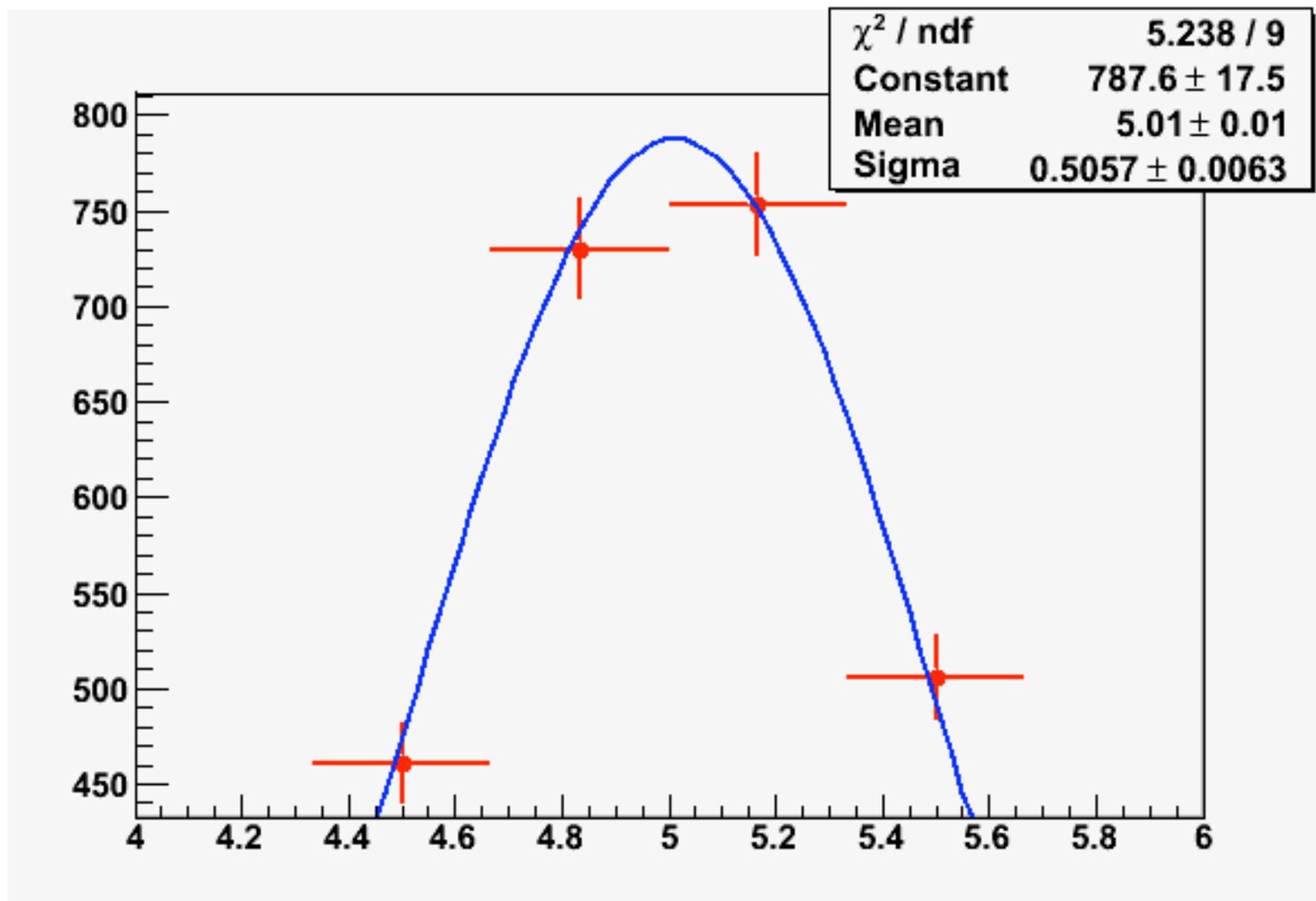
Foram utilizadas as frequências de 100Hz e 1000Hz, que apresentaram resultados semelhantes. Como pode ser observado, ao aumentar a escala temporal do osciloscópio do DataStudio (o valor de uma unidade de largura em unidades de tempo), a resolução aumenta consideravelmente: os picos ficam melhor delineados, com centróide mais bem definido e sua largura (diretamente associada ao erro) diminui bastante. Isto é devido à forma como o DataStudio calcula a FFT: como o cálculo é feito com base no que aparece na tela do osciloscópio, quando o intervalo é aumentado o número de dados na tela do osciloscópio no momento da análise também aumenta, o que leva a um melhor delineamento da curva. As análises com frequências de 1000Hz da onda-base forneceram resultados semelhantes.

INDO ALÉM DO ÓRBITO

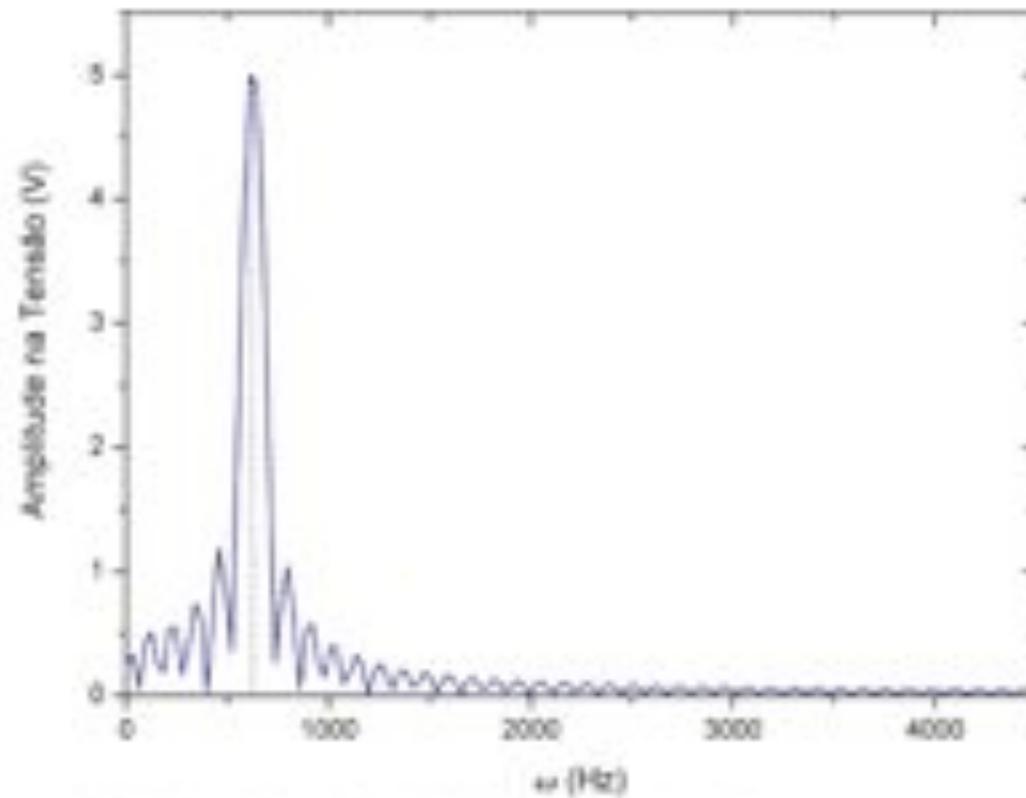
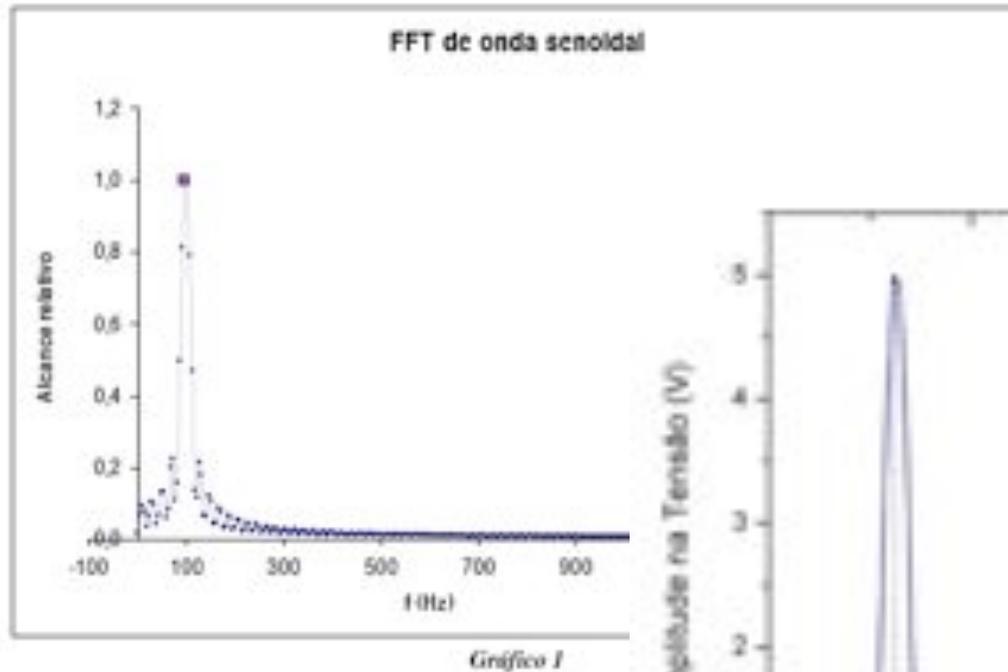
Tensão de E



COMO MEDIR A POSIÇÃO DE UM PICO?

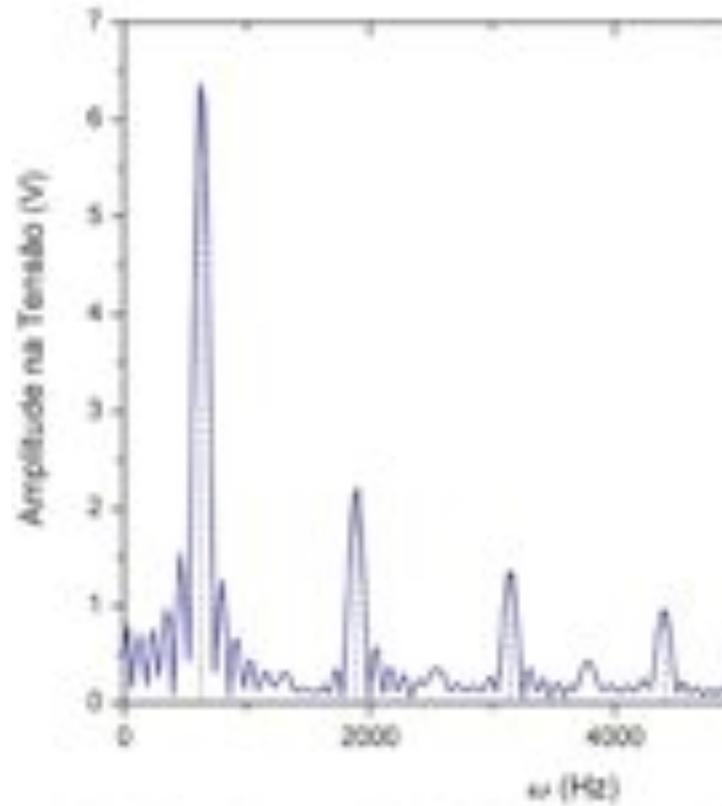


ALGUNS RESULTADOS

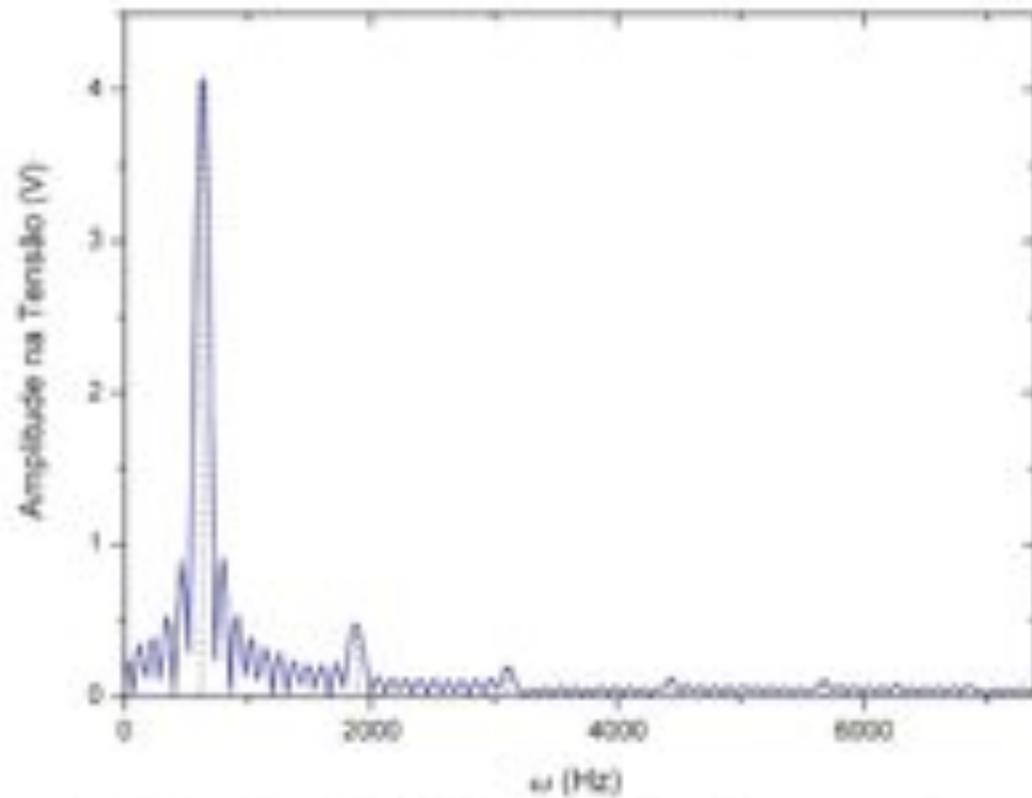


(b) Transformada de Fourier da onda em questão.

ALGUNS RESULTADOS



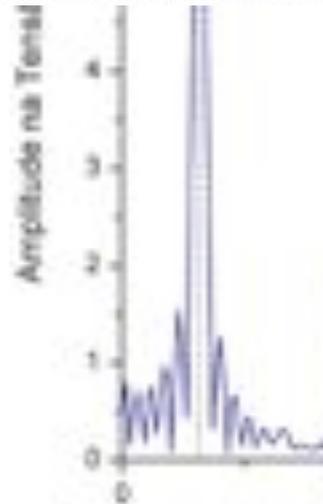
(b) Transformada de Fourier da ond



(b) Transformada de Fourier da onda em questão,

ALGUNS RESULTADOS

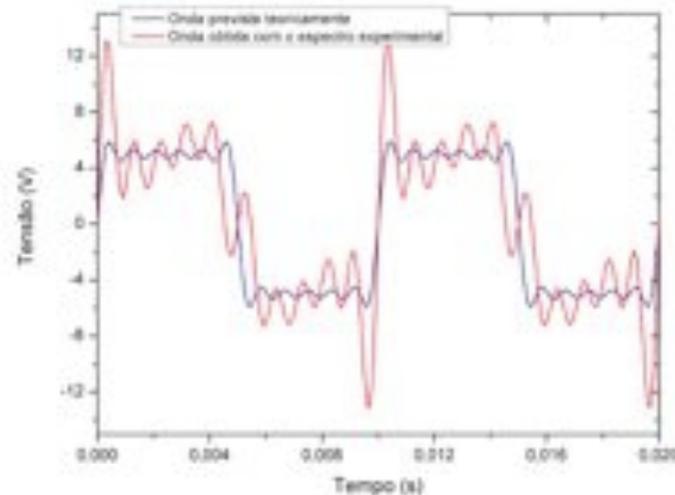
Pode-se observar uma bela concordância entre a previsão teórica e a observação experimental. Porém, na figura 2b, pode-se observar a existência de alguns picos intermediários, entre os que realmente correspondem ao espectro da onda quadrada. As frequências do espectro teórico variam proporcionalmente a um fator $2k - 1$, estes picos corresponderiam exatamente a fatores $2k$, como mostrou uma rápida análise destes dados. Também verificou-se que as amplitudes destes picos aparenta crescer linearmente com ω no intervalo medido, tornando-os não desprezíveis para $\omega > 300Hz$.



(b) Transformada

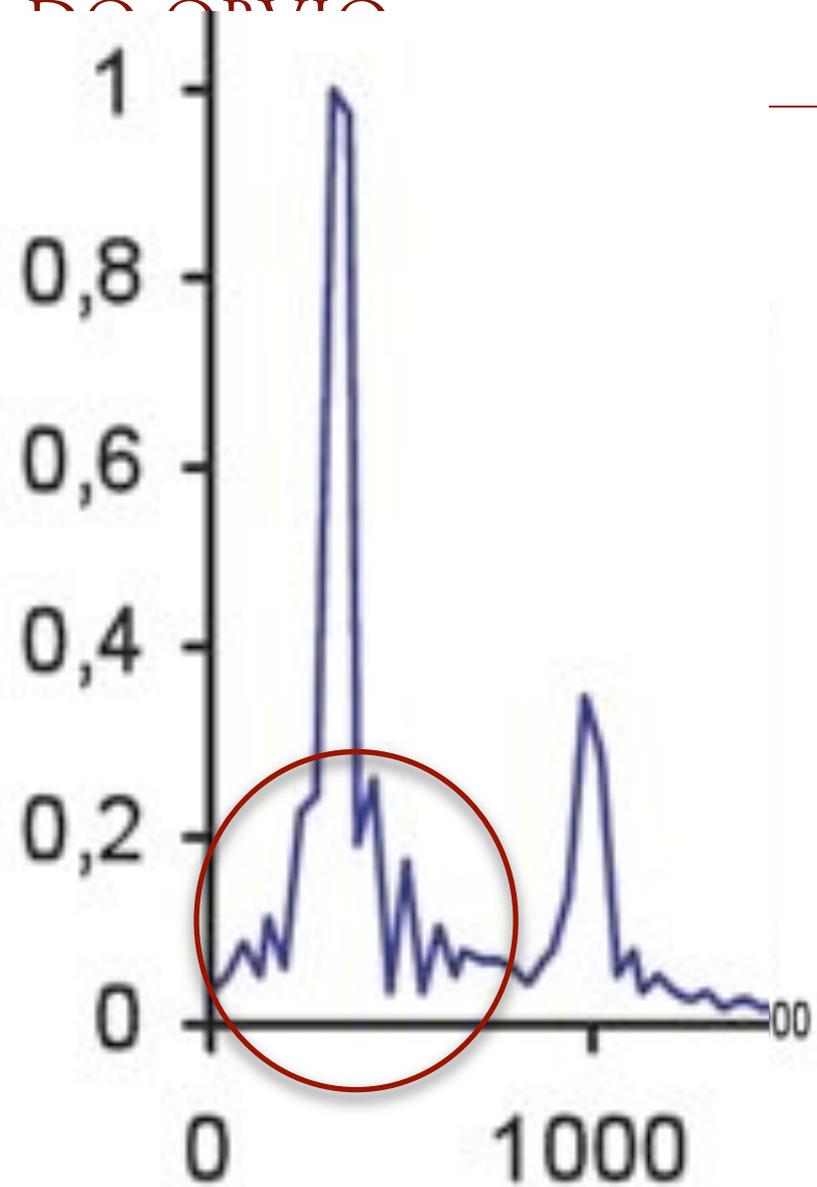
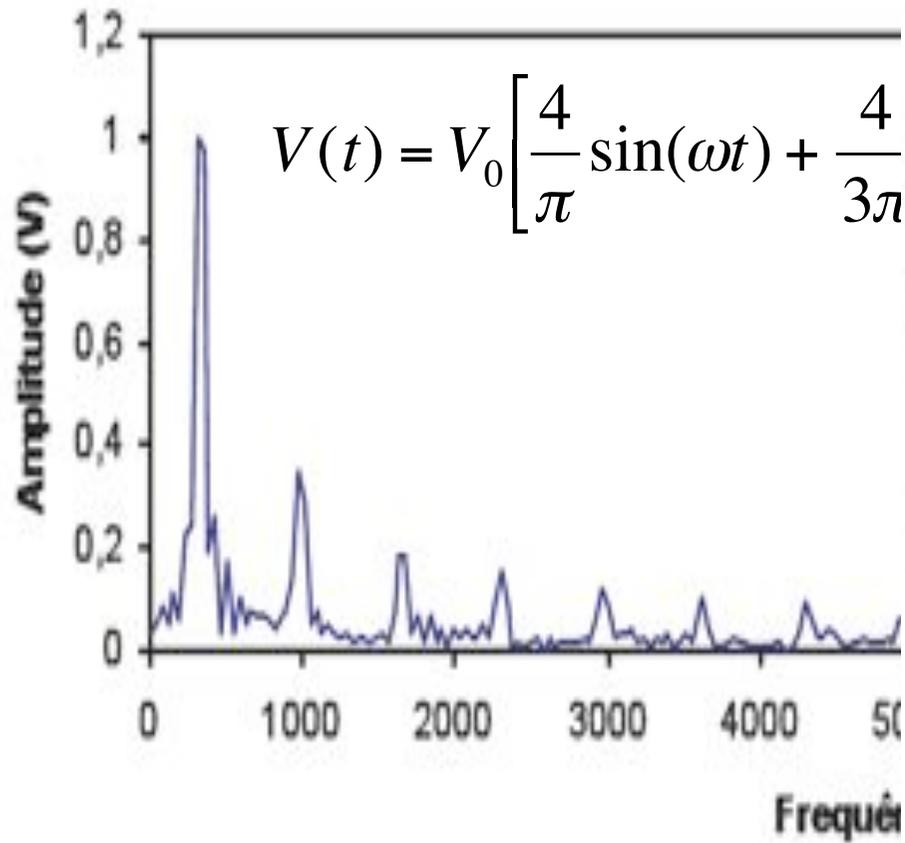
A origem disso pode ser um artifício matemático usado no cálculo da transformada experimental: o programa considera que o intervalo do sinal analisado é periódico, mas se este não for múltiplo inteiro de um período, pode ocorrer a interpretação de algumas frequências inexistentes no sinal para contrabalancear este problema. Outra possível origem deste fenômeno pode ser a geração de uma onda não precisamente quadrada, com a adição de algum ruído parasita no sinal.

Para verificar isso, plotou-se a onda quadrada usando os seis primeiros termos da expansão e a mesma onda somada a estes espectros intrusos. O resultado pode ser visualizado na figura 3.

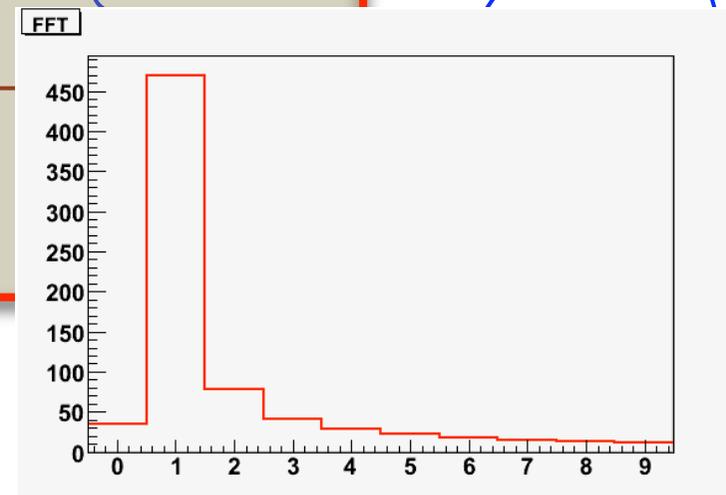
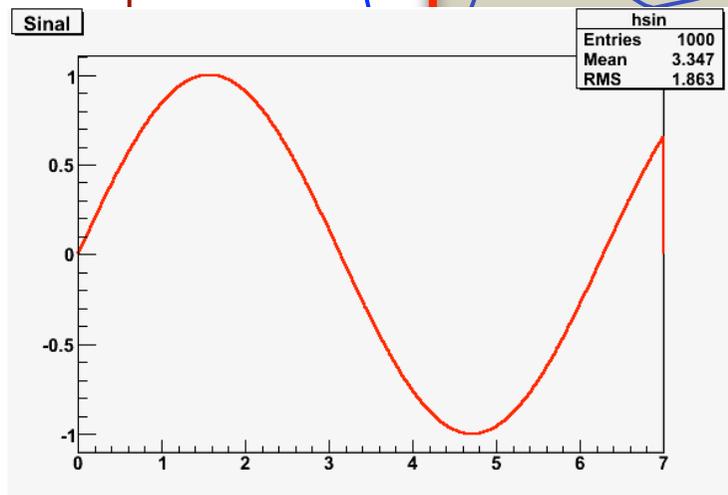
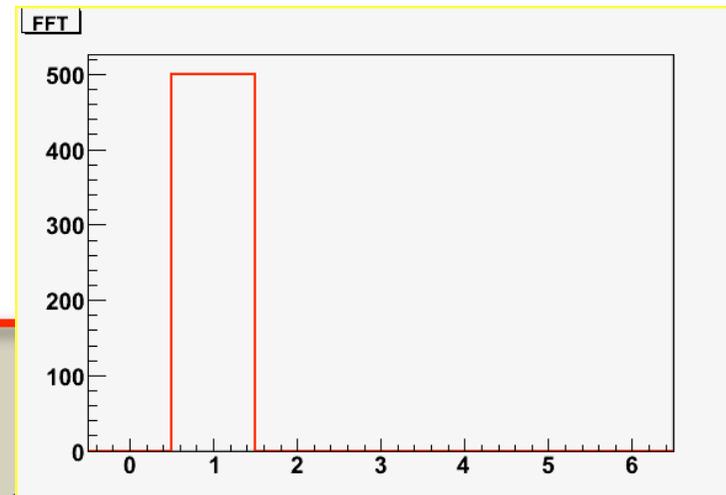
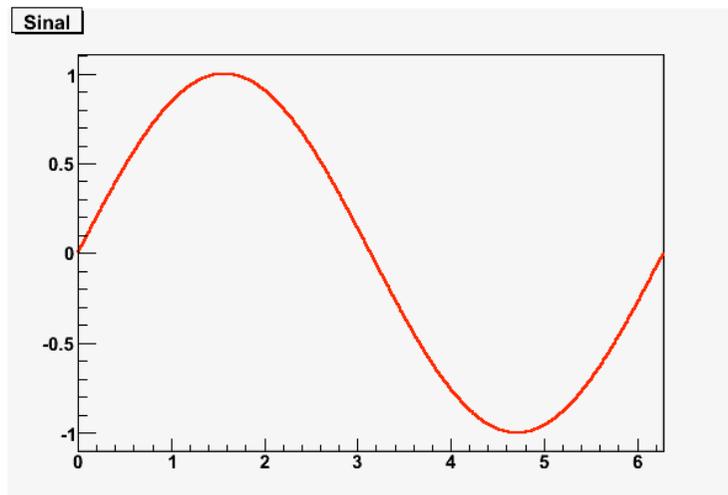


INDO ALÉM DO ÓBVIO

Tensão de E



O IMPACTO DO INTERVALO DE AMOSTRAGEM



GANHO DO FILTRO RC

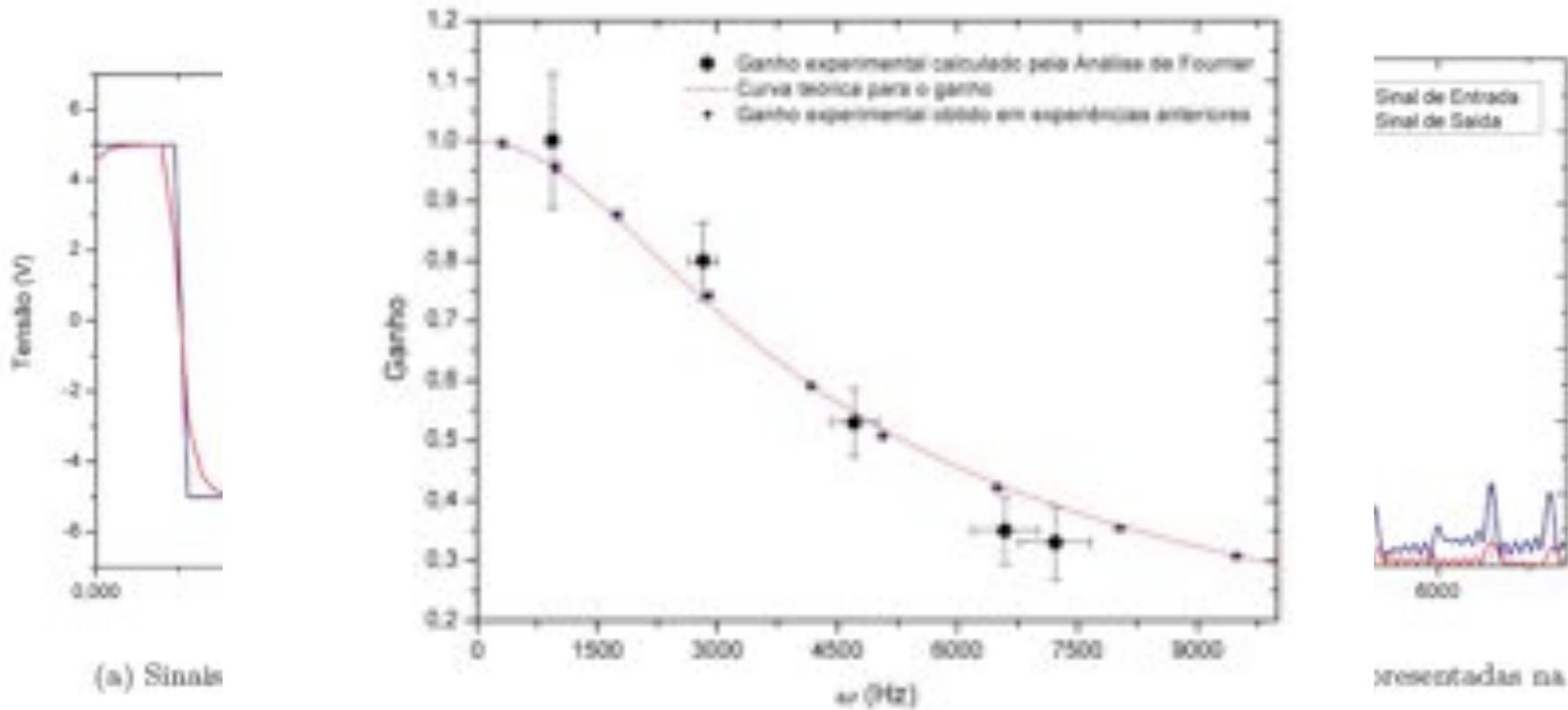


Figura 6: Gráfico do ganho do circuito em função de ω .

GANHO DO FILTRO RC

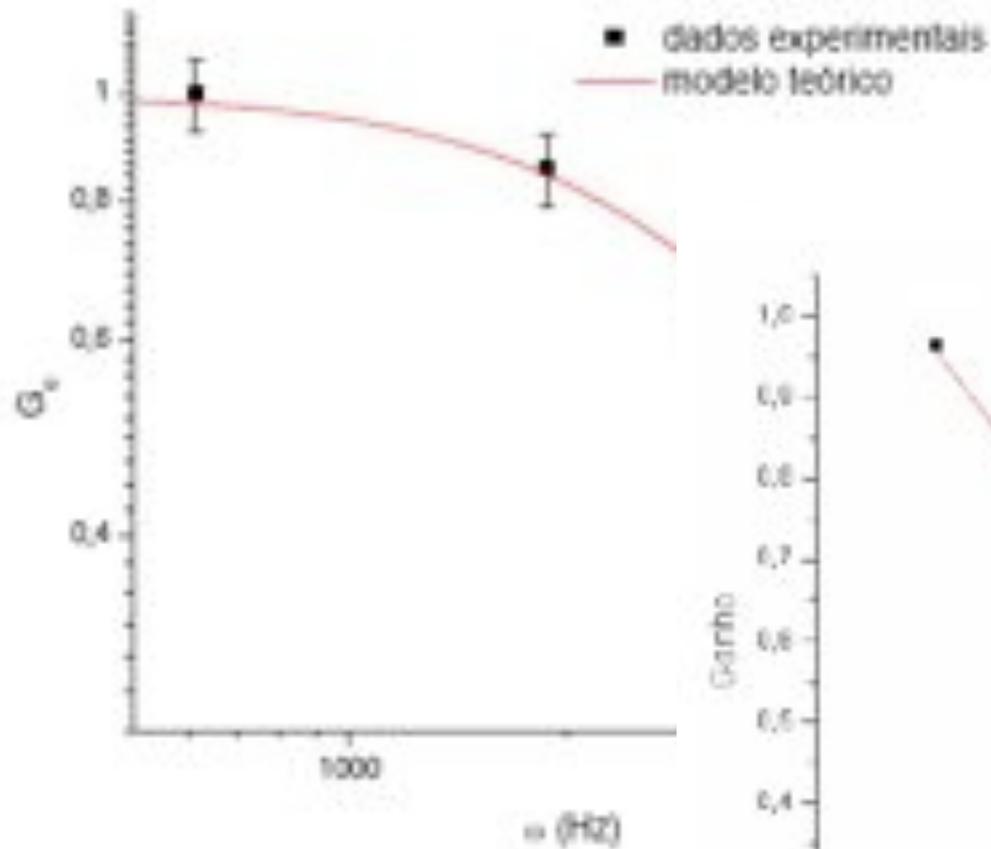
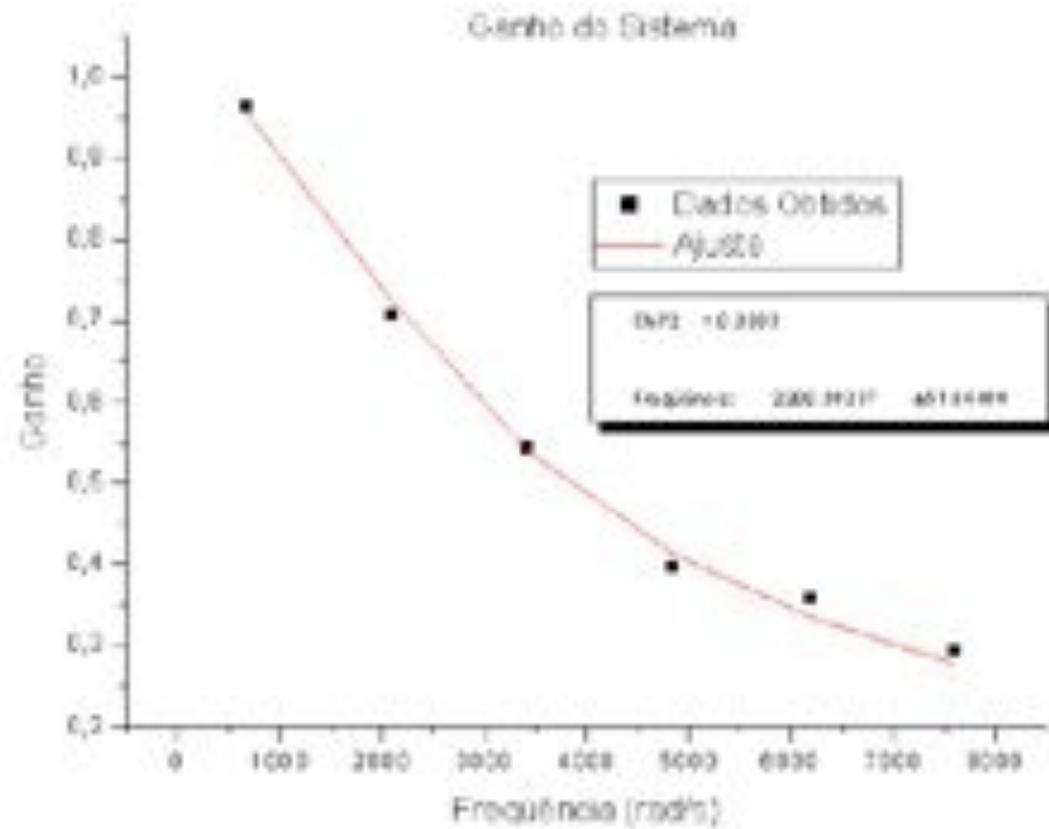
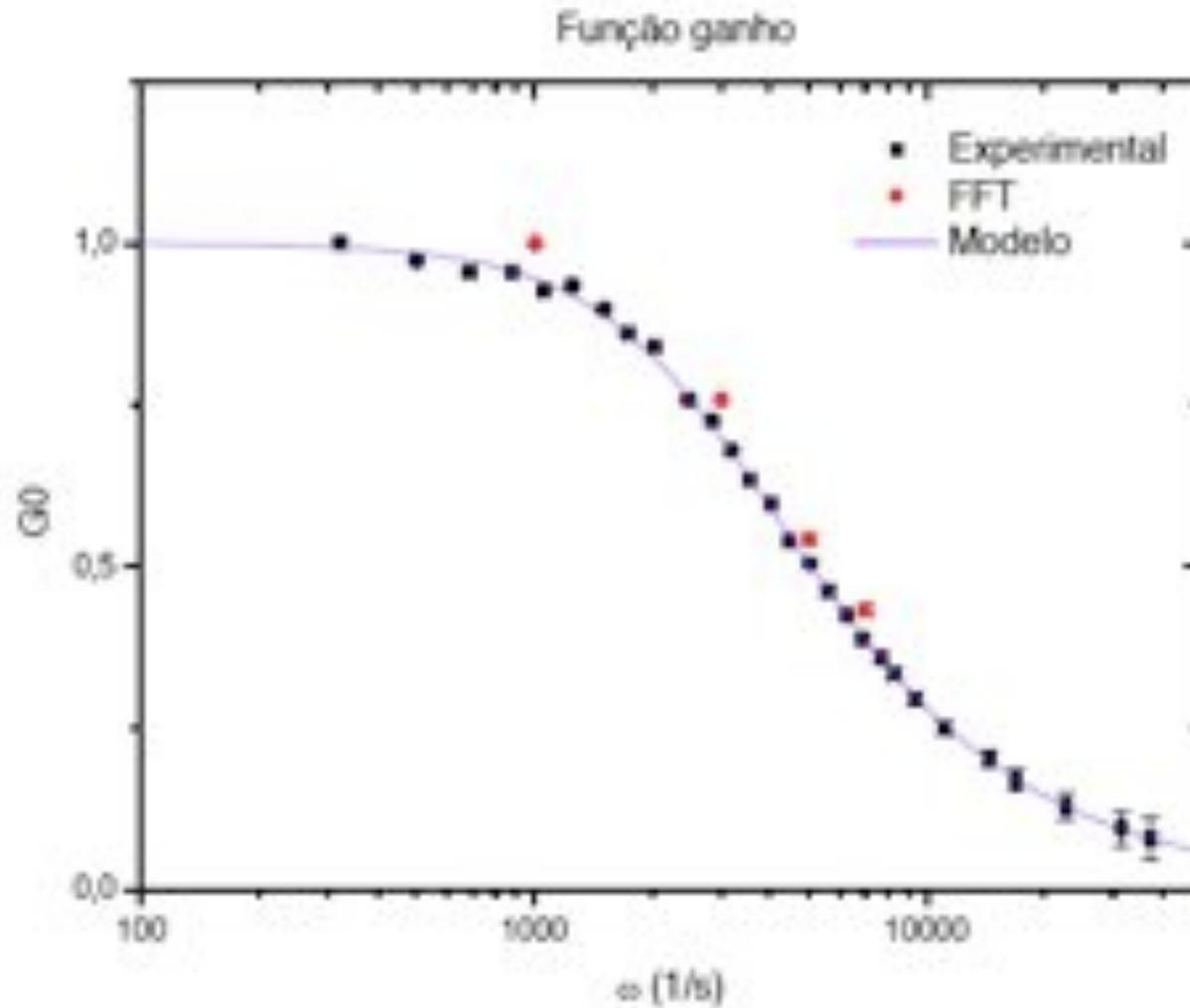


Gráfico 4: Gráfico do ganho (G_v) em



GANHO DO FILTRO RC

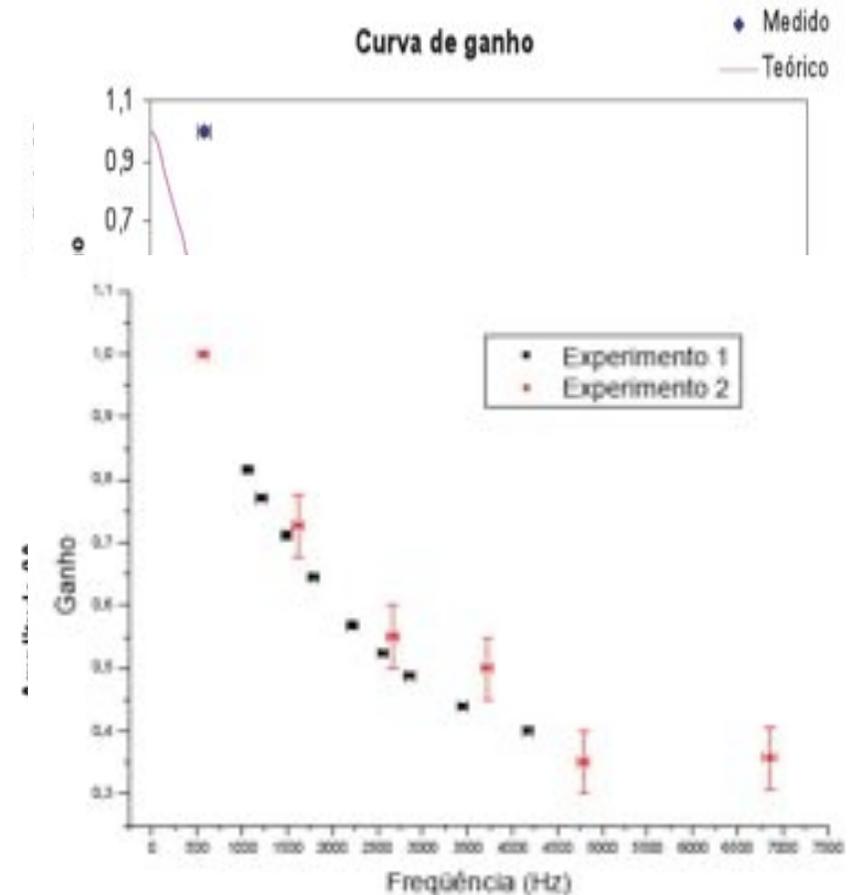


FFT \rightarrow $G = 1$ na
frequência básica!
O que fazer?

Gráfico 4

COMO RESOLVER O PROBLEMA?

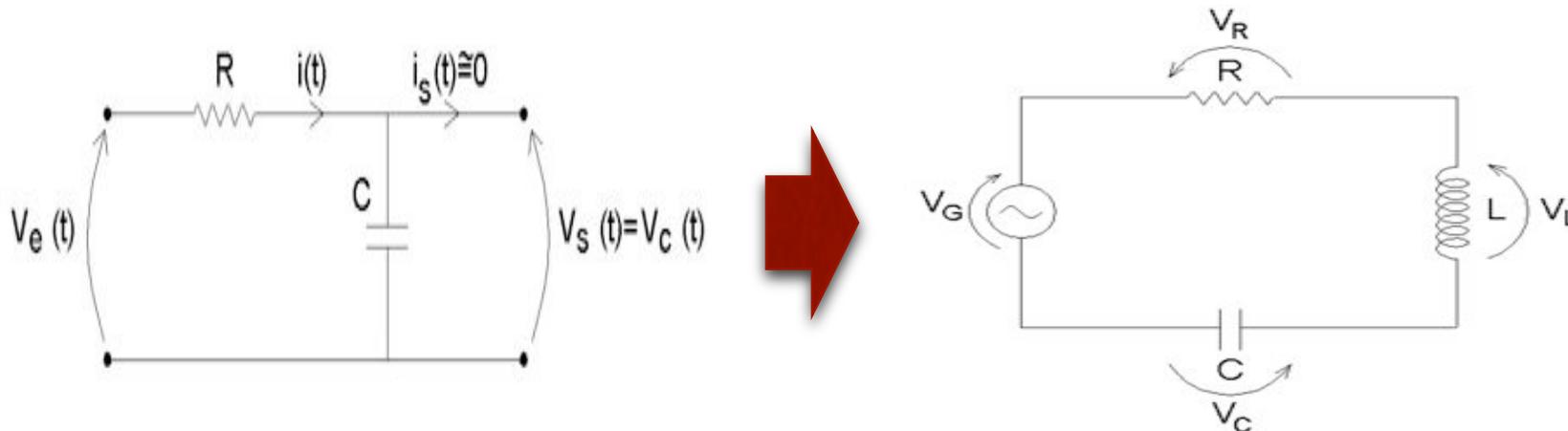
- Retornar os dados?
 - Solução mais simples
- Normalizar pela razão das tensões de pico-a-pico da saída e entrada?
 - Aproximação que a primeira componente da transformada não tenha fatores extras
- Normalizar com a previsão teórica do ganho?
 - Depende do modelo estar certo
- Normalizar com tomadas de dados anteriores



$$V(t) = V_0 \left[\frac{4}{\pi} \sin(\omega t) + \dots \right]$$

INCREMENTANDO O FILTRO RC \rightarrow RLC

- Adicionar um novo elemento \rightarrow indutor
- O que ocorre com o ganho do circuito?
- E se definimos o ganho como a tensão em outro elemento que não o capacitor?



O INDUTOR

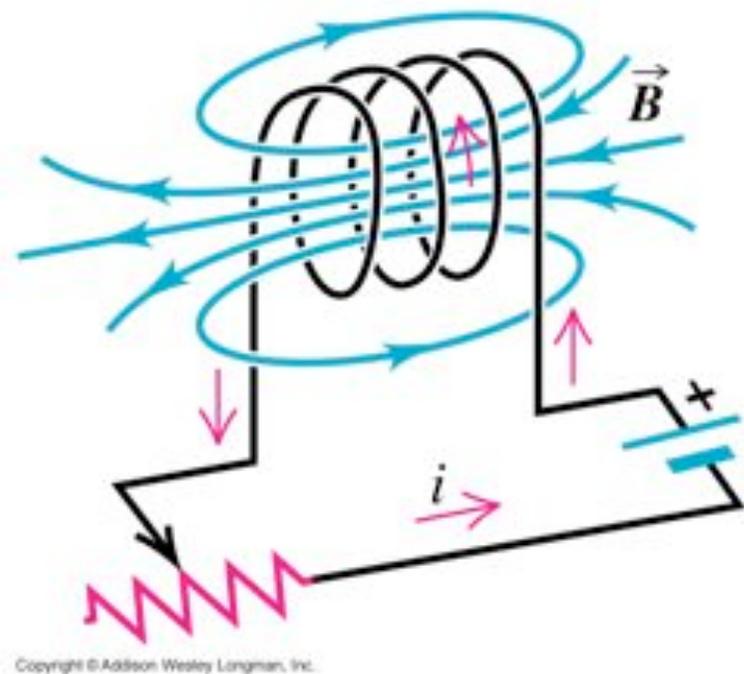
○ Lei de Faraday $\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt}$

○ Indutor

- Sistema de bobina
- Ao passar uma corrente, um campo magnético é criado, proporcional a esta corrente

$$B = f(i)$$

- Se a corrente for variável, o campo também será



O INDUTOR

- Usando a Lei de Faraday

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

- Irá surgir, nos terminais do indutor, uma tensão elétrica proporcional à variação de fluxo magnético
 - Como a geometria (área) é constante, esta variação do fluxo é devida somente à variação de campo magnético (ou corrente)

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -A\frac{dB}{dt} = -Cte\frac{di}{dt}$$

O INDUTOR

- O indutor é um elemento elétrico que provoca uma queda de tensão no circuito dada por:

$$V_L = L \frac{di}{dt}$$

L é a indutância do elemento
([L] = H)

- Sendo a corrente que passa pelo indutor dada por:

$$\hat{i}_L = i_0 e^{j\omega t}$$

- A tensão elétrica no indutor será:

$$\hat{V}_L = L \frac{d\hat{i}}{dt} = j\omega L i_0 e^{j\omega t}$$

O INDUTOR

- A impedância pode ser calculada a partir de

$$\hat{Z}_L = \frac{\hat{V}_L}{\hat{i}_L}$$

- Ou seja:

$$\hat{Z}_L = \frac{j\omega L i_0 e^{j\omega t}}{i_0 e^{j\omega t}} \Rightarrow \hat{Z}_L = j\omega L$$

- Pensando na expressão $e^{jx} = \cos x + j \sin x$

$$\hat{Z}_L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}}$$

← Ou seja, a tensão está desfasa de $\pi/2$ em relação à corrente

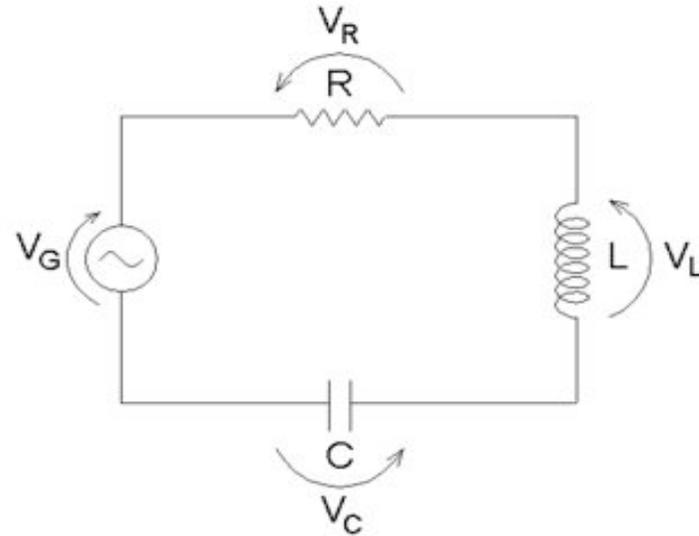
O FILTRO RLC

- Sabendo o que é um indutor, temos o filtro RLC ao lado:

$$\hat{V}_G = V_G e^{j\omega t}$$

- A impedância total do circuito é:

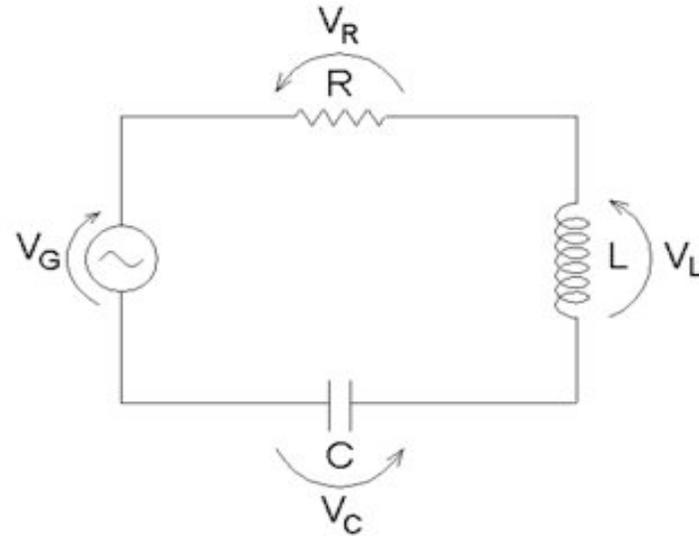
$$\hat{Z} = \hat{Z}_R + \hat{Z}_L + \hat{Z}_C = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$



O FILTRO RLC

- Podemos escrever também que a impedância é:

$$\hat{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = Ze^{j\phi}$$



- Com:

$$Z = \sqrt{\hat{Z}^* \cdot \hat{Z}} = \sqrt{\left(R - j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right) \cdot \left(R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right)}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

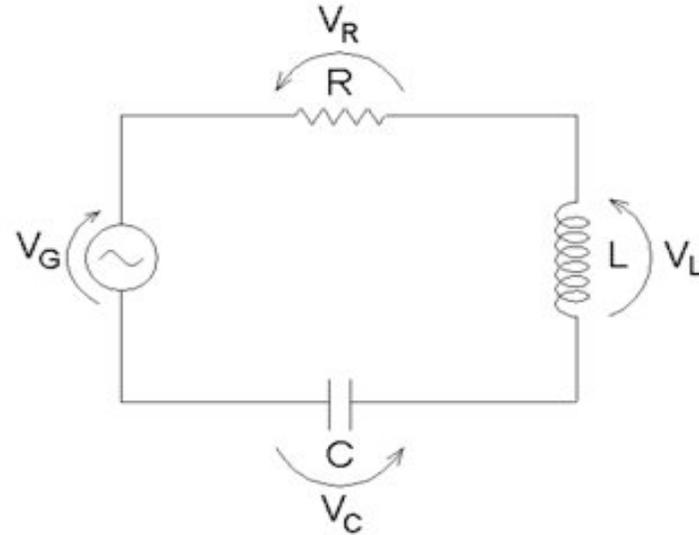
O FILTRO RLC

- Podemos escrever também que a impedância é:

$$\hat{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = Ze^{j\phi}$$

- Com:

$$\phi = \arctan\left(\frac{\text{Im}[\hat{Z}]}{\text{Re}[\hat{Z}]}\right) = \arctan\left(\omega \frac{L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)$$



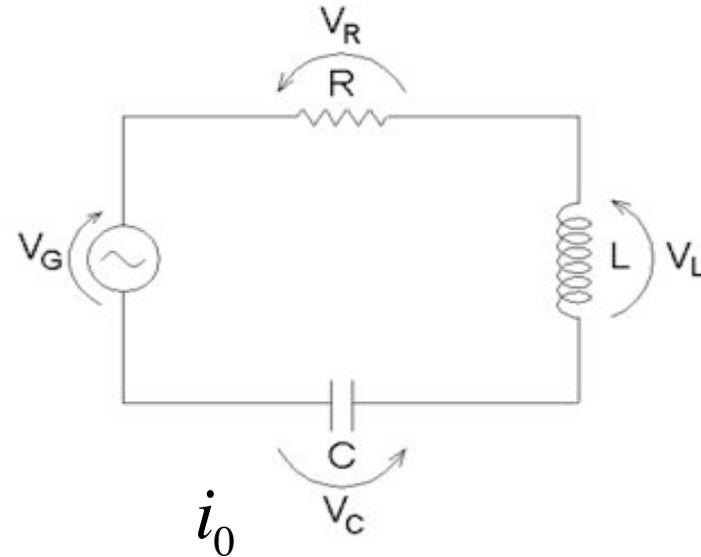
O FILTRO RLC

- Então, a corrente no circuito ao lado vale:

$$\hat{i} = \frac{\hat{V}}{\hat{Z}} = i_0 e^{j(\omega t - \phi_i)}$$

- Que vale:

$$\hat{i} = \frac{V_G e^{j\omega t}}{Z e^{j\phi}} = \frac{V_G}{Z} e^{j(\omega t - \phi)} = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{j(\omega t - \phi)}$$



O FILTRO RLC

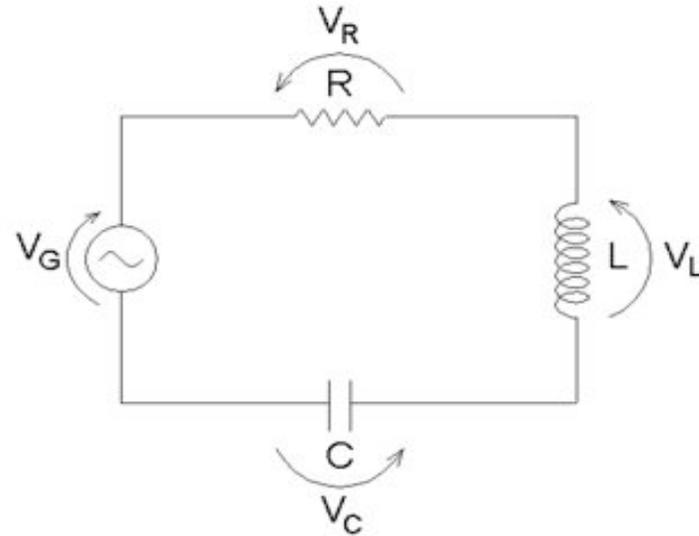
- Sabendo que a corrente é a mesma em cada elemento do circuito, podemos obter a tensão sobre cada um deles através de:

$$\hat{V}_X = \hat{i} \cdot \hat{Z}_X$$

- Para o resistor:

$$\hat{Z}_R = R$$

$$\hat{V}_R = R i_0 e^{j(\omega t - \phi)}$$



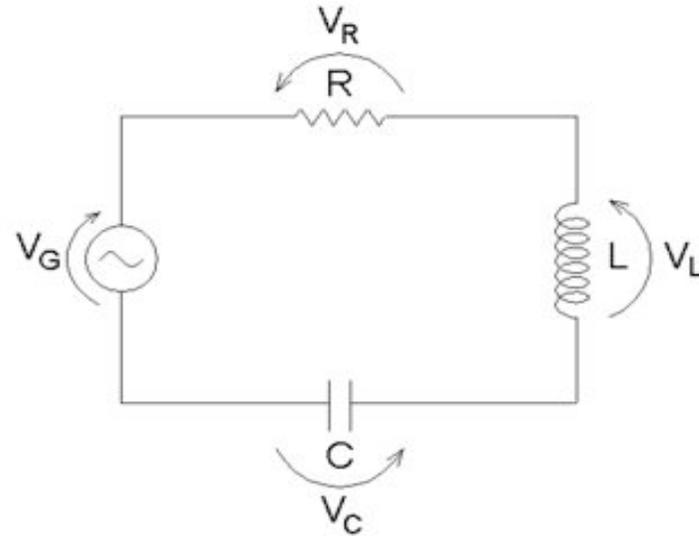
O FILTRO RLC

- Sabendo que a corrente é a mesma em cada elemento do circuito, podemos obter a tensão sobre cada um deles através de:

$$\hat{V}_X = \hat{i} \cdot \hat{Z}_X$$

- Para o indutor:

$$\hat{Z}_L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} \quad \hat{V}_L = \omega L i_0 e^{j\left(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2}\right)}$$



O FILTRO RLC

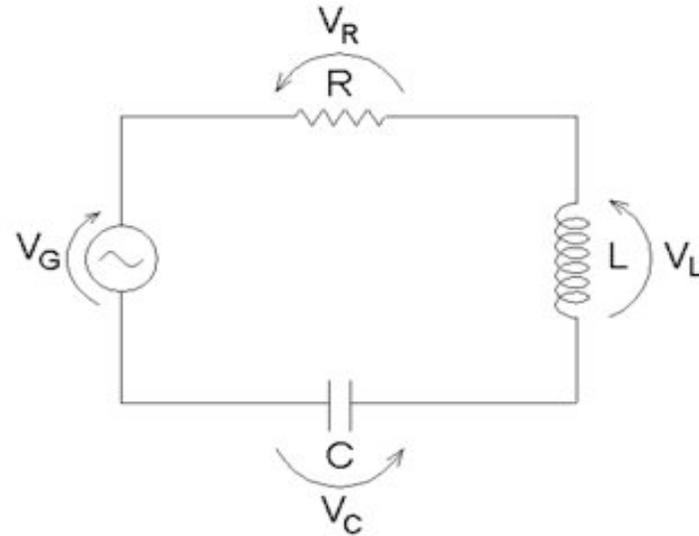
- Sabendo que a corrente é a mesma em cada elemento do circuito, podemos obter a tensão sobre cada um deles através de:

$$\hat{V}_X = \hat{i} \cdot \hat{Z}_X$$

- Para o capacitor:

$$\hat{Z}_C = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\hat{V}_C = \frac{i_0}{\omega C} e^{j\left(\omega t - \phi - \frac{\pi}{2}\right)}$$

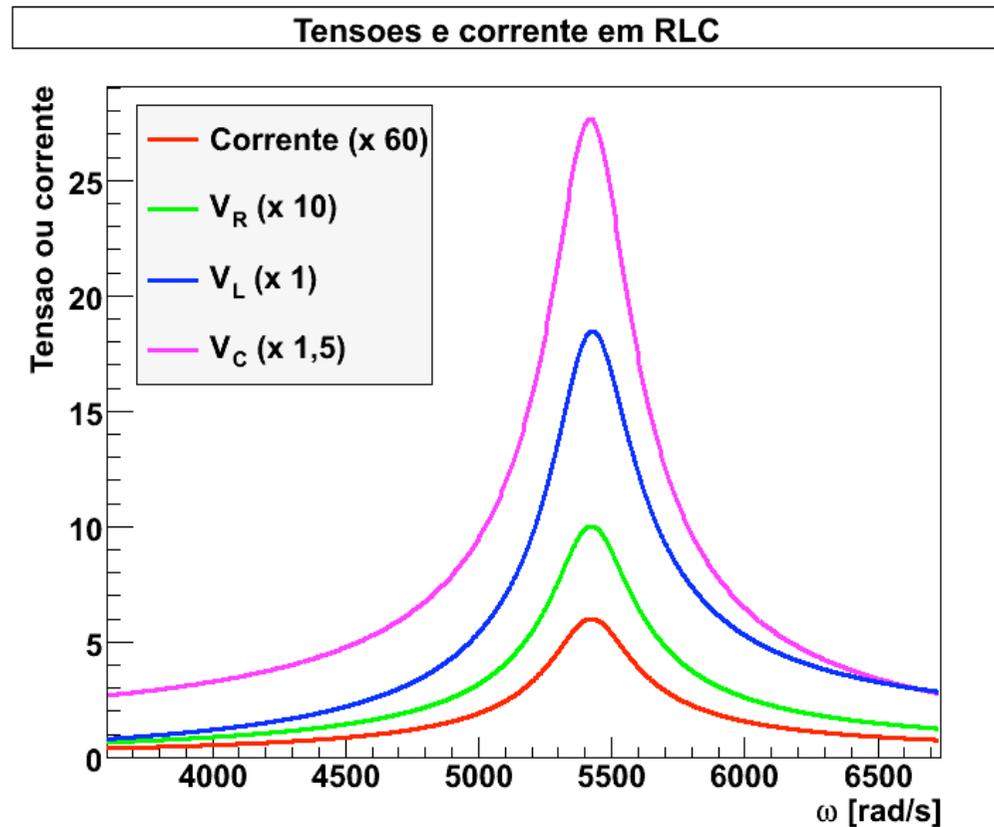


OBJETIVOS DA AULA DE HOJE

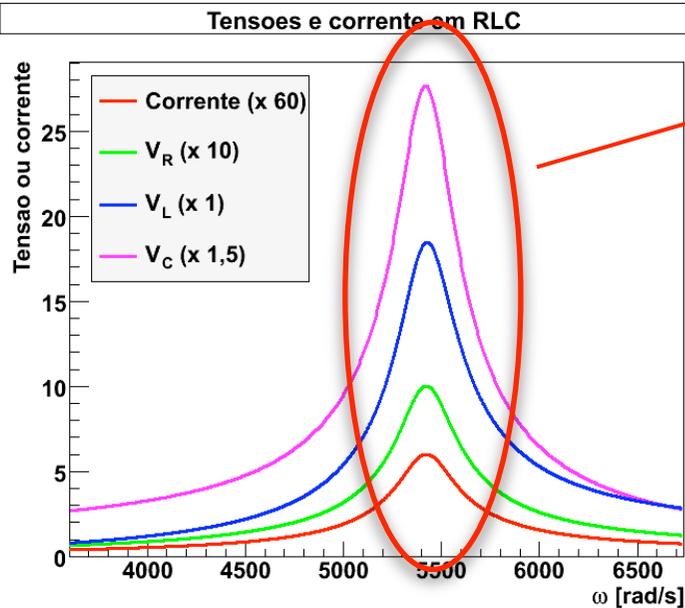
- Medir o ganho de um circuito RLC em função da frequência da onda harmônica
 - Mas vamos medir o ganho sobre qual elemento?
 - Vamos utilizar qual método de medida de ganho?
 - Ondas harmônicas simples ou
 - Análise de Fourier de um sinal adequado?
 - Onda quadrada, por exemplo.
- Como decidir qual elemento medir e qual método utilizar?
 - Análise do problema físico e da expectativa teórica.

O QUE PODEMOS PREVER DO CIRCUITO?

- Sabemos, teoricamente, como calcular as tensões e corrente no circuito
- Sabemos os valores típicos de capacitores, indutores e resistores disponíveis no laboratório didático
- Fazemos previsões teóricas



QUAL A FÍSICA QUE PODEMOS ESTUDAR?



○ sistema real se comporta como a previsão teórica?

Existe alguma Física que não estamos considerando neste problema?

As tensões e correntes apresentam um pico em um valor de frequência bem definido

RESSONÂNCIA

A posição do pico é a mesma para todos sinais?

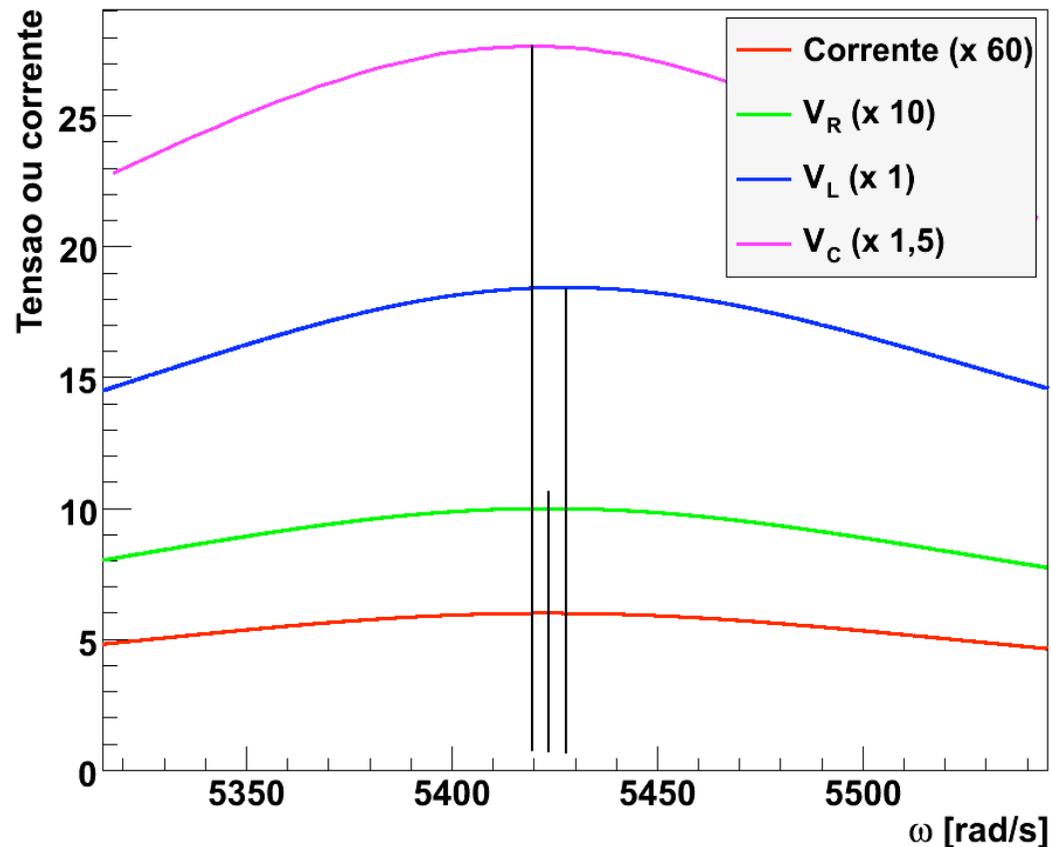
○ que define a posição deste pico?

○ que define a altura e largura deste pico?

Existe física mais fundamental envolvida?

QUAL A FÍSICA QUE PODEMOS ESTUDAR?

Tensoes e corrente em RLC



As tensões e correntes apresentam um pico em um valor de frequência bem definido

RESSONÂNCIA

A posição do pico é a mesma para todos sinais?

O que define a posição deste pico?

O que define a altura e largura deste pico?

Existe física mais fundamental envolvida?

QUAL A FÍSICA QUE PODEMOS ESTUDAR?

- Ressonância em corrente

$$\hat{i} = \frac{V_G}{\underbrace{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}_{i_0}} e^{j(\omega t - \phi)}$$

- Condição para corrente máxima

$$\frac{di_0}{d\omega} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\omega} \left(R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right) = 0$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

As tensões e correntes apresentam um pico em um valor de frequência bem definido

RESSONÂNCIA

A posição do pico é a mesma para todos sinais?

O que define a posição deste pico?

O que define a altura e largura deste pico?

Existe física mais fundamental envolvida?

QUAL A FÍSICA QUE PODEMOS ESTUDAR?

- Ressonância em carga (tensão no capacitor)

$$\hat{V}_C = \frac{V_G}{\underbrace{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}_{V_{C0}}} e^{j\left(\omega t - \phi - \frac{\pi}{2}\right)}$$

- Condição para tensão máxima

$$\frac{dV_{C0}}{d\omega} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\omega} \left[\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \right] = 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{2L^2}}$$

As tensões e correntes apresentam um pico em um valor de frequência bem definido

RESSONÂNCIA

A posição do pico é a mesma para todos sinais?

O que define a posição deste pico?

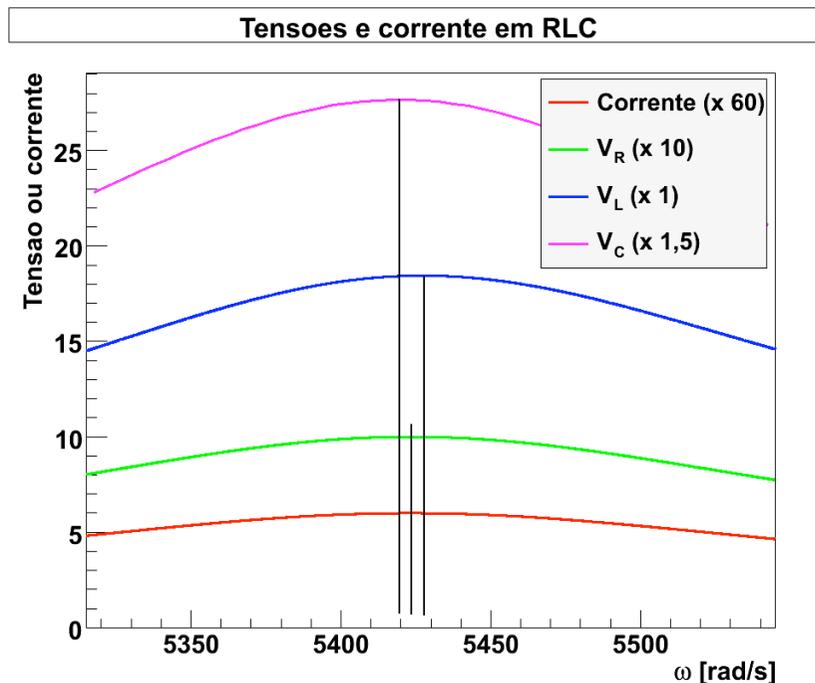
O que define a altura e largura deste pico?

Existe física mais fundamental envolvida?

QUAL A FÍSICA QUE PODEMOS ESTUDAR?

- Pergunta experimental: É possível distinguir as frequências de ressonância em carga e corrente?

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{2L^2}}$$



$$\omega_0 - \omega_1 \sim 5/5000 \sim 0,01\%$$

As tensões e correntes apresentam um pico em um valor de frequência bem definido

RESSONÂNCIA

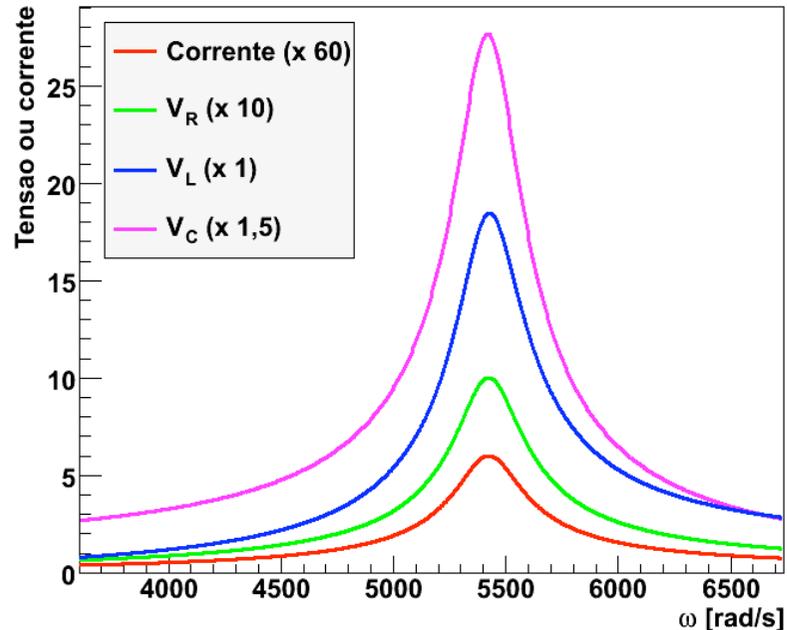
A posição do pico é a mesma para todos sinais?

O que define a posição deste pico?

Se há limitações experimentais, a diferença entre as frequências de ressonância é difícil de ser estudada

QUAL A FÍSICA QUE PODEMOS ESTUDAR?

Tensoes e corrente em RLC



- Fator de qualidade (Q) do circuito.

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

$\Delta\omega$ é a largura do pico de ressonância na curva de POTÊNCIA à 1/2 da altura máxima

As tensões e correntes apresentam um pico em um valor de frequência bem definido

RESSONÂNCIA

A posição do pico é a mesma para todos sinais?

O que define a posição deste pico?

O que define a altura e largura deste pico?

Existe física mais fundamental envolvida?

QUAL A FÍSICA QUE PODEMOS ESTUDAR?

- Fator de qualidade (Q) do circuito.

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = 2\pi \left(\frac{U}{\Delta U} \right)$$

- U é a energia armazenada no sistema na condição de ressonância

$$U = \frac{1}{2} Li_0^2 = \frac{1}{2} CV_{C0}^2$$

Energia armazenada no campo elétrico do capacitor ou no campo magnético do indutor

- ΔU é a energia dissipada pelo sistema durante um período de oscilação

$$\Delta U = PT = \frac{1}{2} Ri_0^2 T$$

Energia dissipada no resistor em um período

ESTUDAR A APOSTILA DO CURSO/2007

As tensões e correntes

em um bem

A posição do pico é a mesma para todos sinais?

que define a posição deste pico?

O que define a altura e largura deste pico?

Existe física mais fundamental envolvida?

QUAL A FÍSICA QUE PODEMOS ESTUDAR?

- A frequência de ressonância é ligeiramente diferente se observarmos a corrente, tensão no capacitor ou indutor
 - Contudo, é muito difícil quantificar experimentalmente
 - **CONCLUSÃO:** Vamos medir apenas uma curva de ressonância e tentar aprender o máximo possível com ela.
 - Ressonância em corrente.
 - Podemos estudar a potência!!!
- O que podemos obter da curva de ressonância?
 - Frequência e largura
 - Fator de qualidade (Q)
 - Energia armazenada e dissipada no circuito.

As tensões e correntes apresentam um pico em um valor de frequência bem definido

RESSONÂNCIA

A posição do pico é a mesma para todos sinais?

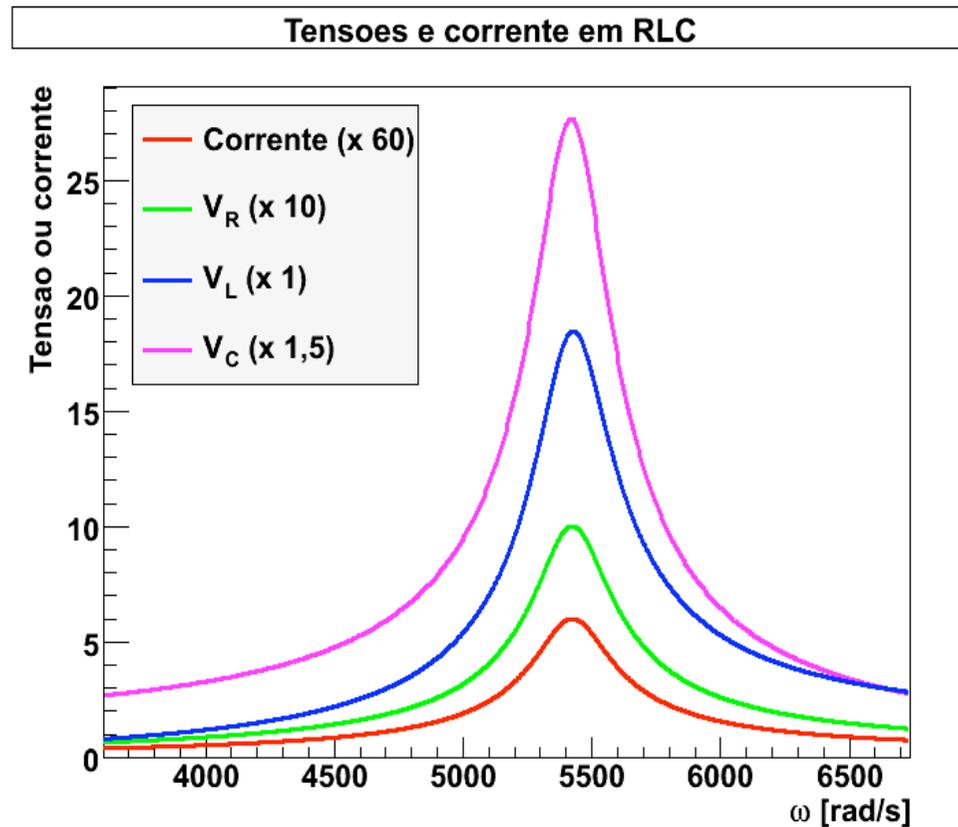
O que define a posição deste pico?

O que define a altura e largura deste pico?

Existe física mais fundamental envolvida?

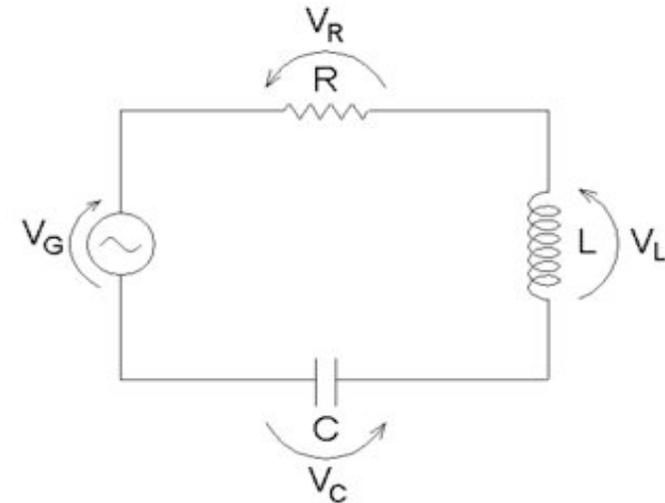
UMA ÚLTIMA PERGUNTA:

- Qual método de medida devemos utilizar?
- Ondas harmônicas simples ou
- Transformada de Fourier?



ATIVIDADES DA SEMANA

- Levantar a curva de ressonância em energia do circuito RLC para DOIS valores de R
 - Usar $L \sim 35 \text{ mH}$
 - Usar $C \sim 1 \mu\text{F}$
 - Usar $R \sim 1 \text{ e } 33 \Omega$.
 - Usar o casador de impedâncias da fonte



PARA ENTREGAR...

- Entregar curvas de i vs ω e P vs ω para os dois resistores
 - Superpor curvas teóricas e comparar com os resultados experimentais.
 - O sistema real se comporta como a previsão teórica?
 - Obter o valor de Q experimental e comparar com o previsto teoricamente.
 - Lembre-se que queremos medir a curva de ressonância, que pode ser bem localizada em frequências. Use o seu conhecimento experimental para determinar quantos pontos são razoáveis para caracterizar bem esta curva
- Com $\omega = \omega_0$, na frequência de ressonância, medir V_C e V_L .
 - Qual a previsão teórica para a comparação de V_C com V_L na ressonância? Os dados suportam esta previsão?