Experiência I
Circuitos CA e Caos

Aula 01

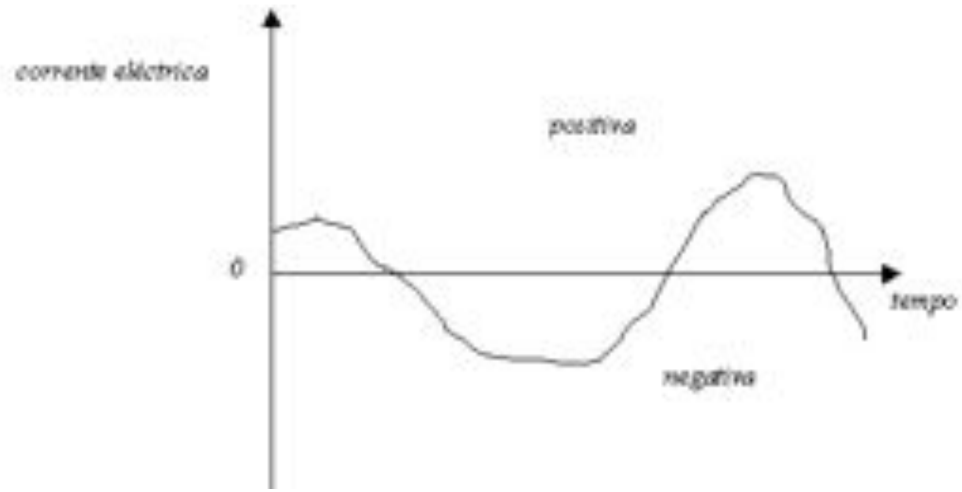
Prof. Alexandre Suaide
Ed. Oscar Sala, 246. ramal 7072

Objetivos

- Estudar circuitos elétricos em corrente alternada com a finalidade de explorar fenômenos caóticos
- Aprender algumas técnicas avançadas de processamento de sinais e análise de dados
- 5 aulas
  - Noções de CA, filtro RC e circuito integrador
  - Análise de Fourier unidimensionais
  - Ressonância de um circuito RLC simples
  - Caos em circuito RLD

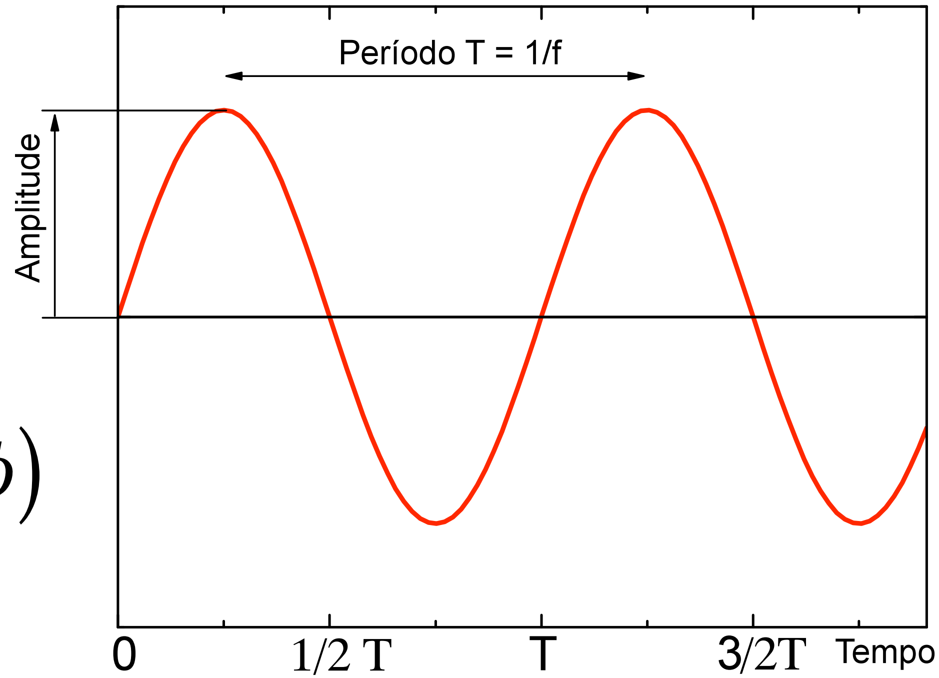
Tensões e correntes alternadas

- De forma genérica, qualquer tensão que varia no tempo
- Na prática costumamos trabalhar com tensões harmônicas simples
  - Na verdade, vamos ver em Lab IV que qualquer tensão dependente do tempo pode ser descrita como uma superposição de tensões harmônicas simples



Tensões harmônicas simples

- São aquelas que podem ser descritas por uma função harmônica simples de freqüência bem definida, ou seja



$$V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$$

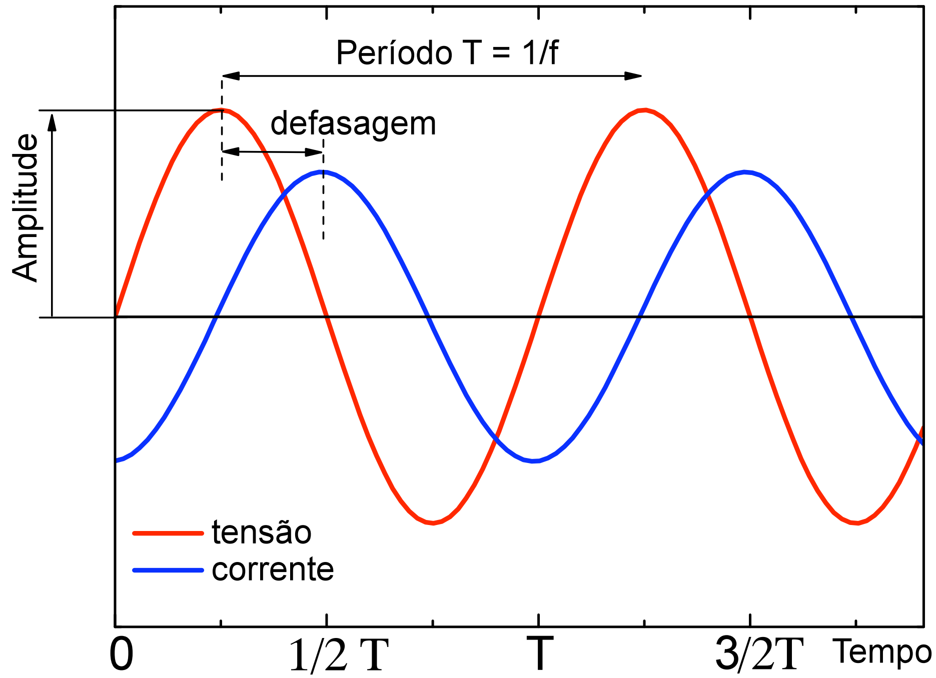
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

TENSÕES E CORRENTES → FASE

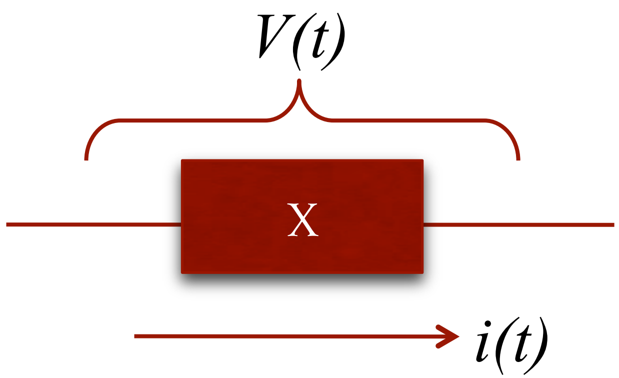
- Em um circuito de corrente alternada a tensão e corrente não necessariamente estão em fase

$$i(t) = i_0 \cos(\omega t)$$

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$$



$$\phi = 2\pi \frac{\Delta T}{T} = \omega \cdot \Delta T$$

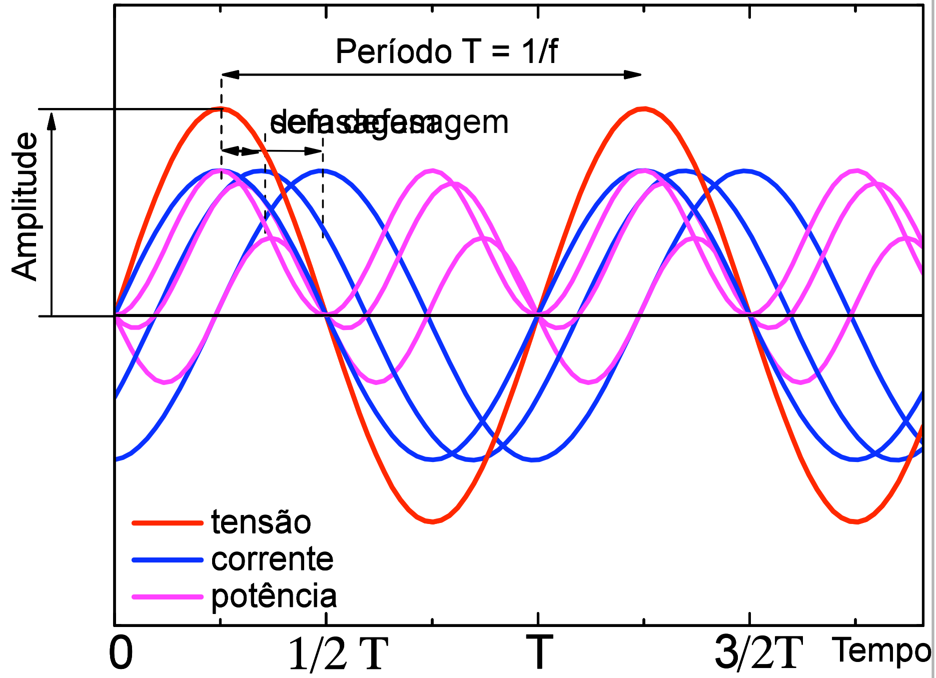


Potência instantânea

- Instantânea

$$P(t) = V(t) \cdot i(t)$$

$$P(t) = V_0 \cdot i_0 \cdot \cos(\omega t + \phi) \cdot \cos(\omega t)$$



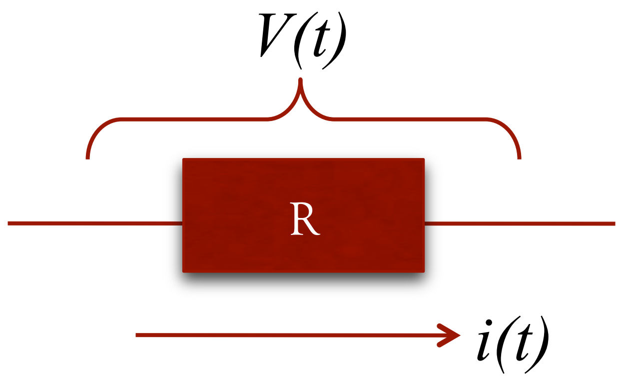
- Depende da fase entre corrente e tensão
  - Pode ser negativa

Potência positiva é aquela consumida

Potência negativa é aquela fornecida

Exemplo 1 – Resistor Ôhmico simples

- Em um resistor ôhmico simples, a relação entre tensão e corrente é:



$$R = \frac{V}{i} = \text{constante}$$

$$i(t) = i_0 \cos(\omega t)$$

$$V(t) = R \cdot i(t) = R \cdot i_0 \cdot \cos(\omega t)$$

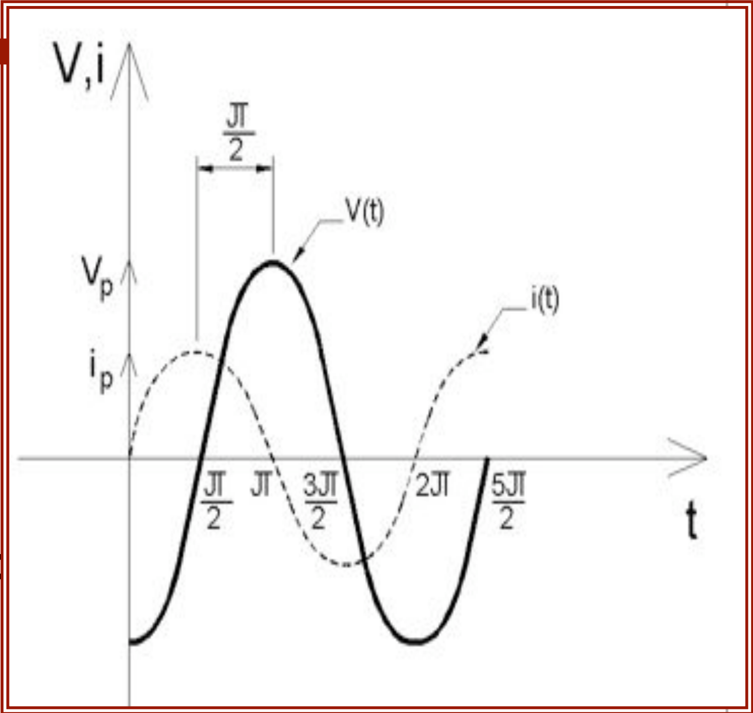
A fase entre tensão e corrente é nula

- A potência instantânea vale

Um resistor sempre consome energia

$$P(t) = V(t) \cdot i(t) = R \cdot i_0^2 \cdot \cos^2(\omega t) > 0, \text{ sempre}$$

Exemplo 2 – Capacitor ideal



- Em um capacitor ideal, a capacitância é dada pela razão entre carga acumulada e tensão elétrica, ou seja:

$$C = \frac{Q(t)}{V(t)} \Rightarrow V(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

- Como carga e corrente estão relacionadas por:

$$Q(t) = \int i(t)dt \Rightarrow V(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

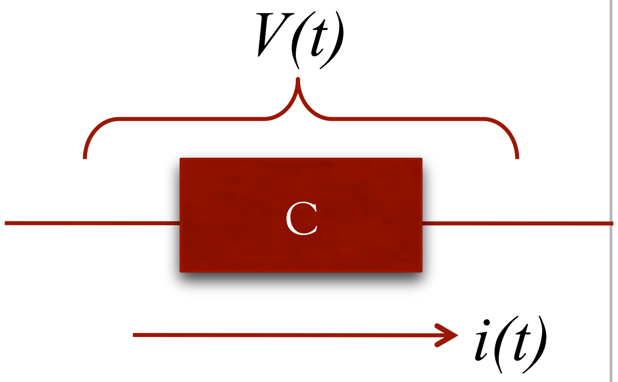
- Ou seja

$$i(t) = i_0 \cos(\omega t) \Rightarrow V(t) = \frac{i_0}{C}\int \cos(\omega t)dt$$

$$V(t) = \frac{i_0}{\omega C}\sin(\omega t) = \frac{i_0}{\omega C}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

A fase entre tensão e corrente NÃO é nula

EXEMPLO 2 – CAPACITOR IDEAL

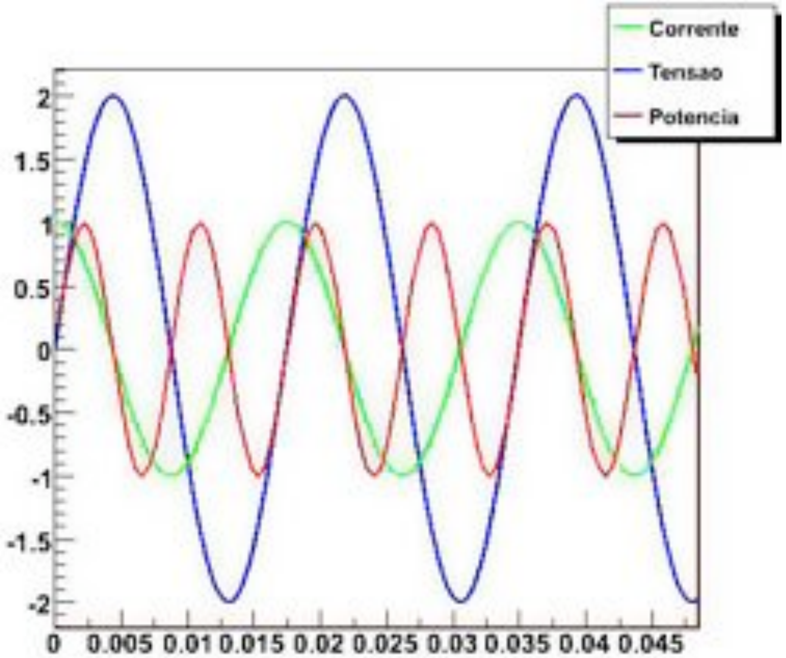


- A potência em um capacitor pode ser escrita como

$$P(t) = V(t) \cdot i(t)$$

- Ou seja

$$P(t) = \frac{i_0^2}{\omega C}\cos(\omega t)\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$



Muitos elementos, em CA, possuem fases não nulas entre corrente e tensão. Nestes casos, o formalismo trigonométrico torna-se bastante complexo e incoveniente.

Números complexos

$$\hat{C} = a + b\,j \qquad j = \sqrt{-1}$$

$$\hat{C}^* = a - b\,j$$

$$\hat{C} = C\,e^{j\alpha} \qquad e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$C = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$tg\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{j\omega t}\right) = j\omega\, e^{j\omega t}$$

$$\int e^{j\omega t}\,dt = \frac{1}{j\omega}\,e^{j\omega t}$$

Integrais e derivadas nesta notação são apenas multiplicações e divisões

Formalismo complexo

- Este formalismo é construido de tal forma a facilitar todos os cálculos que envolvem tensões alternadas
- Vamos definir as Tensões e Correntes complexas como sendo:

$$\hat{V}(t) = V_0 e^{j(\omega t + \phi_0)}$$

$$V(t) = \mathrm{Re}\left[\hat{V}(t)\right] = \cos(\omega t + \phi_0)$$

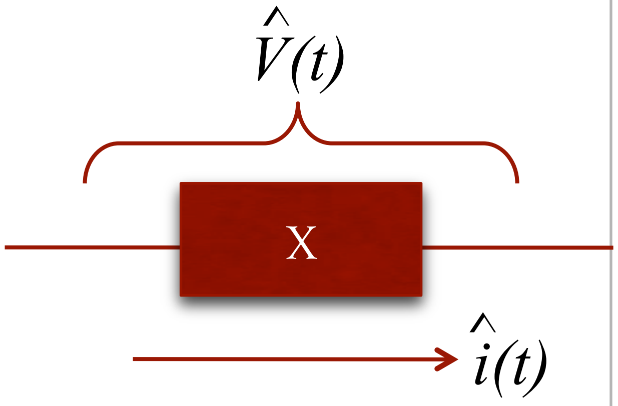
$$\hat{i}(t) = i_0 e^{j(\omega t + \phi_1)}$$

$$i(t) = \mathrm{Re}\left[\hat{i}(t)\right] = \cos(\omega t + \phi_1)$$

Impedância (complexa e real)

- A impedância complexa de um elemento X é definida como sendo a razão entre a tensão e corrente complexas neste elemento, ou seja:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)}$$



- Usando a definição das tensões e correntes complexas, deduzimos que:

$$\hat{Z} = \frac{V_0 e^{j(\omega t + \phi_0)}}{i_0 e^{j(\omega t + \phi_1)}} = \frac{V_0}{i_0} e^{j(\phi_0 - \phi_1)} = Z_0 e^{j\phi}$$

Z_0 é a impedância REAL do Elemento X

ϕ é a diferença de fase entre a Tensão e corrente causada pelo Elemento X

A impedância NÃO varia com o tempo. É uma grandeza característica do elemento X

Resistência e reatância

- Da definição de impedância complexa

$$\hat{Z} = Z_0 e^{j\phi}$$

- Podemos também escrever que

$$\hat{Z} = Z_0 \cos(\phi) + jZ_0 \sin(\phi)$$

- Define-se resistência (R) de um bipolo como sendo:

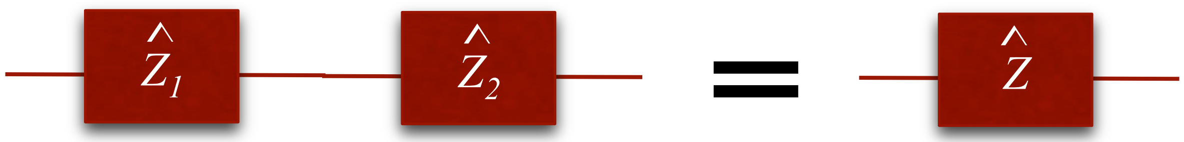
$$R = Z_0 \cos(\phi)$$

- E reatância deste bipolo (X) como:

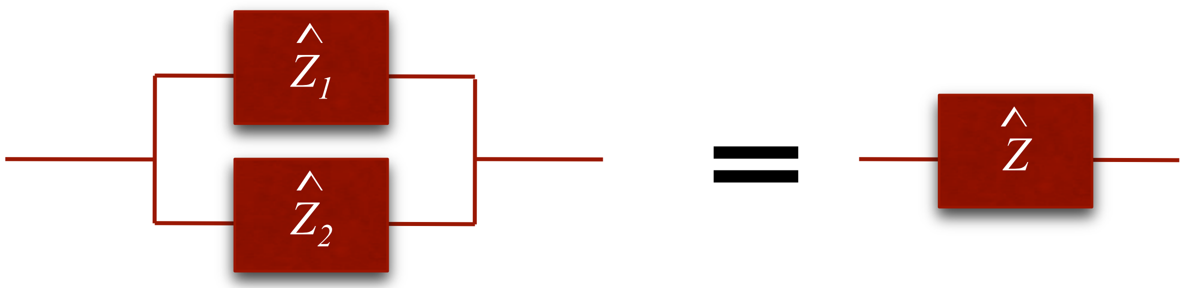
$$X = Z_0 \sin(\phi)$$

Porque usar este formalismo?

- As grandes vantagens deste formalismo são:
  - Operações envolvendo tensão e corrente são simples
    - Multiplicações e divisões de exponenciais.
  - Associações de bipolos tornam-se simples
    - Como resistores comuns, mas realizadas com grandezas complexas

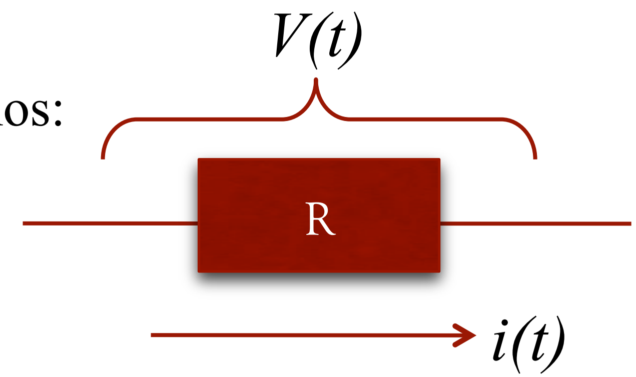


$$\hat{Z} = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2$$



$$\frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2}$$

Vamos olhar o resistor novamente



- Seja uma tensão e corrente complexas, temos:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)}$$

- Mas sabemos que $R = V/i$, ou seja, a corrente e tensão estão sempre em fase. Assim:

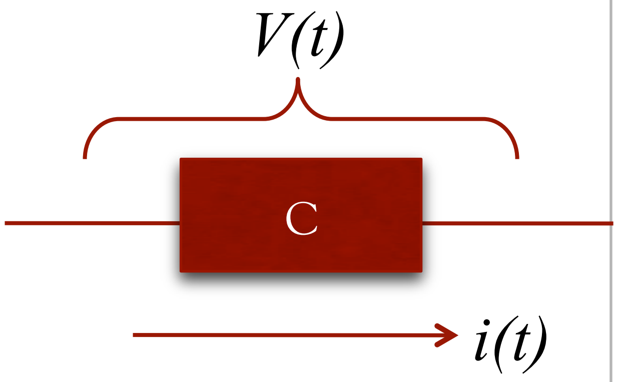
$$\hat{Z} = Z_0 e^{j\phi} = R \quad \Rightarrow \begin{cases} Z_0 = R \\ \phi = 0 \end{cases}$$

Por conta disto que resistores Ôhmicos são muito utilizados em laboratório para medir correntes

No caso do capacitor

- Sabemos que (do começo da aula)

$$V(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$



- Se a corrente complexa for dada por:

$$\hat{i}(t) = i_0 e^{j\omega t}$$

- Fica fácil demonstrar que

$$V(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt = \frac{1}{C}\int i_0 e^{j\omega t}dt = \frac{1}{j\omega C} i_0 e^{j\omega t} = -\frac{j}{\omega C} i_0 e^{j\omega t}$$

- A impedância de um capacitor vale:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)} = \frac{-\frac{j}{\omega C} i_0 e^{j\omega t}}{i_0 e^{j\omega t}} = -\frac{j}{\omega C}$$

No caso do capacitor

- Ou seja

$$\hat{Z} = -\frac{j}{\omega C}$$

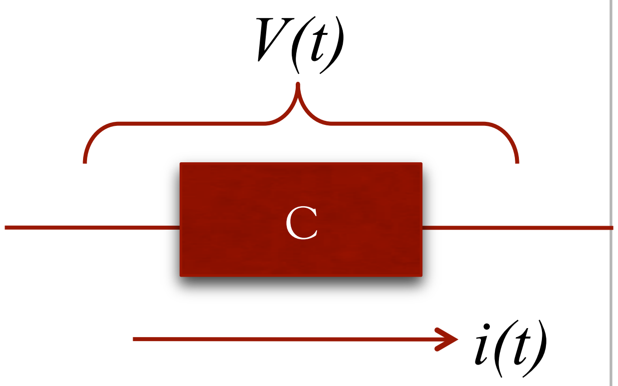
- Mas lembrando que:

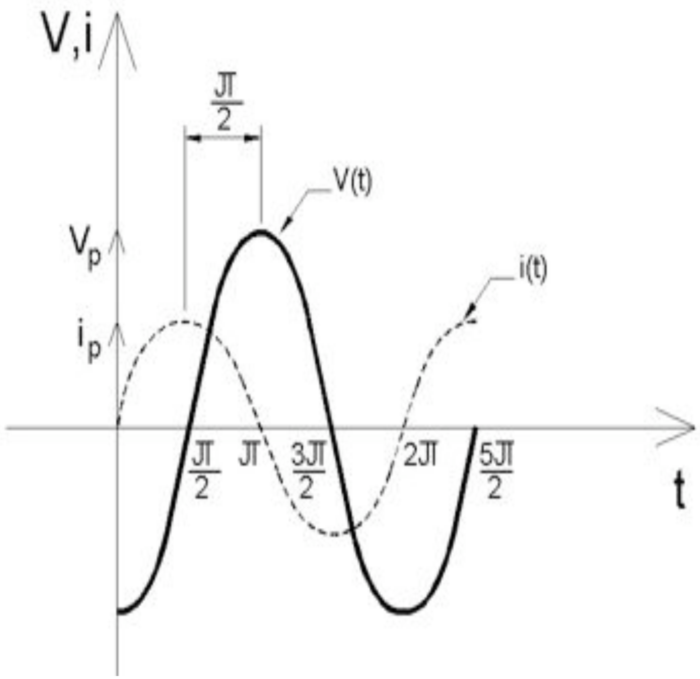
$$\hat{Z} = Z_0 \cos(\phi) + jZ_0 \sin(\phi)$$

- Comparando as duas expressões temos que:

$$Z_0 = \frac{1}{\omega C} \qquad \phi = -\frac{\pi}{2}$$

Conclui-se naturalmente que a tensão elétrica está defasada de π/2 em relação à corrente





COMO FICA A POTÊNCIA?

- A partir da definição de potência:

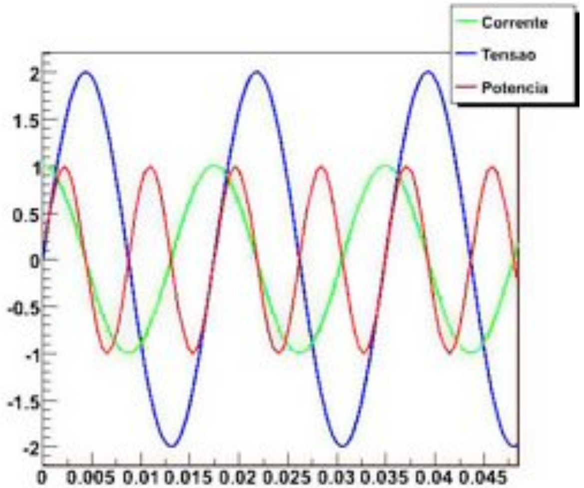
$$P(t) = V(t) \cdot i(t) \quad = V_0 \cdot i_0 \cdot \cos(\omega t + \phi) \cdot \cos(\omega t)$$

- E, sabendo que, a partir de $\quad e^{jx} = \cos x + j \sin x$

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right)$$

- Podemos escrever que:

$$P(t) = V_0 i_0 \left[\frac{1}{2}\left(e^{j(\omega t + \phi)} + e^{-j(\omega t + \phi)}\right)\frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)\right]$$



- Ou seja:

$$P(t) = \frac{V_0 i_0}{4}\left[e^{j(2\omega t + \phi)} + e^{-j(2\omega t + \phi)} + e^{j\phi} + e^{-j\phi}\right] = \frac{V_0 i_0}{2}\left[\cos(2\omega t + \phi) + \cos(\phi)\right]$$

Como fica a potência?

- Vamos calcular agora a potência média do bipolo

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt \qquad = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_0 i_0}{2}\left[\cos(2\omega t + \phi) + \cos(\phi)\right]dt$$

- Ou seja:

$$P = \frac{V_0 i_0}{2}\frac{1}{T}\left[\cancel{\int_0^T \cos(2\omega t + \phi)dt} + \int_0^T \cos(\phi)dt\right] \qquad = \frac{V_0 i_0}{2}\frac{1}{T}\cos(\phi)T$$

- Assim, a potência média em um bipolo vale:

$$P = \frac{V_0 i_0}{2}\cos(\phi)$$

- Para facilitar, definimos tensão e corrente efetivas, de tal modo que:

$$P = \frac{V_0 i_0}{2}\cos(\phi) = V_{ef} i_{ef} \cos(\phi)$$

Como fica a potência?

- Sabemos que a potência em um bipolo vale

$$P = V_{ef} i_{ef} \cos(\phi)$$

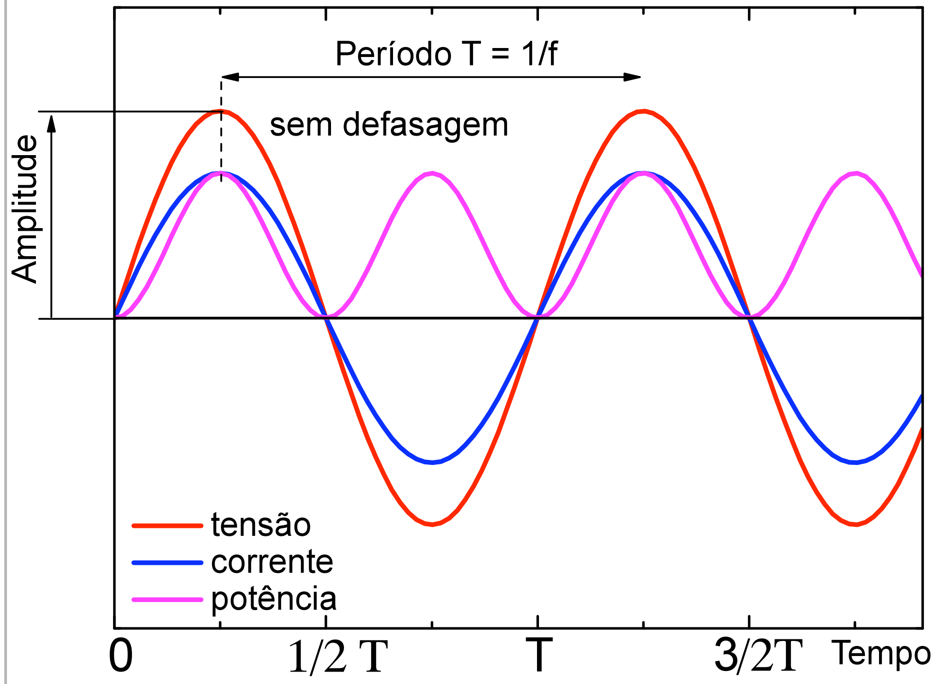
- Com:

$$V_{ef} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}, \quad i_{ef} = \frac{i_0}{\sqrt{2}}$$

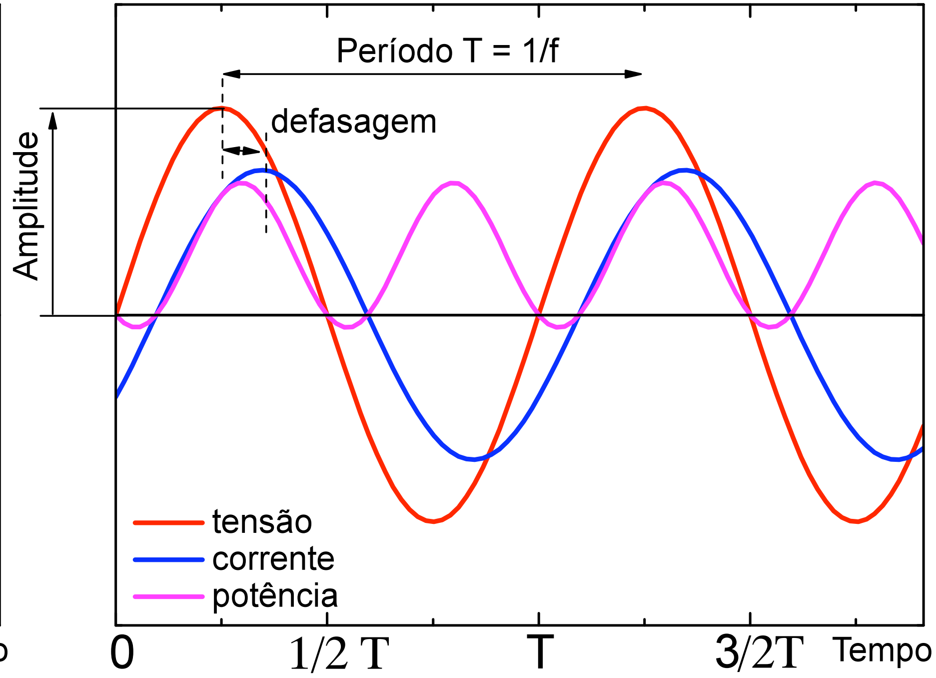
- Note que multímetros fornecem valores efetivos e não de pico.
- Osciloscópios, em geral, fornecem valores de pico.
- Mas o que significa o termo $\cos(\phi)$?
- O termo $\cos(\phi)$ é chamado fator de potência e diz qual é a eficiência do sistema para absorver a energia fornecida

Fator de potência?

- Neste caso, $\phi = 0$ e toda a potência fornecida é utilizada

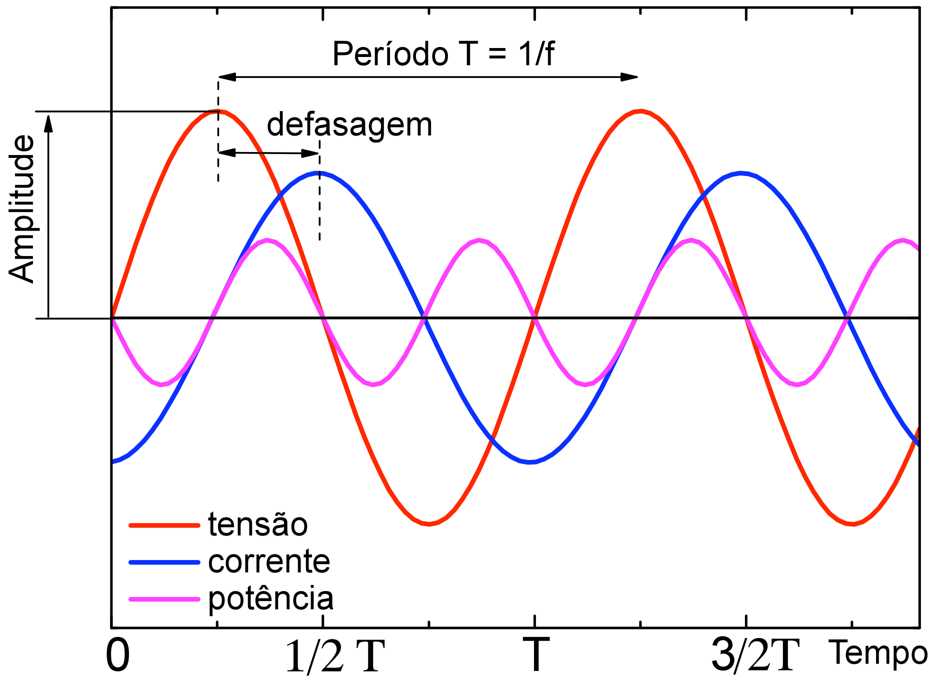


- Neste caso, $\phi \neq 0$ e somente parte da potência fornecida é utilizada



Fator de potência?

- Neste caso, $\phi = \pi/2$ e não há uso da potência fornecida. Neste caso, o bipolo apenas armazena energia e devolve a mesma quantidade ao circuito



$$P = V_{ef} i_{ef} \cos(\phi)$$

- Circuitos com fatores de potência baixo necessitam, em geral, de muita corrente para funcionar, o que não é eficiente

- Existe definição de potência no formalismo complexo?

POTÊNCIA NO FORMALISMO COMPLEXO?

- Em circuitos C.C. definimos potência em um resistor como sendo:

$$P = Ri^2$$

- Analogamente, definimos a potência complexa como sendo:

$$\hat{S} = \hat{Z}\hat{i}_{ef}^{\;2}$$

$$Zi_{ef}^2 = Z\,i_{ef}\,i_{ef} = V_{ef}\,i_{ef}$$

- Ou seja:

$$\hat{S} = Ze^{j\phi}i_{ef}^2 \quad = Zi_{ef}^2(\cos\phi + j\sin\phi) \quad = S\cos\phi + jS\sin\phi$$

$$\hat{S} = P + jQ \begin{cases} \hat{S} = \text{potência complexa} \\ S = \text{potência aparente } S = Zi_{ef}^2 \\ P = \text{potência ativa } P = V_{ef}i_{ef}\cos\phi \\ Q = \text{potência reativa } Q = V_{ef}i_{ef}\sin\phi \end{cases}$$

Um resumo sobre o formalismo complexo

- Tensão e corrente complexas

$$\hat{V}(t) = V_0 e^{j(\omega t + \phi_0)} \qquad \hat{i}(t) = i_0 e^{j(\omega t + \phi_1)}$$

- Impedância complexa

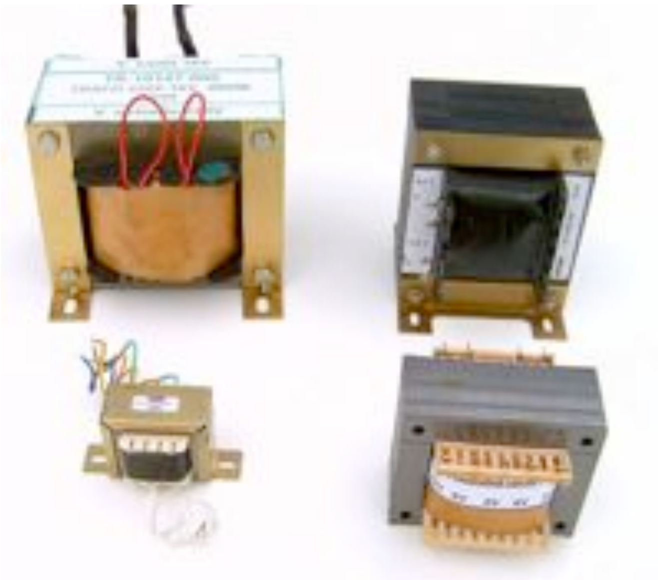
$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)} = Ze^{j\phi} \begin{cases} \hat{Z} = R = R \cdot e^{j0} \text{ para um resistor Ôhmico} \\ \hat{Z} = -\dfrac{\mathrm{j}}{\omega \mathrm{C}} = \dfrac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} \text{ para um capacitor simples} \end{cases}$$

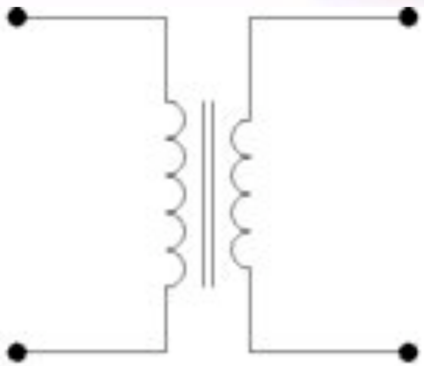
- Potência complexa em um bipolo – fator de potência

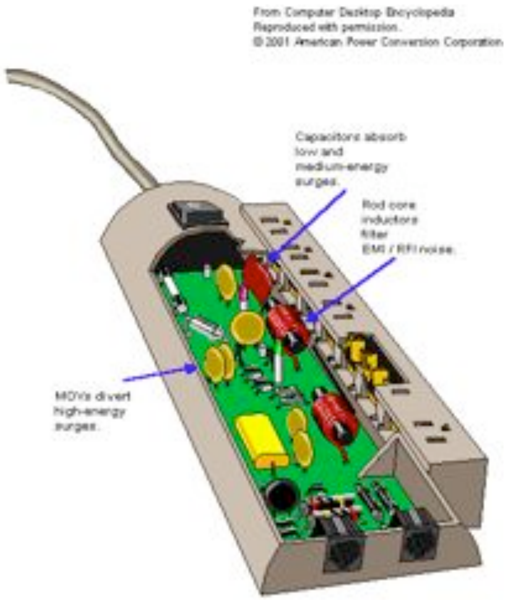
$$\hat{S} = P + jQ = V_{ef} i_{ef} (\cos\phi + j\sin\phi)$$

Objetivos desta aula
Filtros e circuitos especiais quadrupolares

- Alguns exemplos comuns

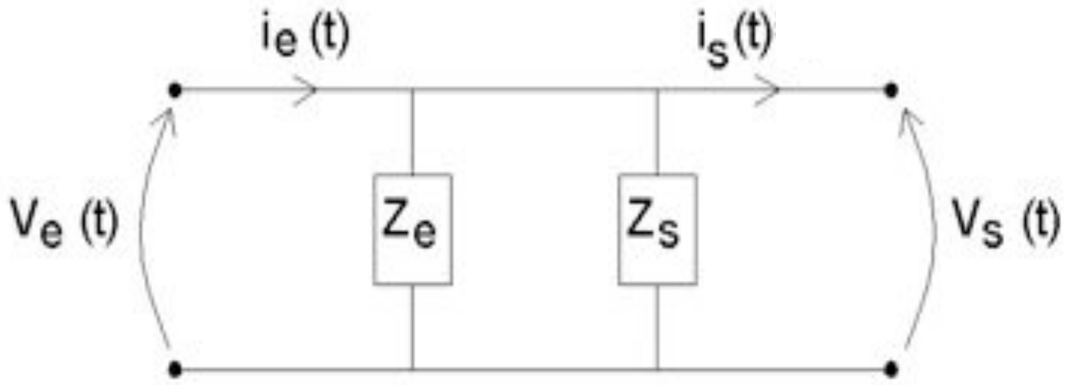






Objetivos desta aula
Filtros e circuitos especiais quadrupolares

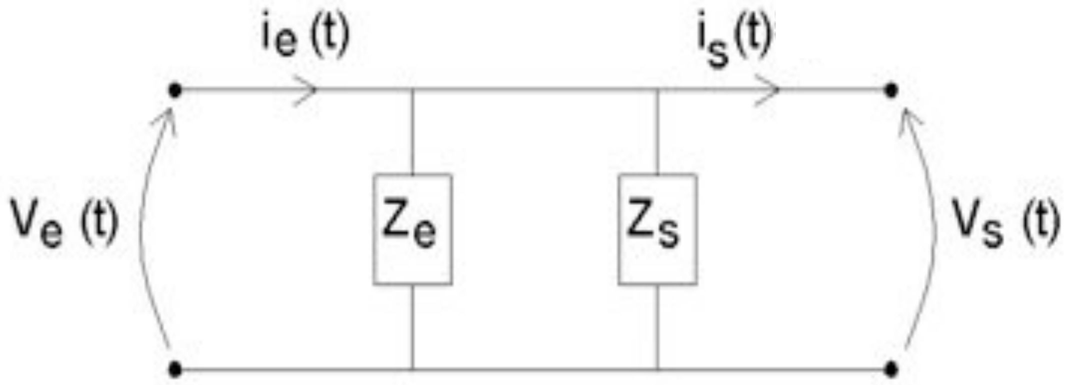
- Seja um circuito genérico



- Sinal de entrada = V_e
- Sinal de saída = V_s
- Como um se relaciona ao outro?

Objetivos desta aula
Filtros e circuitos especiais quadrupolares

- Algumas definições importantes



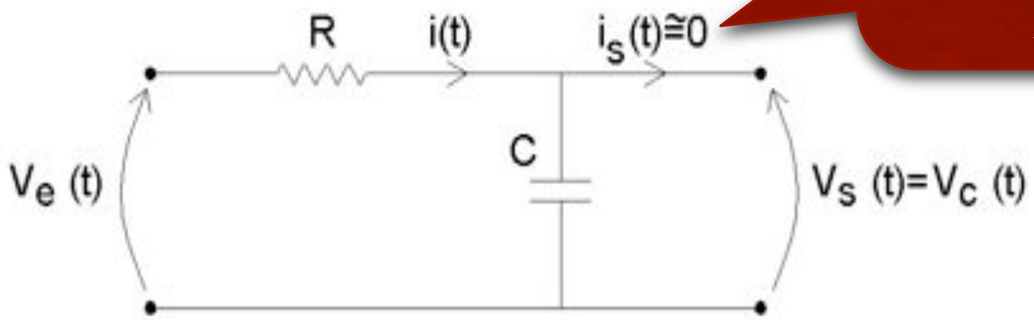
- Impedância de entrada, saída e ganho

$$\hat{Z}_e = \frac{\hat{V}_e}{\hat{i}_e} \qquad \hat{Z}_s = \frac{\hat{V}_s}{\hat{i}_s} \qquad \hat{G} = \frac{\hat{V}_s}{\hat{V}_e}$$

OBJETIVOS DESTA AULA
FILTROS E CIRCUITOS ESPECIAIS QUADRUPOLARES

- Nesta aula vamos estudar o seguinte filtro RC

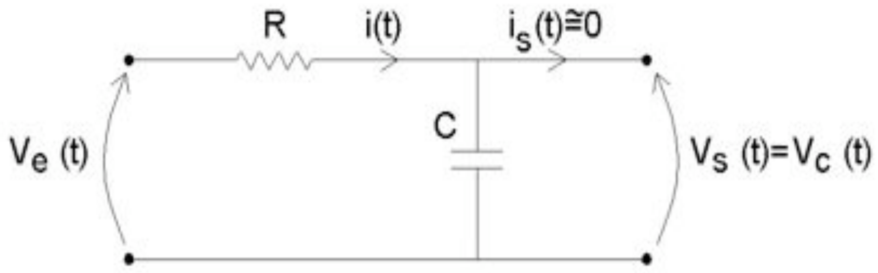
A corrente de saída próxima de zero facilita os cálculos do circuito. Isto pode ser assumido como verdade?



- E vamos ver como, com uma única tomada de dados, podemos explorar vários aspectos diferentes deste circuito.

CALCULANDO IMPEDÂNCIAS E GANHOS

- Seja o circuito ao lado:



- Supondo que a corrente de saída seja praticamente nula ($i_s \sim 0$):

$$\hat{Z}_C = \frac{\hat{V}_C}{\hat{i}_C} = \frac{\hat{V}_S}{\hat{i}} \Rightarrow \hat{V}_S = \hat{Z}_C \cdot \hat{i}$$

- Da mesma forma, podemos obter que:

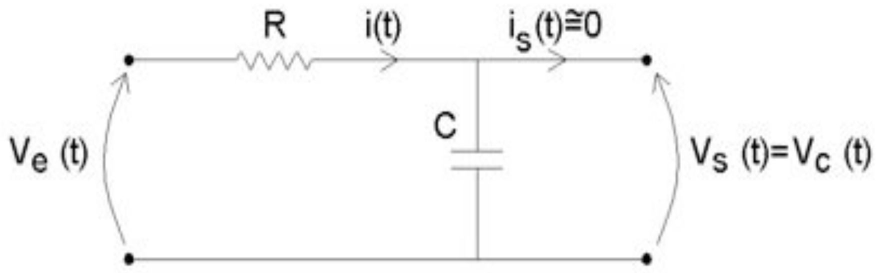
$$\hat{V}_e = \hat{Z}_{total} \cdot \hat{i} \quad = (\hat{Z}_R + \hat{Z}_C) \cdot \hat{i}$$

- Podemos obter o ganho do circuito

$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_S}{\hat{V}_e} = \frac{\hat{Z}_C \cdot \hat{i}}{(\hat{Z}_R + \hat{Z}_C) \cdot \hat{i}} = \frac{\hat{Z}_C}{(\hat{Z}_R + \hat{Z}_C)} = \frac{-\frac{j}{\omega C}}{(R - \frac{j}{\omega C})}$$

Calculando impedâncias e ganhos

- Seja o circuito ao lado:



- Como calcular o ganho, através da expressão?

$$\hat{G} = \frac{-\dfrac{j}{\omega C}}{(R - \dfrac{j}{\omega C})}$$

- Dividindo por $-j/\omega C$: $$\hat{G} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

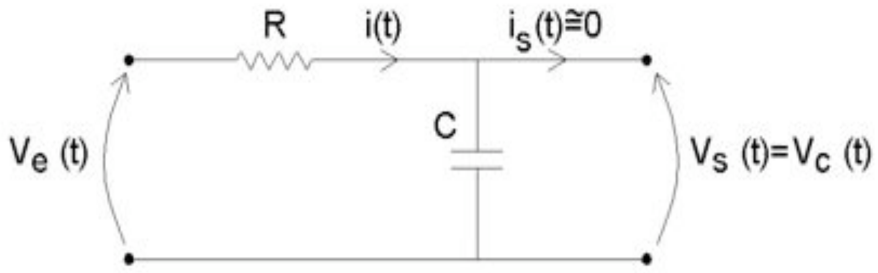
- Vamos definir a frequência de corte (ω_C) como sendo: $$\omega_C = \frac{1}{RC}$$

- Assim: $$\hat{G} = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_C}}$$

Calculando impedâncias e ganhos

- Usando a notação complexa:

$$\hat{G} = G_0 e^{j\phi_G}$$



- Com:

$$G_0 = \sqrt{\hat{G}^* \hat{G}} \qquad \phi_G = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\left[\hat{G}\right]}{\mathrm{Re}\left[\hat{G}\right]}\right)$$

Para obter G^*, simplesmente troque todos os (j) por ($-j$)

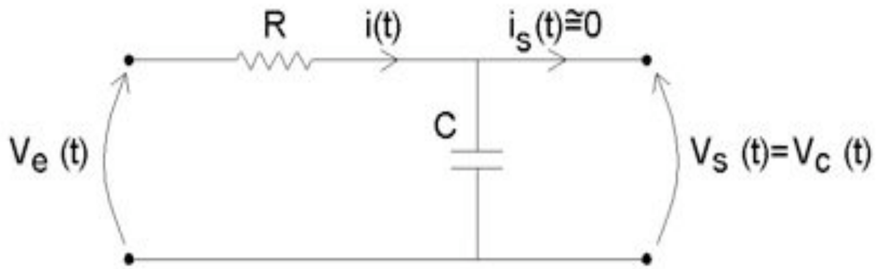
- Se nós fizermos a conta acima obteremos:

$$G_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2}} \qquad \phi_G = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_C}\right)$$

Calculando impedâncias e ganhos

- Resumindo

$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_S}{\hat{V}_e} = G_0 e^{j\phi_G}$$



- Sendo:

$$\omega_C = \frac{1}{RC}$$

R é mensurável
C pode ser medido

$$G_0 = \frac{V_S^0}{V_e^0} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2}}$$

$$\phi_G = \omega \cdot \Delta T_{S-e} = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_C}\right)$$

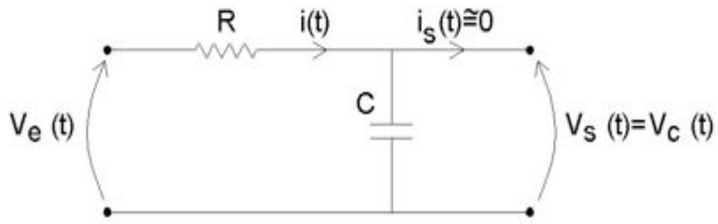
Amplitudes de tensões
São mensuráveis

Freqüência pode ser
ajustada e medida

Intervalo de tempo
entre duas tensões
também é mensurável

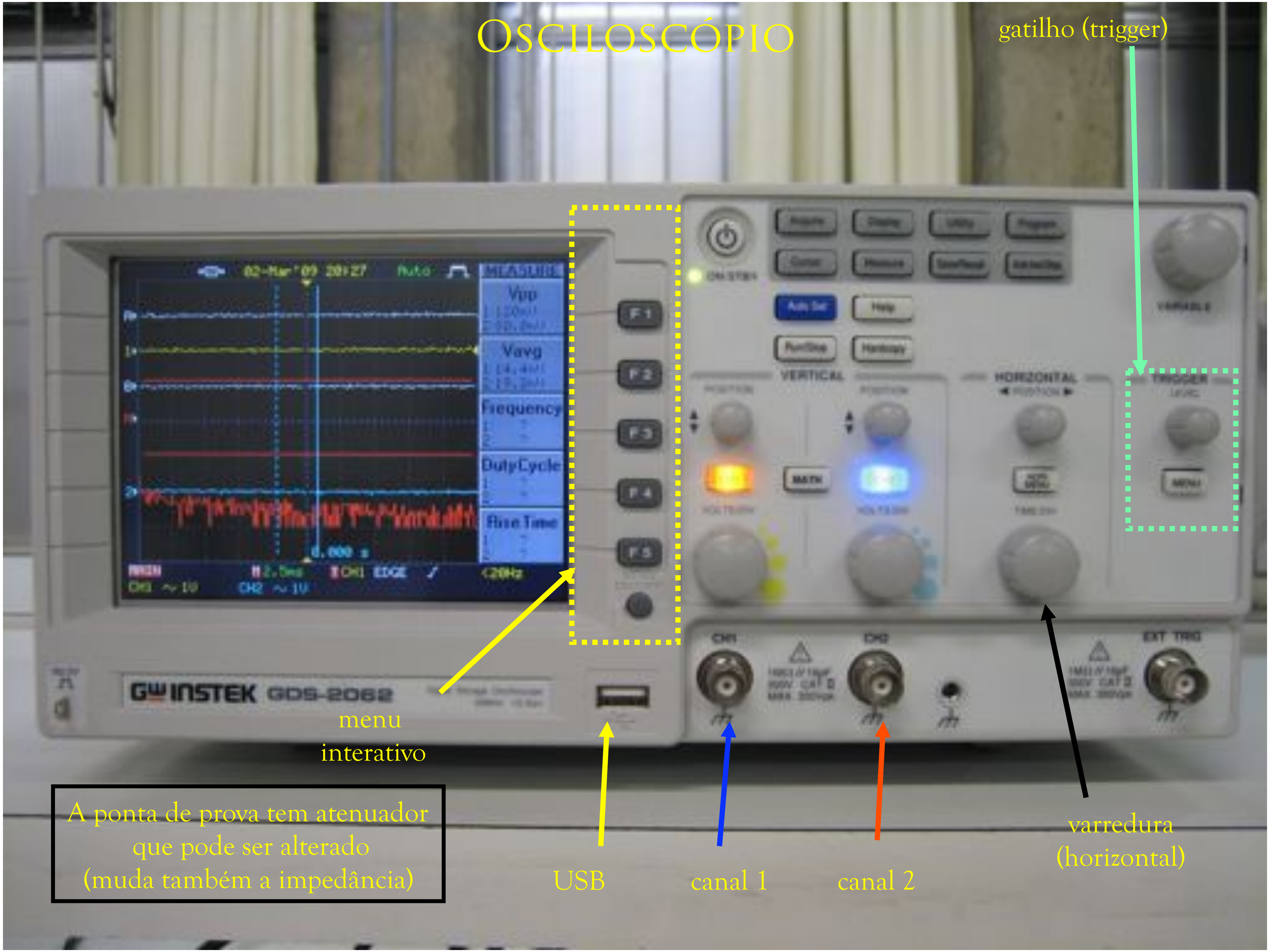
Objetivos desta aula
Filtros e circuitos especiais

- Nesta aula vamos estudar o seguinte filtro RC



- Objetivos:
  - Obter experimentalmente o ganho (G_0 e ϕ_G) em função da freqüência (ω) e comparar com previsão teórica
  - Para isto preciso conhecer R e C.
    - Não confiar nos valores nominais

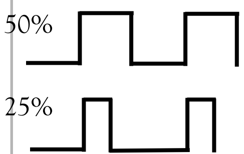
Osciloscópio

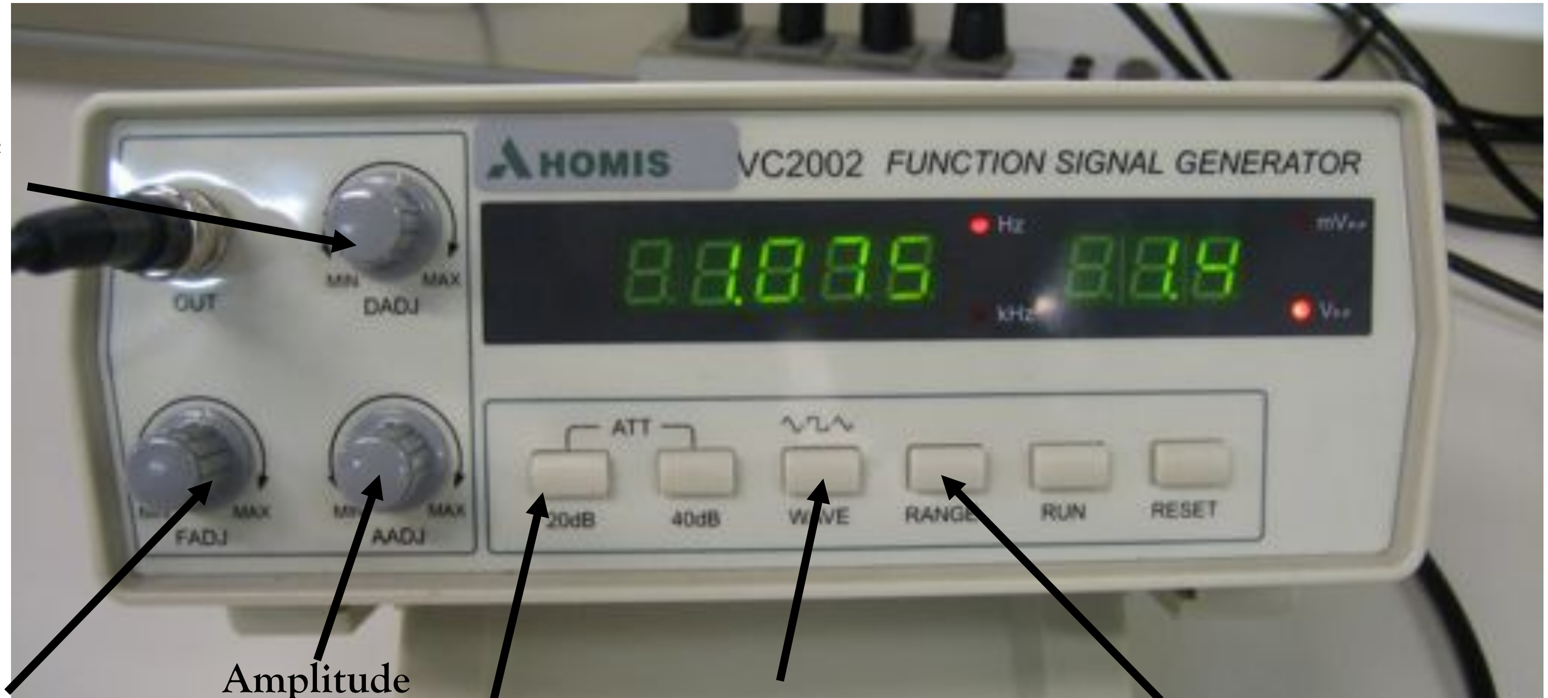


Gerador de funções

IMPORTANTE!

Duty cycle
ADJust





Frequency
ADJust

Amplitude
ADJust

intervalo de
frequências

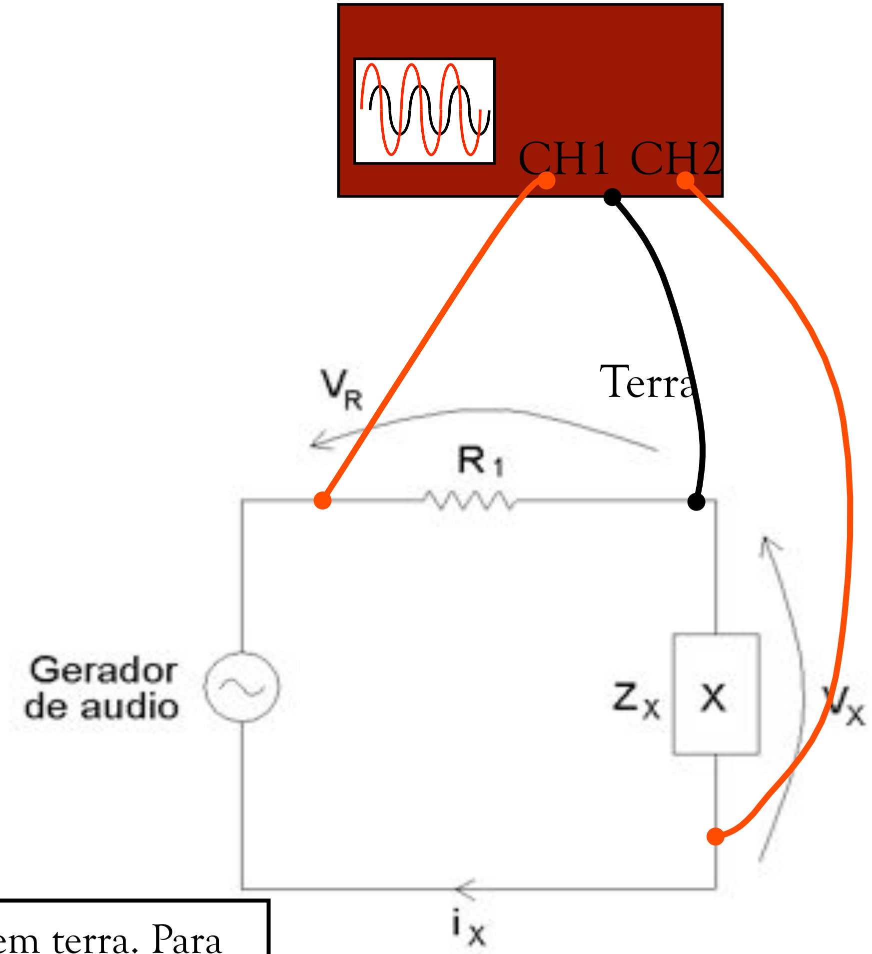
Executa
parâmetro

atenuador

BIPOLOS

Cuidados experimentais

- Instrumentos de medida
  - Osciloscópio
    - Canal 1: $-i_R = -V_R/R$ é a corrente no circuito
    - Canal 2: V_X
  - Cuidado com ruídos
    - Estimar incertezas na tensão e corrente a partir do nível de ruído

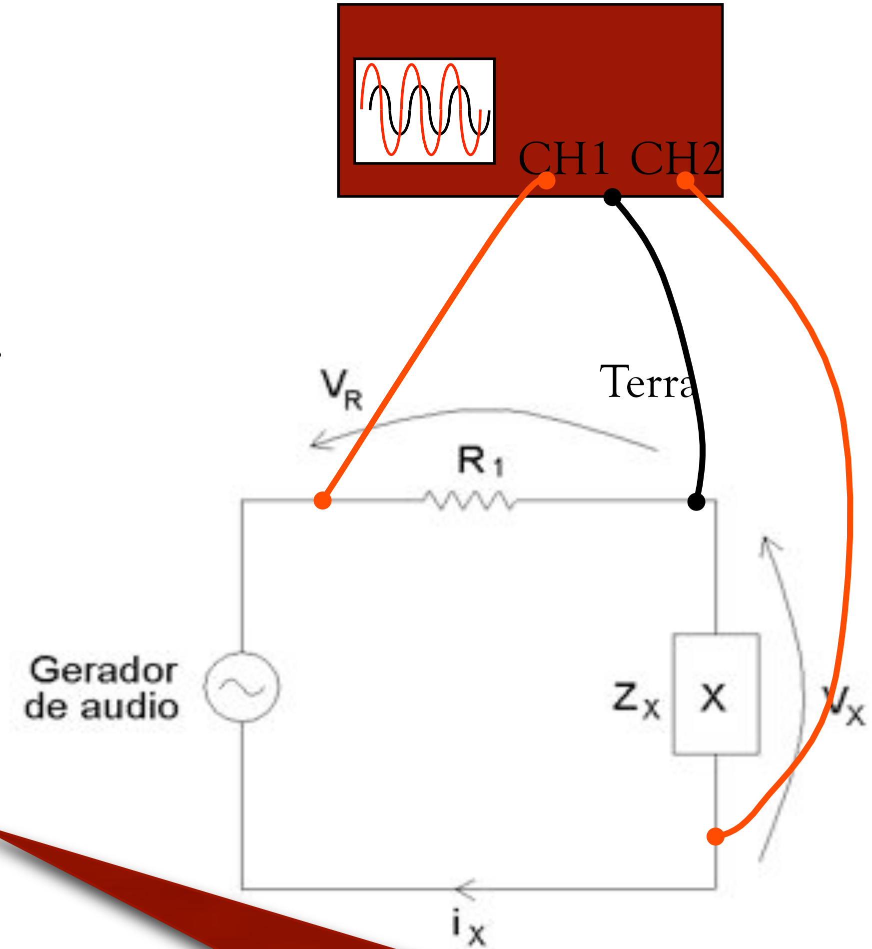


Ligação do osciloscópio com centro em terra. Para correta medida de fase é necessário inverter uma das medidas (ou subtrair π, da diferença de fase medida).

OBJETIVOS DESTA AULA (I)
FILTROS E CIRCUITOS ESPECIAIS

- Após montar o circuito, para estimar ω_c a partir dos valores nominais,
  - Medir freqüências em um intervalo pelo menos 1 ordem de grandeza menor que ω_c até 1-2 ordens de grandeza maior que ω_c.
  - USAR ONDAS SENOIDAIS

- Para cada valor de freqüência medir:
  - V_e (tensão de pico na entrada)
  - V_R (tensão de pico no resistor)
  - $V_C = V_s$ (tensão de pico no capacitor)
  - Intervalo de tempo entre V_e e V_C
  - Intervalo de tempo entre V_R e V_C



Note que para medir V_e e V_R devemos mudar o local das pontas de prova do osciloscópio ou fazer a conta $V_e(t) = V_R(t)+V_C(t)$
Mas cuidado com sinais das medidas

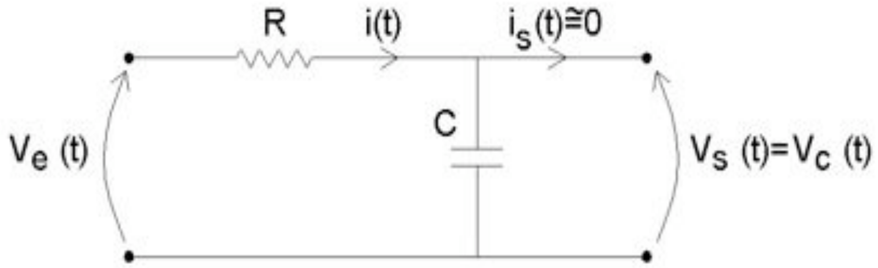
Atividades a serem entregues (I)

- Com base nos dados anteriores entregar:

- Gráfico de Z_C experimental em função de ω
  - lembre-se que Z = Tensão/corrente → Z = $1/\omega C$
  - Obter o valor da capacitância deste gráfico
- Gráfico de ϕ_C (fase do capacitor) em função de ω
  - Comparar com o esperado teoricamente para o capacitor
- Gráfico de G_0 em função de ω
  - Comparar com o esperado teoricamente
- Gráfico de ϕ_G (fase entre V_s e V_e) em função de ω
  - Comparar com o esperado teoricamente

Circuito integrador

- Sabemos que:



$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_S}{\hat{V}_e} = G_0 e^{j\phi_G}$$

- Com: $G_0 = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}}$ $\qquad \phi_G = \arctan\left(-\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)$

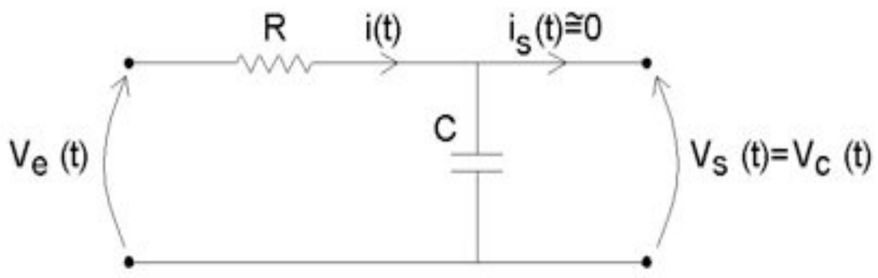
- Se $\omega >> \omega_c$: $G_0 \approx \dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}} = \dfrac{\omega_C}{\omega}$ $\qquad \phi_G \approx \arctan(-\infty) = -\dfrac{\pi}{2}$

- Ou seja: $\hat{G} = \dfrac{1}{\omega RC} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{j\omega RC}$

Circuito integrador

- Então:

$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_S}{\hat{V}_e} = \frac{1}{j\omega RC}$$



- Ou ainda:

$$\hat{V}_S = \frac{1}{j\omega RC}\hat{V}_e$$

- Lembrando que: $\hat{V}_e = V_e e^{j\omega t}$

- E que: $\int \hat{V}_e dt = \frac{1}{j\omega} V_e e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega}\hat{V}_e$

- Temos que:

$$\hat{V}_S = \frac{1}{RC}\int \hat{V}_e dt$$

No limite que $\omega >> \omega_c$ o circuito acima funciona como integrador da tensão de entrada

Objetivos desta aula e atividades (II) Circuito integrador

- Para freqüências tais que $\omega >> \omega_c$, mostrar que:

$$\hat{V}_S = \frac{1}{RC}\int \hat{V}_e dt$$

- Utilizando o gerador de tensões com ONDA QUADRADA
  - Medir V_S e V_e
    - Gravar curvas usando USB do osciloscópio e fazer gráfico
  - Entregar também como atividade:
    - Mostrar que V_S corresponde à integral de V_e:
      - Mostrar que V_S é um triângulo
      - Mostrar que a inclinação deste triângulo é compatível com a expressão acima.