

Física Experimental IV - 9ª aula
<http://www.dfn.if.usp.br/~suaide/>

Alexandre Suaide
Ed. Oscar Sala

sala 246
ramal 7072

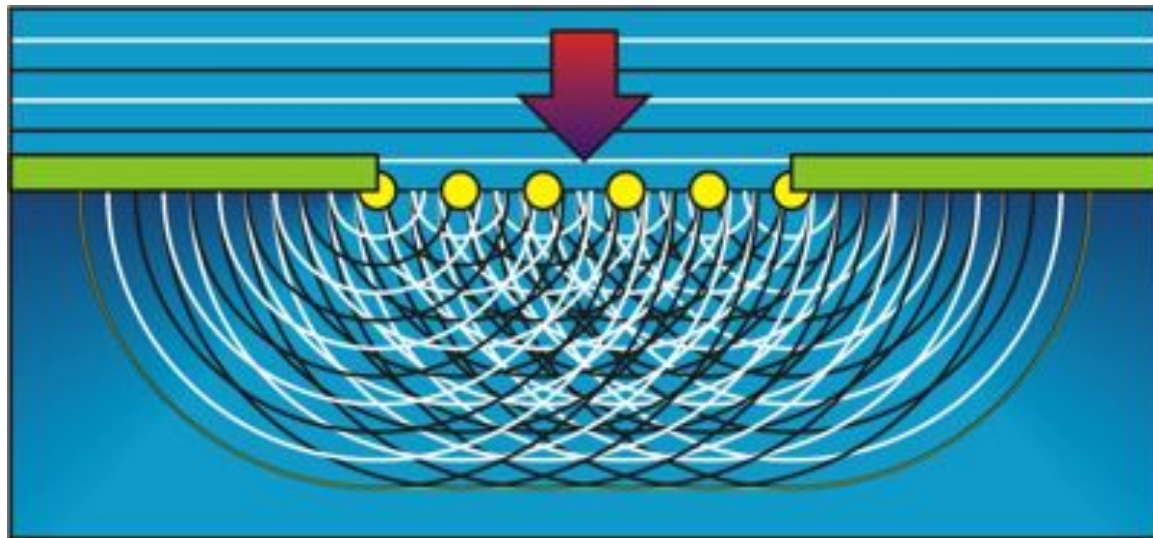
Experiência II

Óptica Geométrica e Física

- Objetivos – Estudar alguns fenômenos de óptica física e geométrica
 - Estudo de lentes simples, sistemas de lentes e construção de imagens
 - Interferência e difração
 - Computador óptico
 - Análise de Fourier bi-dimensional
 - Processamento de imagens

Explicando o fenômeno de difração

- Princípio de Huygens-Fresnel
 - Cada ponto de uma frente de onda (não obstruído) funciona como uma fonte emissora puntiforme esférica
 - A onda resultante consiste da superposição de todas as ondas esférica, levando em consideração a fase entre elas



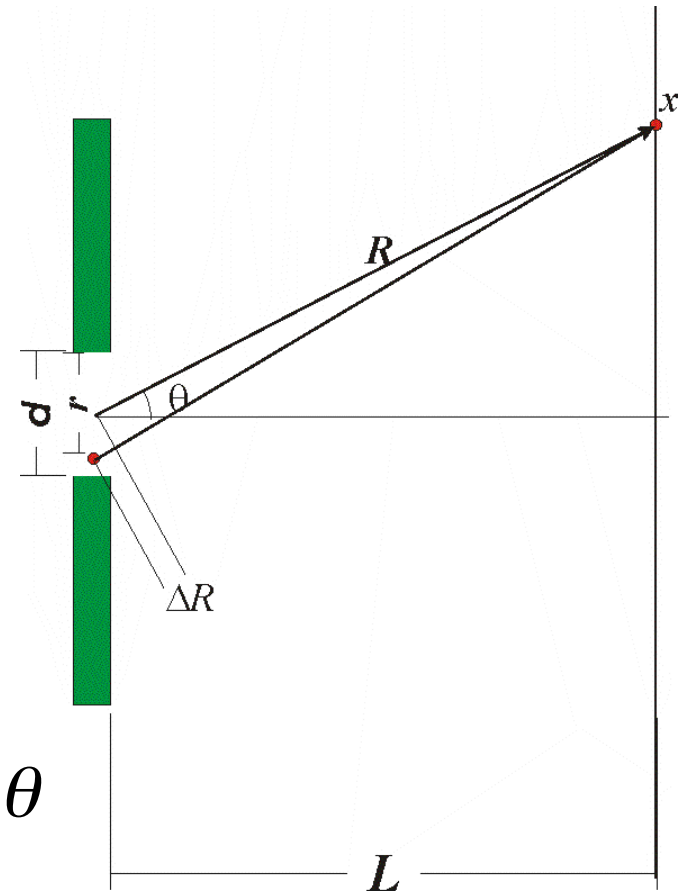
O estudo de uma fenda simples

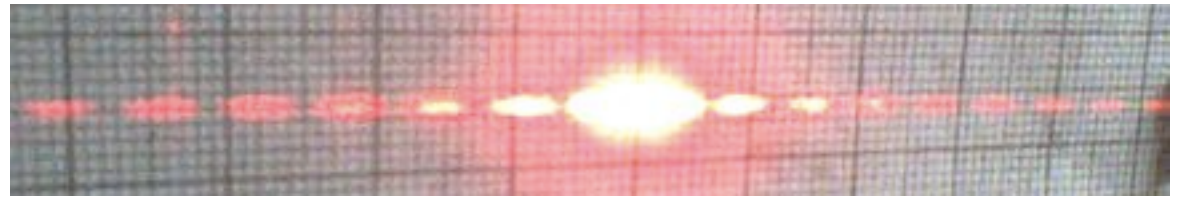
- O campo elétrico total é, neste caso

$$\vec{E}(x) = \int_{-d/2}^{d/2} \vec{E}(r) dr$$

- A intensidade luminosa é proporcional ao campo elétrico ao quadrado. Assim, podemos escrever que, para grandes distâncias ($L \gg d$)
 - Região de Fraunhofer

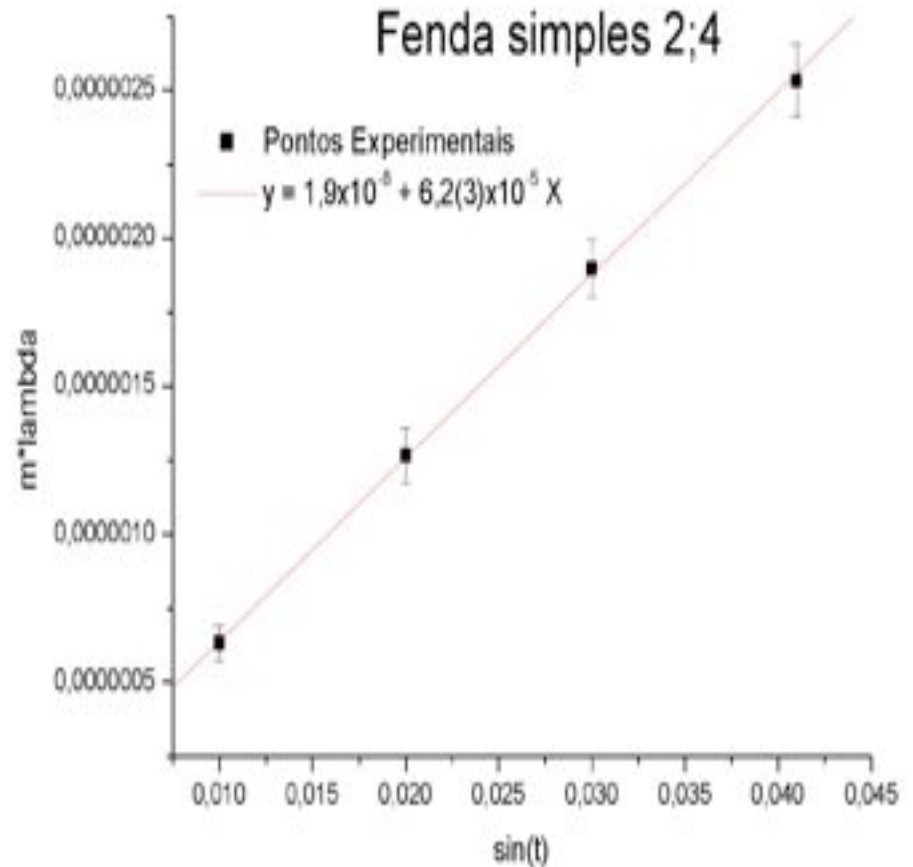
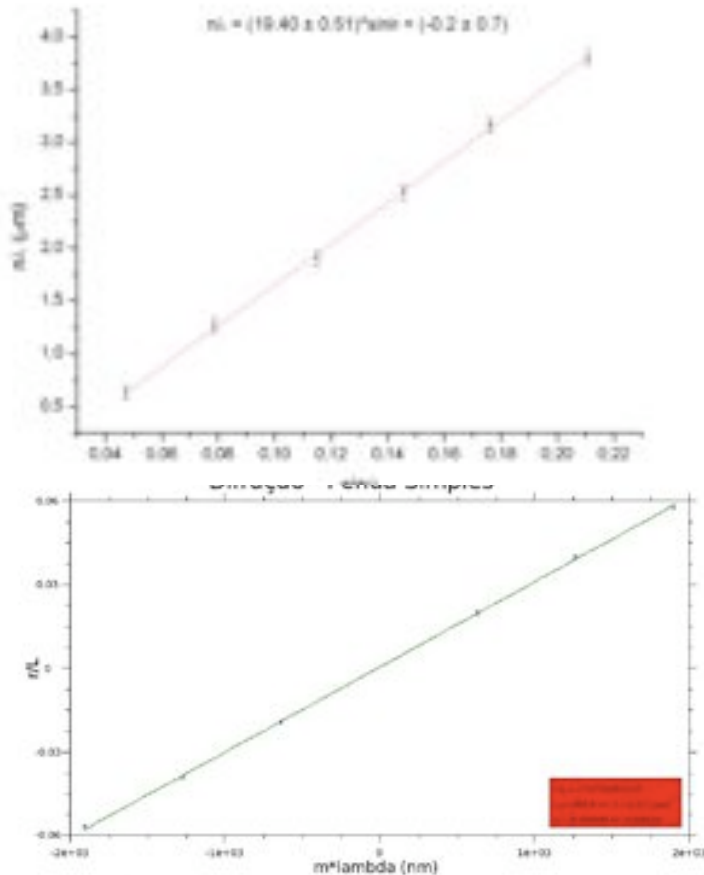
$$I = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \quad \text{com} \quad \beta = \pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta$$

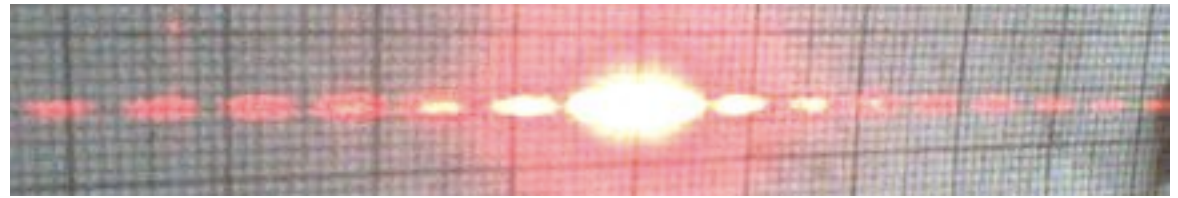




Fenda Simples

$$d \sin \theta = \pm n\lambda$$





Fenda Simples

$$d \sin \theta = \pm n \lambda$$

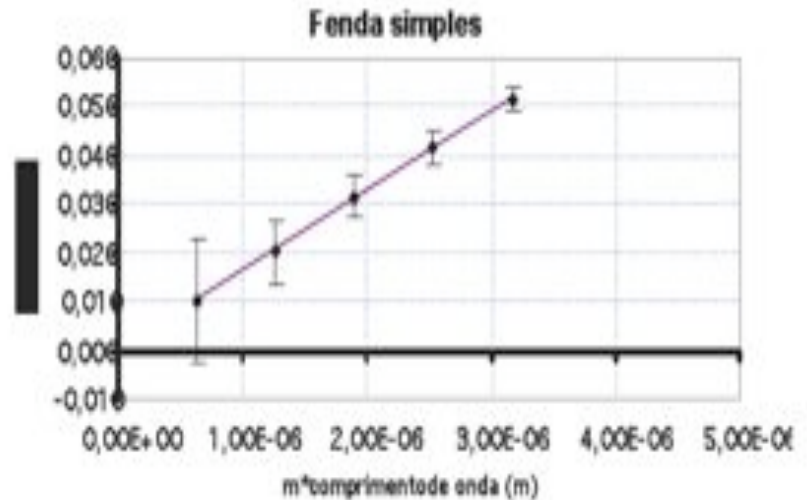
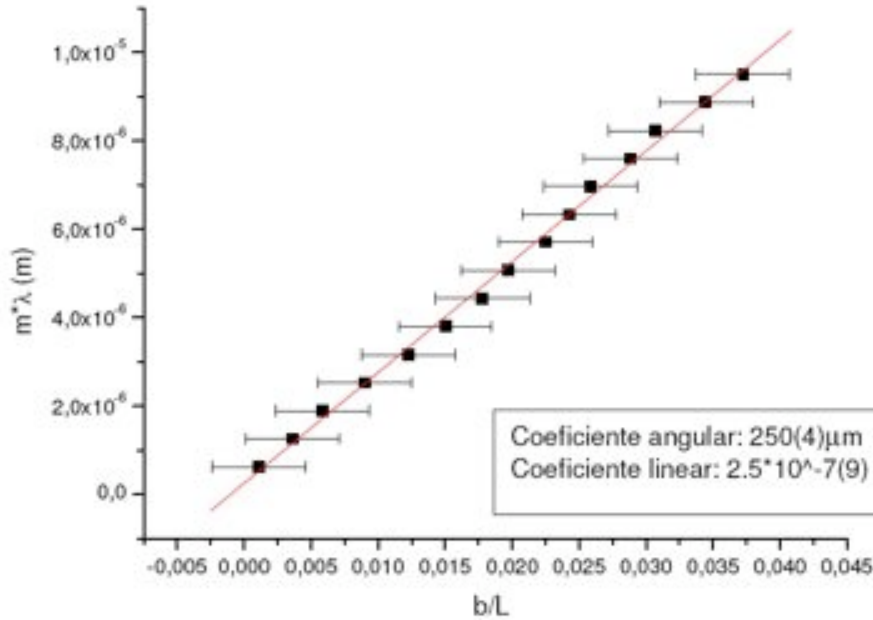
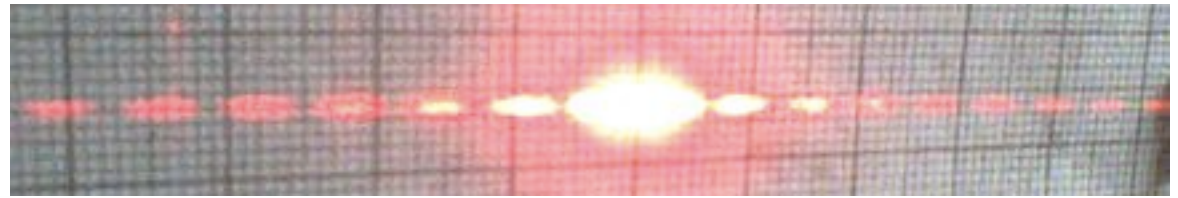
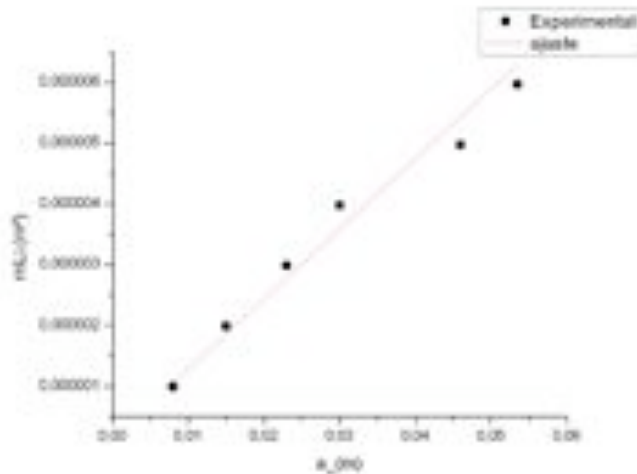


Gráfico 1. Relação entre $\text{sen} \theta$ e $(m \lambda)$ para a fenda simples.

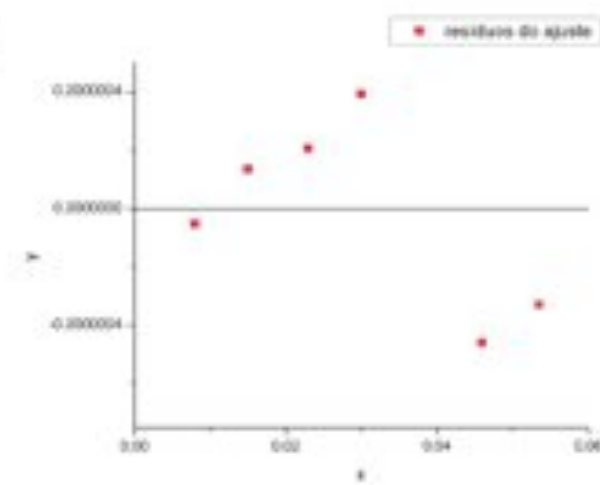


Fenda Simples

$$d \sin \theta = \pm n\lambda$$

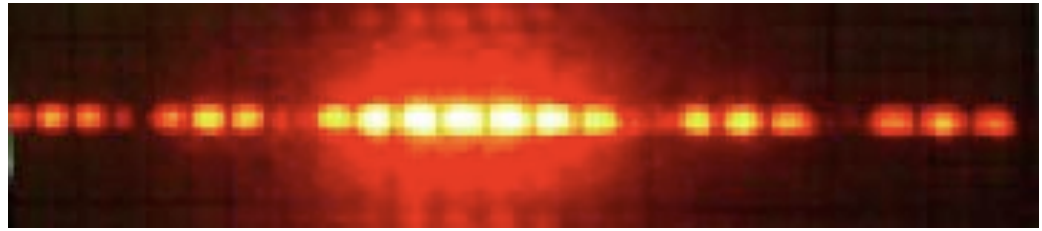


(a) Ajuste.



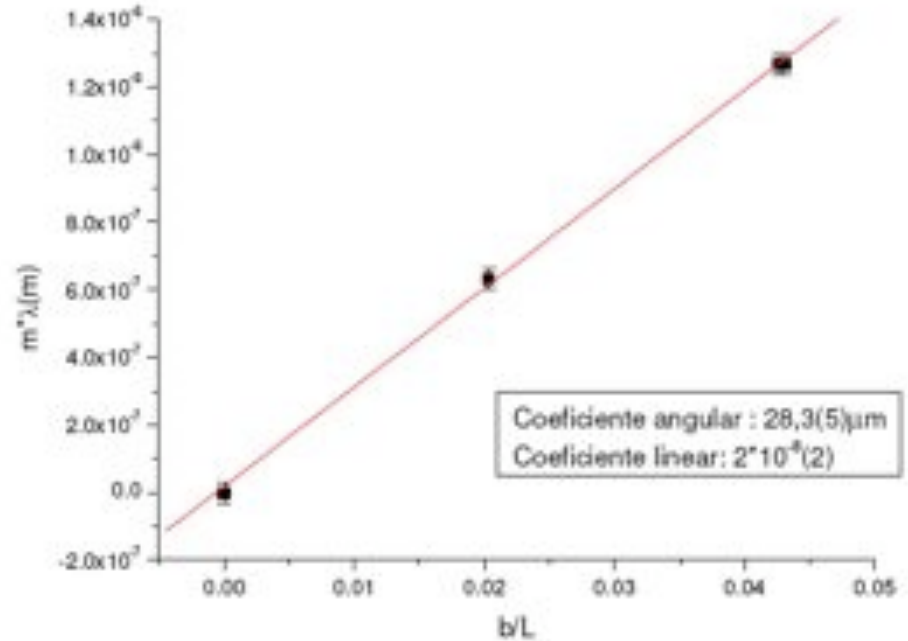
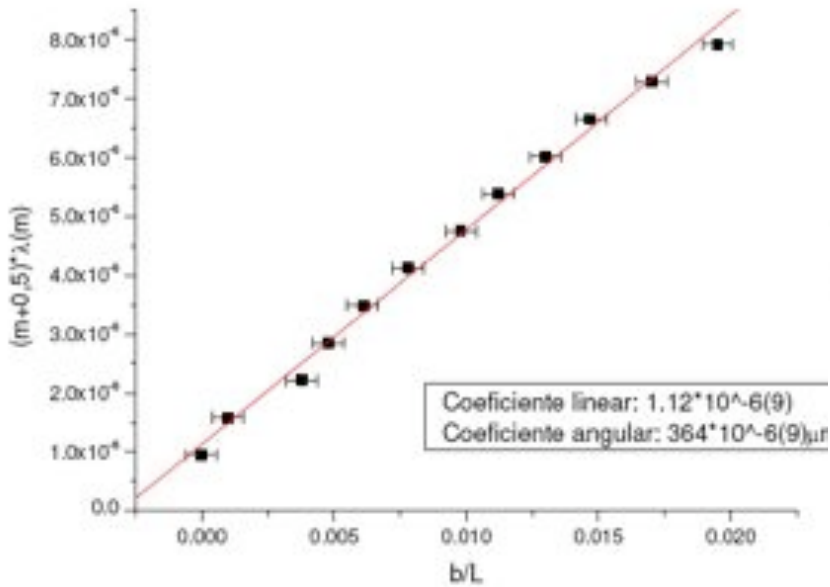
(b) Resíduos.

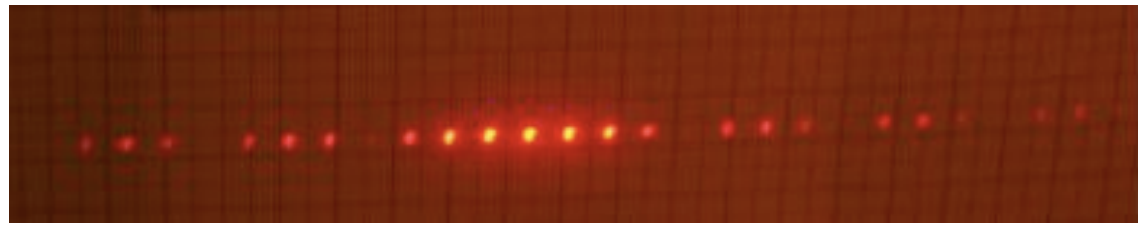
Os resíduos distribuem-se de forma mais ou menos aleatória em torno do zero, indicando uma boa adequação do ajuste. O coeficiente angular da reta corresponde à largura da fenda



Fenda dupla

$$a \sin \theta = (m + 0,5)\lambda = ab/L$$





Fenda dupla

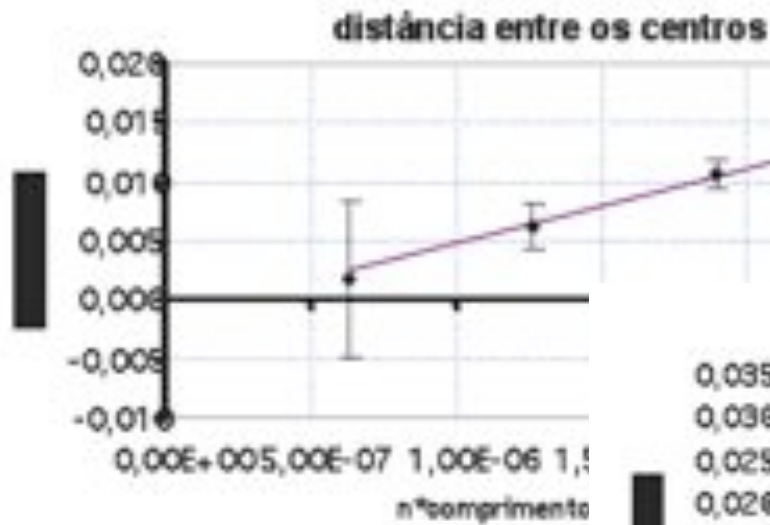


Gráfico 4- Relação entre $\text{sen}\theta$

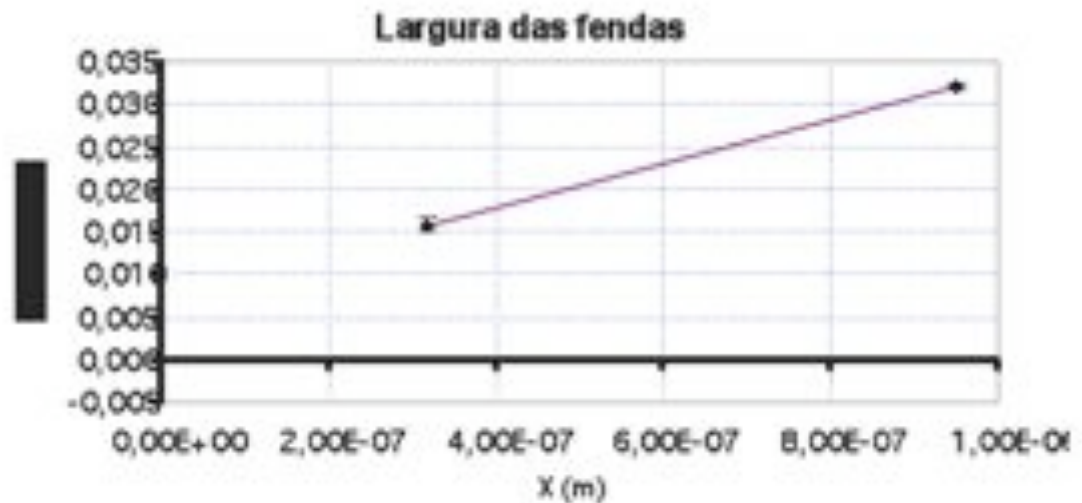
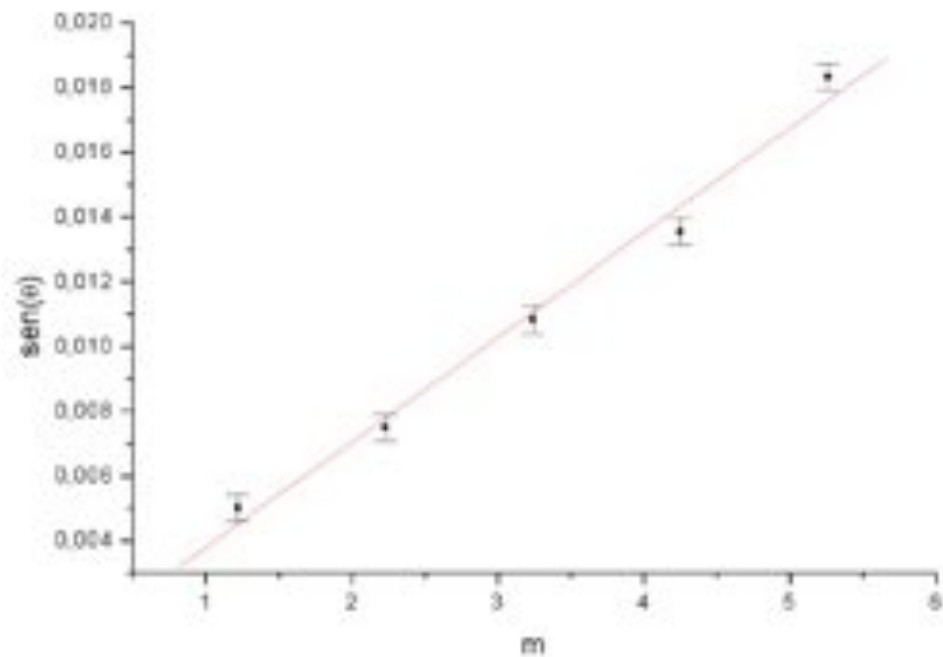
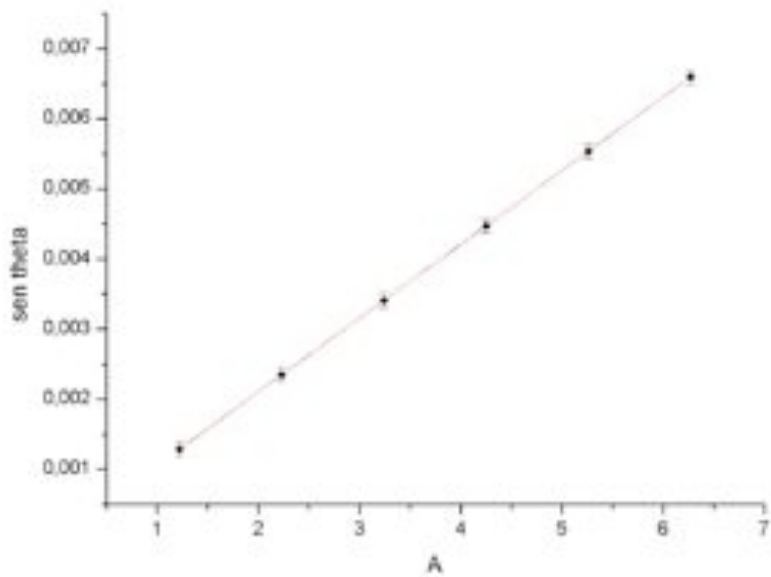
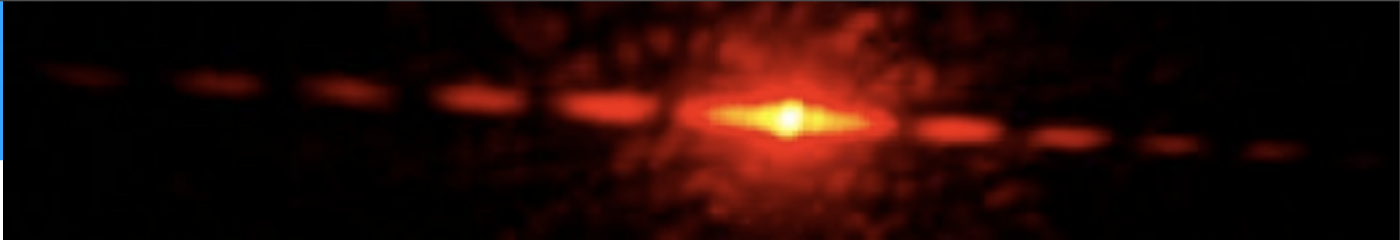


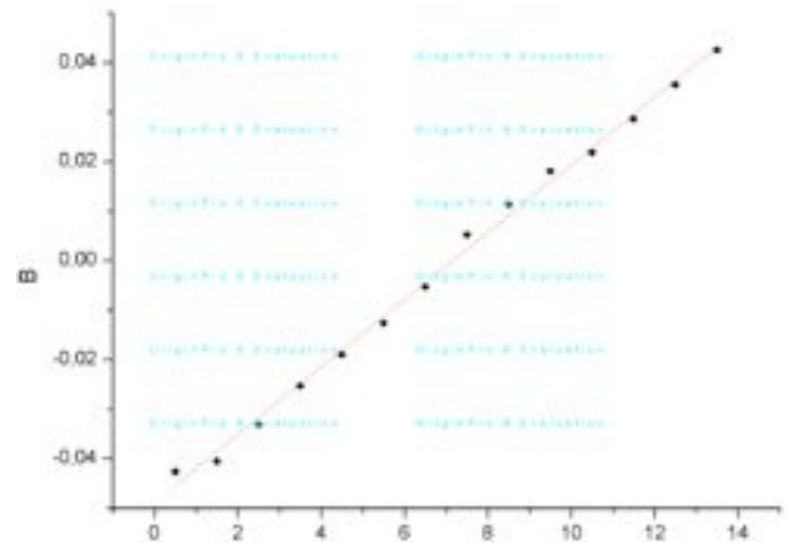
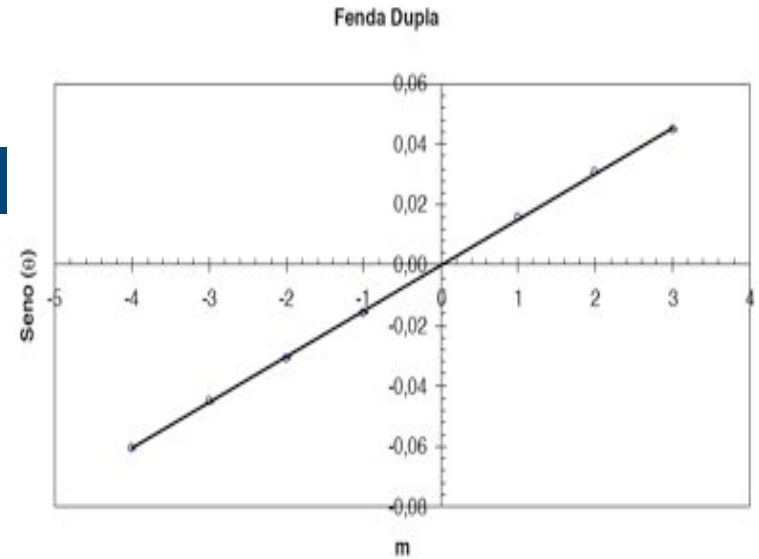
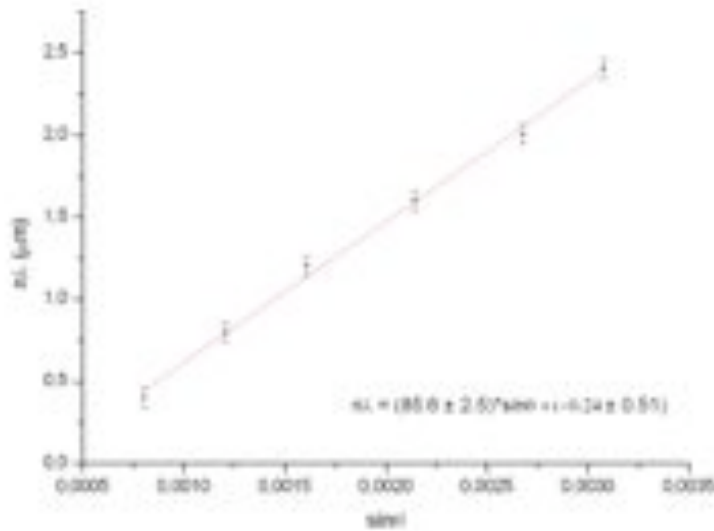
Gráfico 5- Relação entre $\text{sen}\theta$ e $X = \{ (2n+1) \cdot \lambda/2 \}$ para a fenda dupla

Orifício circular





Fio de cabelo



Se $F \sim 1$, a difração é considerada de Fresnel;
se $F \ll 1$, a difração é considerada de Fraunhofer.

Número de Fresnel $F = \frac{d^2}{\lambda L}$

	valor calculado (mm)	valor dado ou medido (mm)
Fenda simples	0.172 ± 0.001	0.160
Fenda circular	0.268 ± 0.001	0.250
Fio de cabelo	0.055 ± 0.001	0.05 ± 0.01
Fenda dupla	0.340 ± 0.002	0.308

Tabela 1: Comparação dos resultados alcançados com os valores dados ou medidos

	no. de Fresnel	incerteza
Fenda simples	0.04	0.01
Fenda circular	0.10	0.01
Fio de cabelo	0.01	0.02
Fenda dupla	0.16	0.01

Tabela 2: Número de Fresnel e respectiva incerteza para cada um dos casos estudados

Se $F \sim 1$, a difração é considerada de Fresnel; se $F \ll 1$, a difração é considerada de Fraunhofer. Calculou-se o número de Fresnel para cada um dos casos (tab. 2) e o que se percebe é que, de um modo geral, a aproximação é considerada válida.

Se $F \sim 1$, a difração é considerada de Fresnel;
 se $F \ll 1$, a difração é considerada de Fraunhofer.

Número de Fresnel

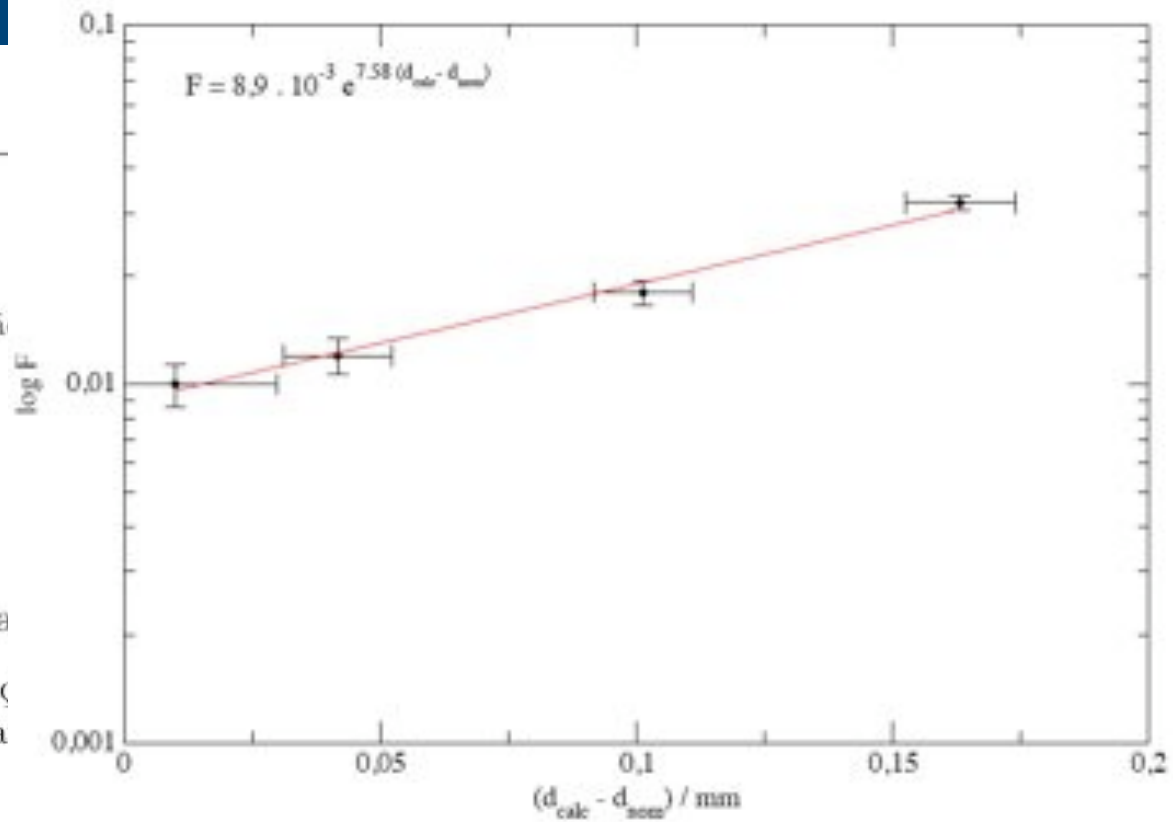
$$F = \frac{d^2}{\lambda L}$$

Fenda simples
 Fenda circular
 Fio de cabelo
 Fenda dupla

Tabela 1: Comparação

Kandre Suaide, Lab

Se $F \sim 1$, a difração número de Fresnel para considerada válida.



Contudo, o erro sistemático indicado anteriormente pode estar relacionado a esta aproximação, visto que quanto maior o valor de F , maior a diferença entre o valor calculado e o nominal (gráfico 4). A princípio não há modelo que relacione as grandezas entre si, mas este resultado sugere que o fenômeno seja investigado.

casos estudados
 Fraunhofer. Calculou-se o número de Fresnel para cada caso, a aproximação é

Princípio de Heisenberg

Vale notar que o fenômeno estudado neste experimento é uma evidência clara do princípio da incerteza de Heisenberg. Uma vez que a fenda tem dimensões muito pequenas quando comparada com as distâncias envolvidas no problema, sabemos com alta precisão na direção horizontal, por onde a luz passou. Assim, não podemos dizer muito a respeito de seu momento. A precisão alta da posição da luz faz com que a direção de seu momento seja muito imprecisa e há esse espalhamento na direção horizontal. Afinal, pelo princípio de Heisenberg temos:

$$\Delta r \Delta p = \frac{\hbar}{2} \quad (3)$$

Assim, na direção perpendicular à propagação da luz temos bom conhecimento de onde a luz passou, porém tem-se pouco conhecimento da direção dela e assim o laser abre um leque horizontal muito maior do que comparado a figura formada quando a fenda é muito maior.

Princípio de Heisenberg

Vale notar que o fenômeno estudado neste experimento é uma evidência clara do princípio da incerteza de Heisenberg. Uma vez que a fenda tem dimensões muito pequenas quando comparada com as distâncias envolvidas no problema, sabemos com alta precisão na direção horizontal, por onde a luz passou. Assim, não podemos dizer muito a respeito de seu momento. A precisão alta da posição da luz faz com que a direção de seu momento seja muito imprecisa e há esse espalhamento na direção horizontal. Afinal, pelo princípio de Heisenberg temos:

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} \quad (3)$$

Assim, na direção perpendicular à propagação da luz temos bom conhecimento de onde a luz passou, porém tem-se pouco conhecimento da direção dela e assim o laser abre um leque horizontal muito maior do que comparado a figura formada quando a fenda é muito maior.

$$\Delta x = d \text{ (tamanho da fenda)}$$

Princípio de Heisenberg

Vale notar que o fenômeno estudado neste experimento é uma evidência clara do princípio da incerteza de Heisenberg. Uma vez que a fenda tem dimensões muito pequenas quando comparada com as distâncias envolvidas no problema, sabemos com alta precisão na direção horizontal, por onde a luz passou. Assim, não podemos dizer muito a respeito de seu momento. A precisão alta da posição da luz faz com que a direção de seu momento seja muito imprecisa e há esse espalhamento na direção horizontal. Afinal, pelo princípio de Heisenberg temos:

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} \quad (3)$$

Assim, na direção perpendicular à propagação da luz temos bom conhecimento de onde a luz passou, porém tem-se pouco conhecimento da direção dela e assim o laser abre um leque horizontal muito maior do que comparado a figura formada quando a fenda é muito maior.

$$\Delta x = d \text{ (tamanho da fenda)} \quad p = \hbar k \Rightarrow \hbar = \frac{p}{k}$$

Princípio de Heisenberg

Vale notar que o fenômeno estudado neste experimento é uma evidência clara do princípio da incerteza de Heisenberg. Uma vez que a fenda tem dimensões muito pequenas quando comparada com as distâncias envolvidas no problema, sabemos com alta precisão na direção horizontal, por onde a luz passou. Assim, não podemos dizer muito a respeito de seu momento. A precisão alta da posição da luz faz com que a direção de seu momento seja muito imprecisa e há esse espalhamento na direção horizontal. Afinal, pelo princípio de Heisenberg temos:

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} \quad (3)$$

Assim, na direção perpendicular à propagação da luz temos bom conhecimento de onde a luz passou, porém tem-se pouco conhecimento da direção dela e assim o laser abre um leque horizontal muito maior do que comparado a figura formada quando a fenda é muito maior.

$$\Delta x = d \text{ (tamanho da fenda)} \quad p = \hbar k \Rightarrow \hbar = \frac{p}{k}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta x \Delta p > \hbar / 2 \\ d \Delta p > p / 2k \\ k = 2\pi / \lambda \end{array} \right\} d \frac{\Delta p}{p} > \lambda / 4\pi \Rightarrow d \sin \theta > \lambda / 4\pi$$

Generalizando a difração de Fraunhofer

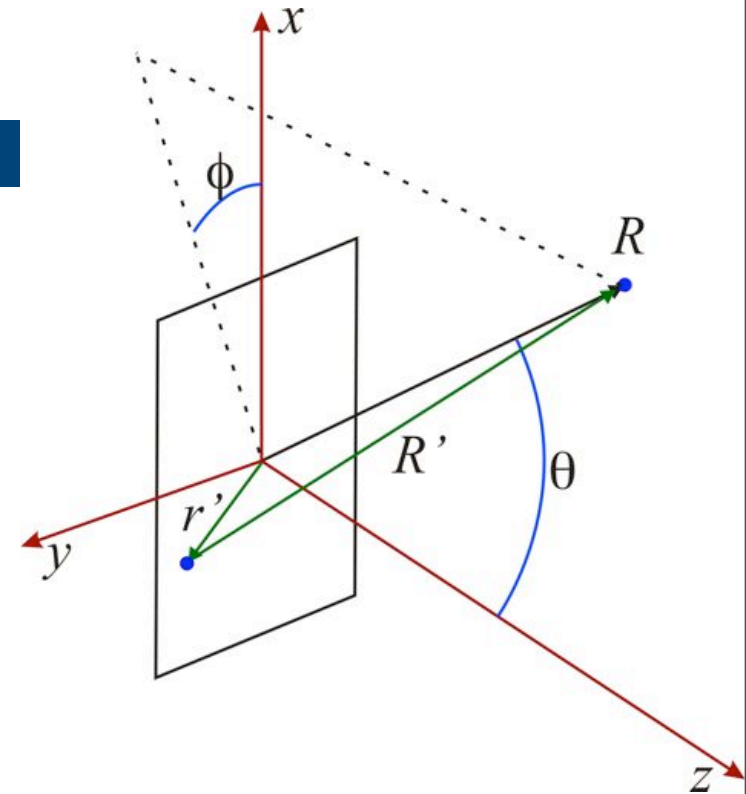
- Formalismo complexo para campo elétrico

$$\hat{E} = E_0 e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

por simplicidade

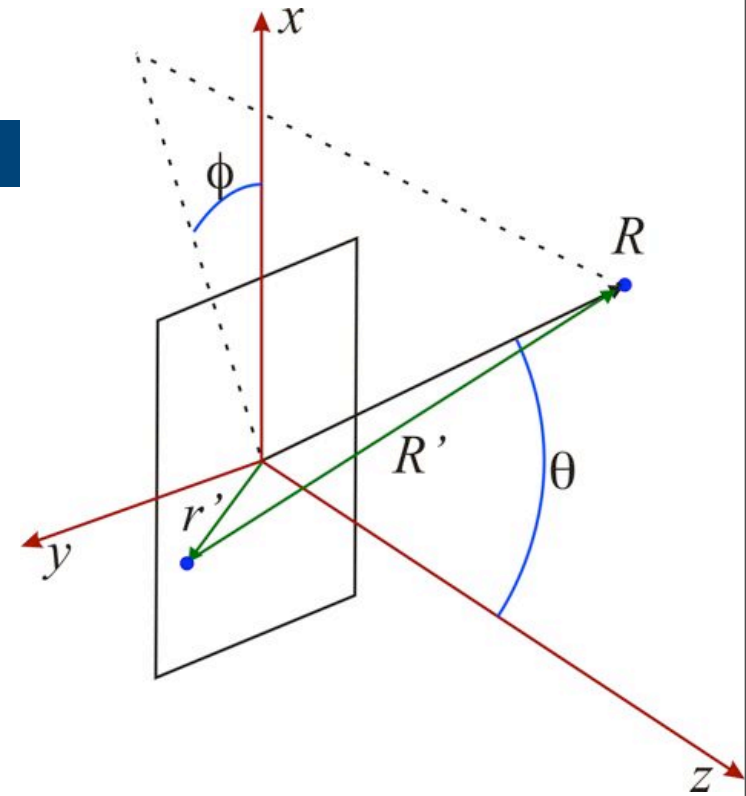
$$\hat{E} = E_0 e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

- Qual o campo elétrico no ponto R?



Generalizando a difração de Fraunhofer

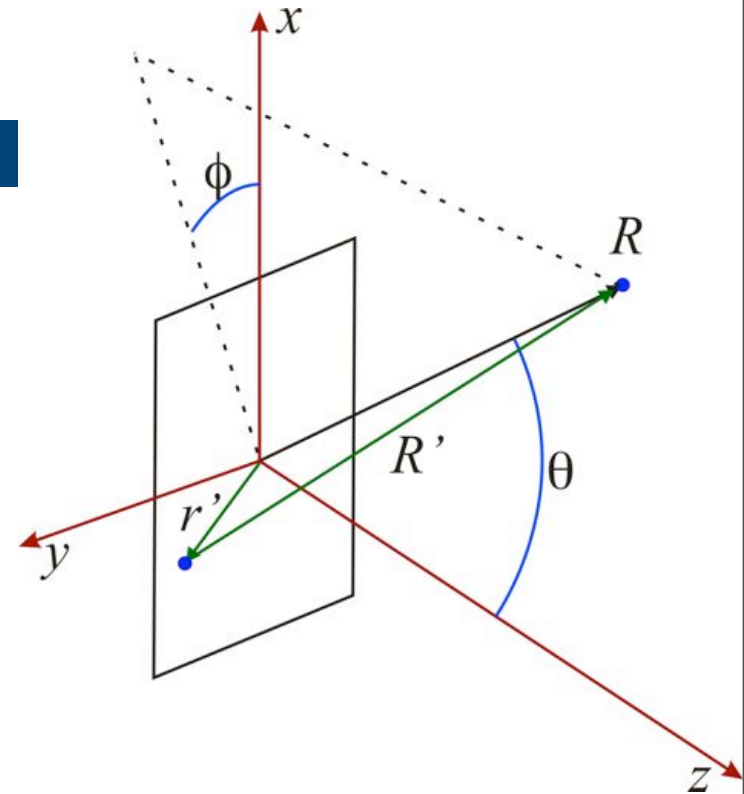
$$\hat{E}_{r'}(\vec{R}) = \frac{E_0(r')}{R'} e^{j\vec{k} \cdot \vec{R}'}$$



Generalizando a difração de Fraunhofer

- Na posição R , o campo devido ao ponto em r' vale:

$$\hat{E}_{r'}(\vec{R}) = \frac{E_0(r')}{R'} e^{j\vec{k} \cdot \vec{R}'}$$



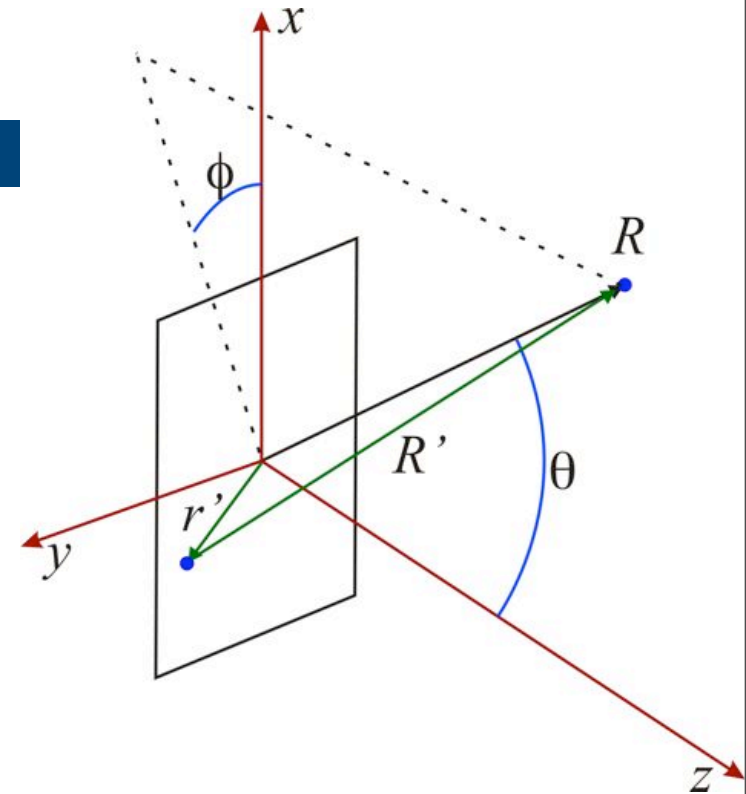
Generalizando a difração de Fraunhofer

- Na posição R , o campo devido ao ponto em r' vale:

$$\hat{E}_{r'}(\vec{R}) = \frac{E_0(r')}{R'} e^{j\vec{k} \cdot \vec{R}'}$$

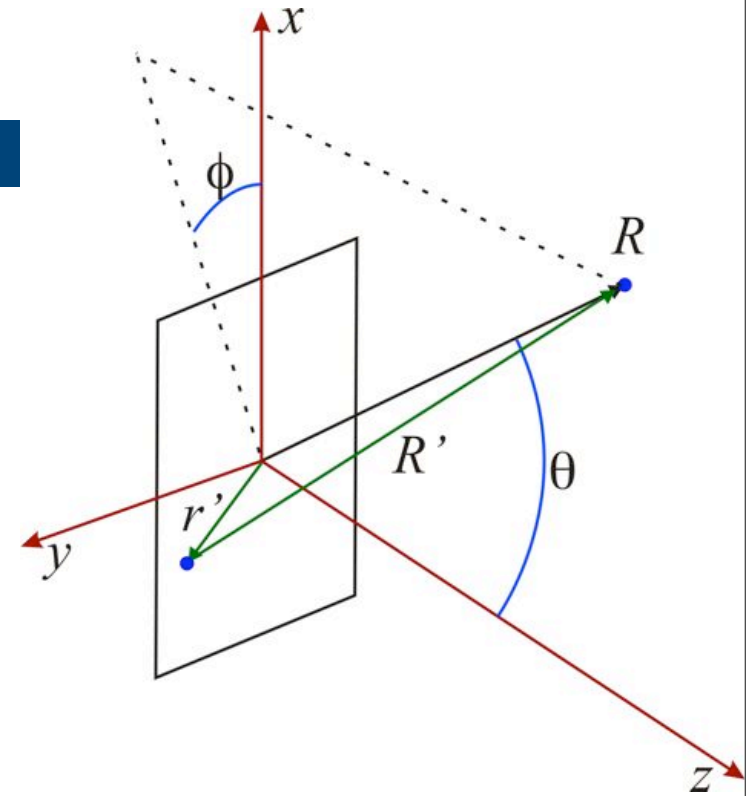
- O campo total é dado por:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \int \frac{E_0(r')}{R'} e^{j\vec{k} \cdot \vec{R}'} dx dy$$



Generalizando a difração de Fraunhofer

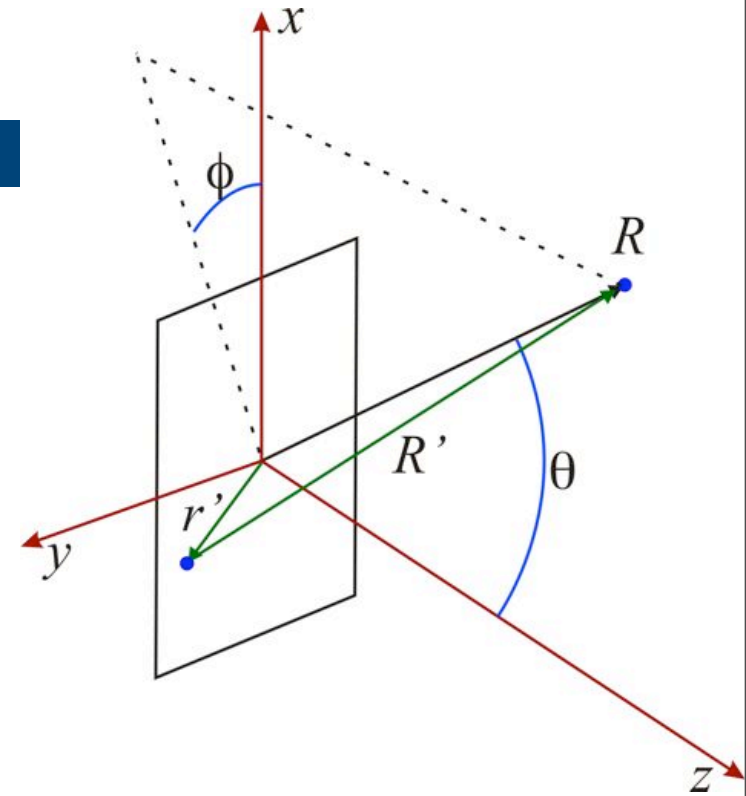
$$\vec{k} = k\hat{r}$$



Generalizando a difração de Fraunhofer

- Mas sabemos que

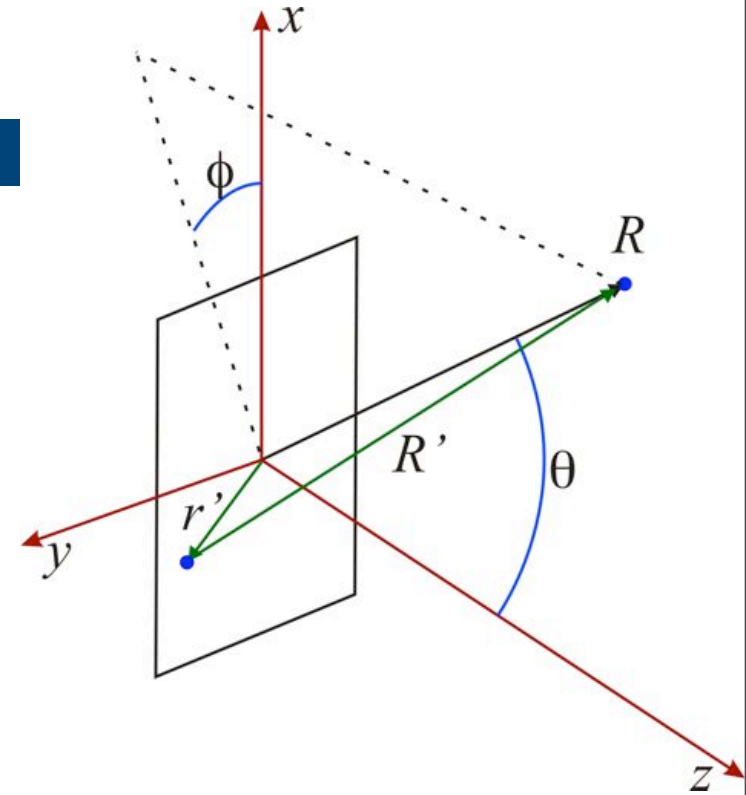
$$\vec{k} = k\hat{r}$$



Generalizando a difração de Fraunhofer

- Mas sabemos que

$$\vec{k} = k\hat{r} \quad \vec{R}' = \vec{R} - \vec{r} = R\hat{r} - \vec{r}'$$

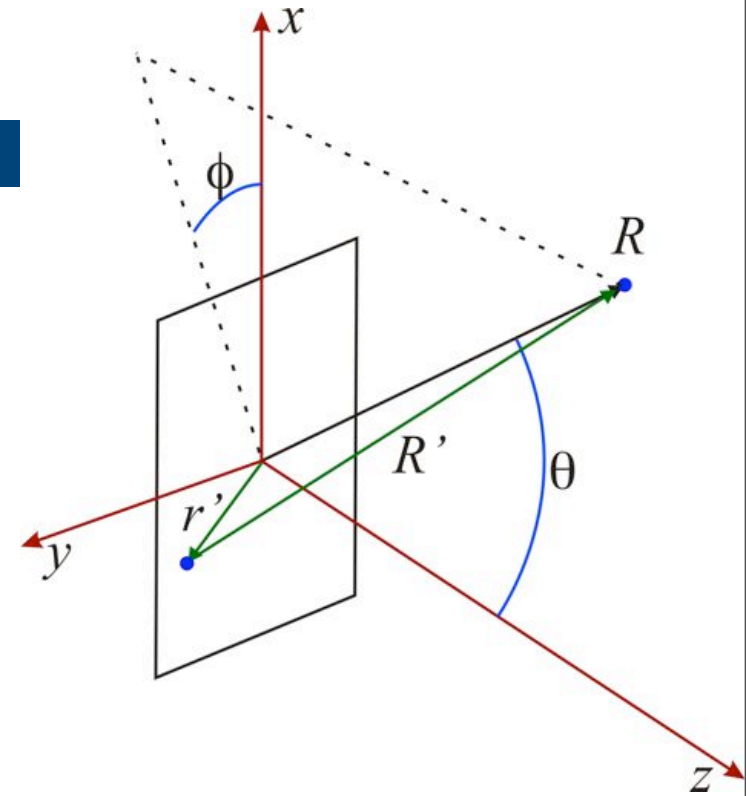


Generalizando a difração de Fraunhofer

- Mas sabemos que

$$\vec{k} = k\hat{r} \quad \vec{R}' = \vec{R} - \vec{r} = R\hat{r} - \vec{r}'$$

- Assim:



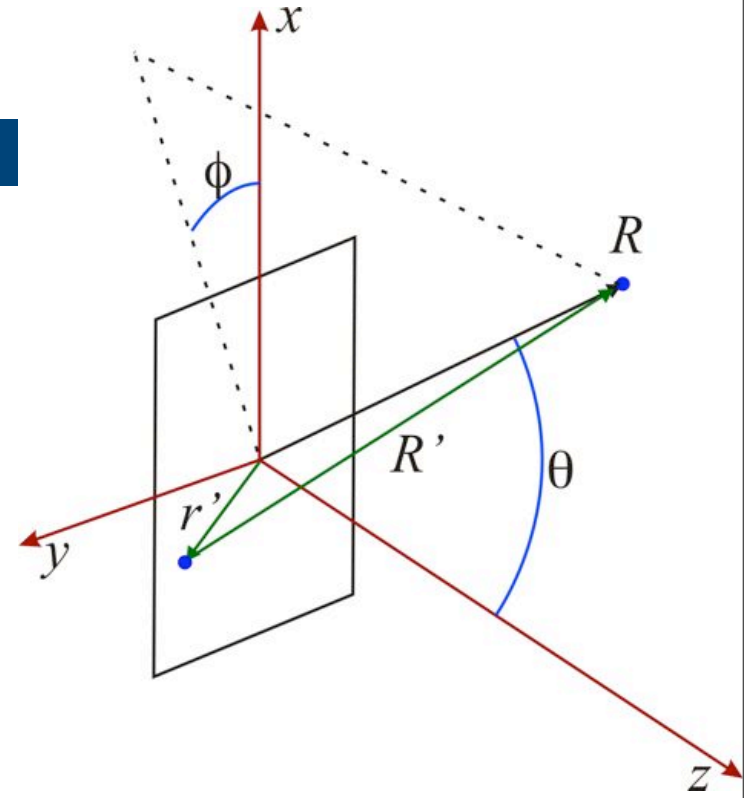
Generalizando a difração de Fraunhofer

- Mas sabemos que

$$\vec{k} = k\hat{r} \quad \vec{R}' = \vec{R} - \vec{r} = R\hat{r} - \vec{r}'$$

- Assim:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \int \frac{E_0(\vec{r}')}{R'} e^{j(kR - \vec{k} \cdot \vec{r}')} dx dy$$



Generalizando a difração de Fraunhofer

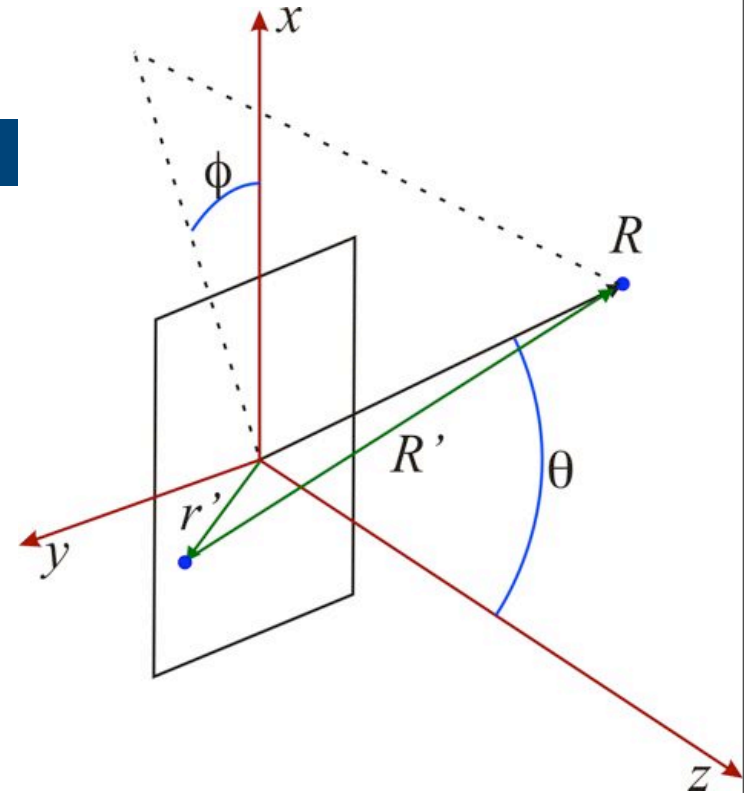
- Mas sabemos que

$$\vec{k} = k\hat{r} \quad \vec{R}' = \vec{R} - \vec{r} = R\hat{r} - \vec{r}'$$

- Assim:

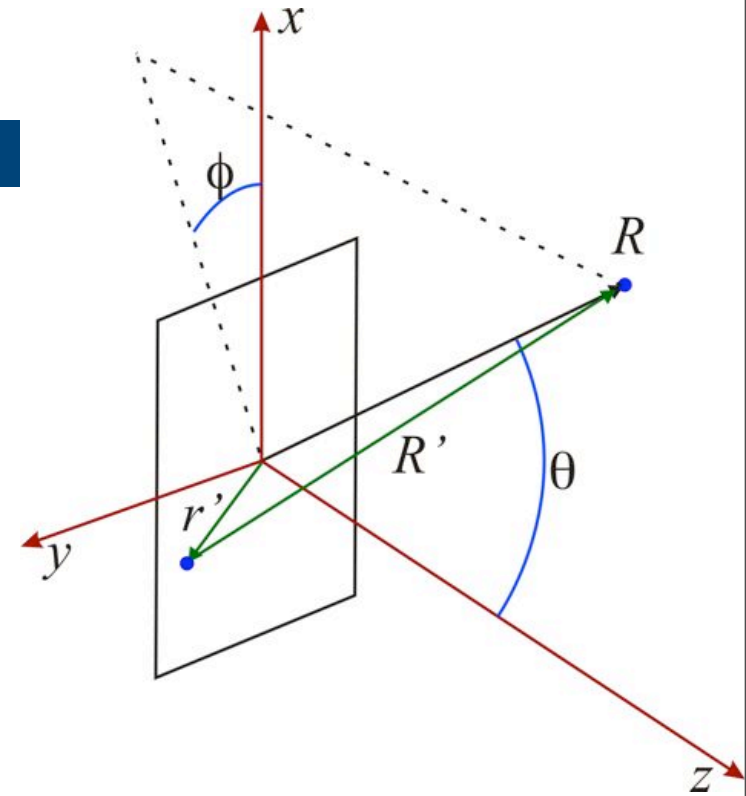
$$\hat{E}(\vec{R}) = \int \frac{E_0(r')}{R'} e^{j(kR - \vec{k} \cdot \vec{r}')} dx dy$$

$$\hat{E}(\vec{R}) = e^{jkR} \int \frac{E_0(r')}{R'} e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}'} dx dy$$



Generalizando a difração de Fraunhofer

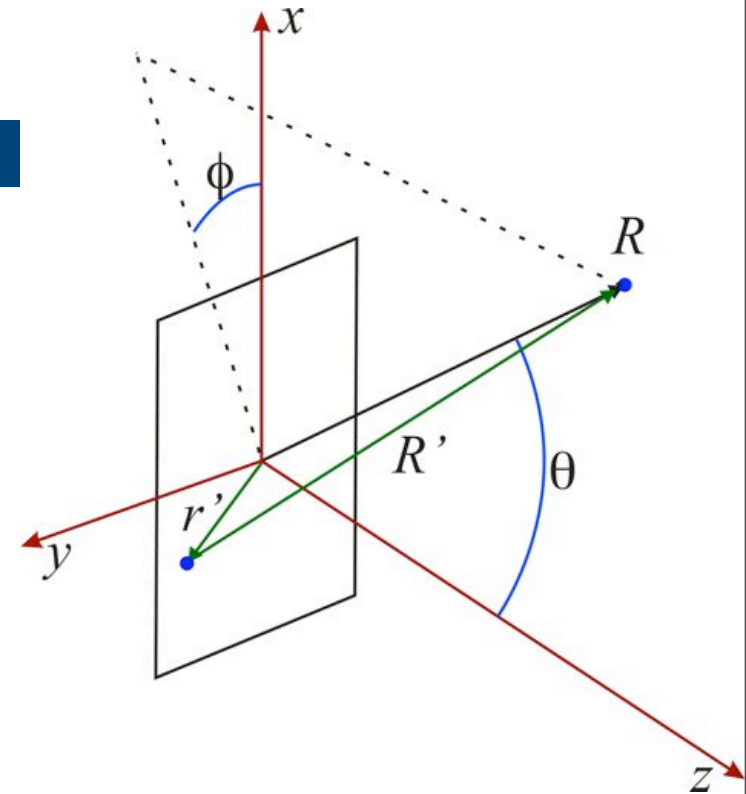
$$R' = R \text{ (módulo)}$$



Generalizando a difração de Fraunhofer

- Na condição de Fraunhofer

$$R' = R \text{ (módulo)}$$



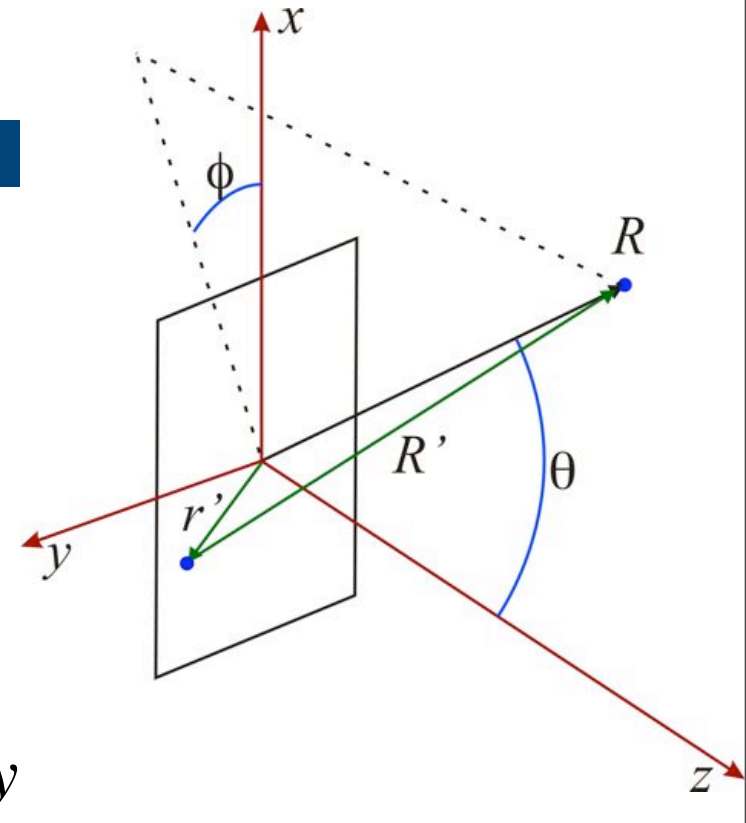
Generalizando a difração de Fraunhofer

- Na condição de Fraunhofer

$$R' = R \text{ (módulo)}$$

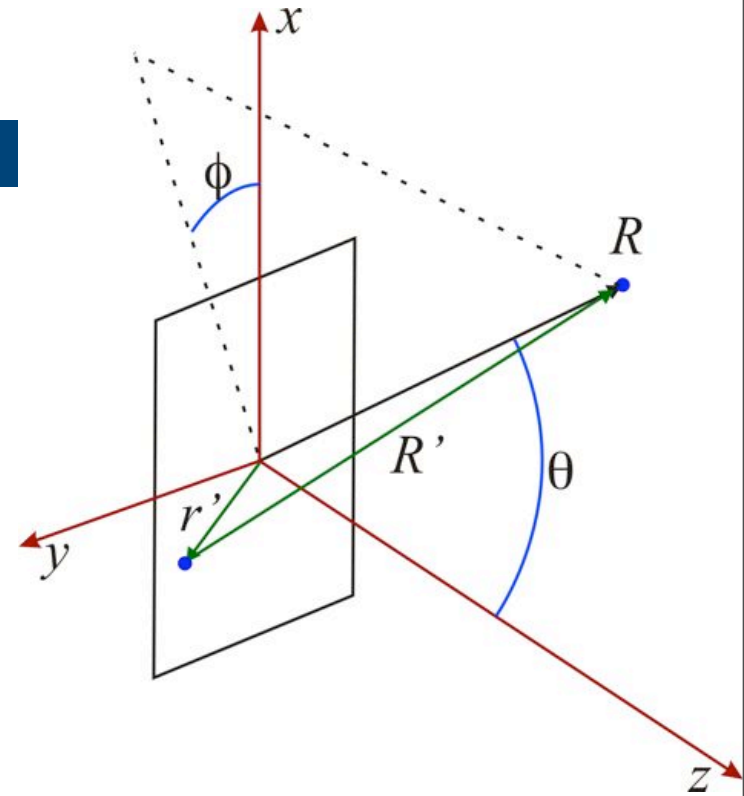
- Assim:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(r') e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}'} dx dy$$



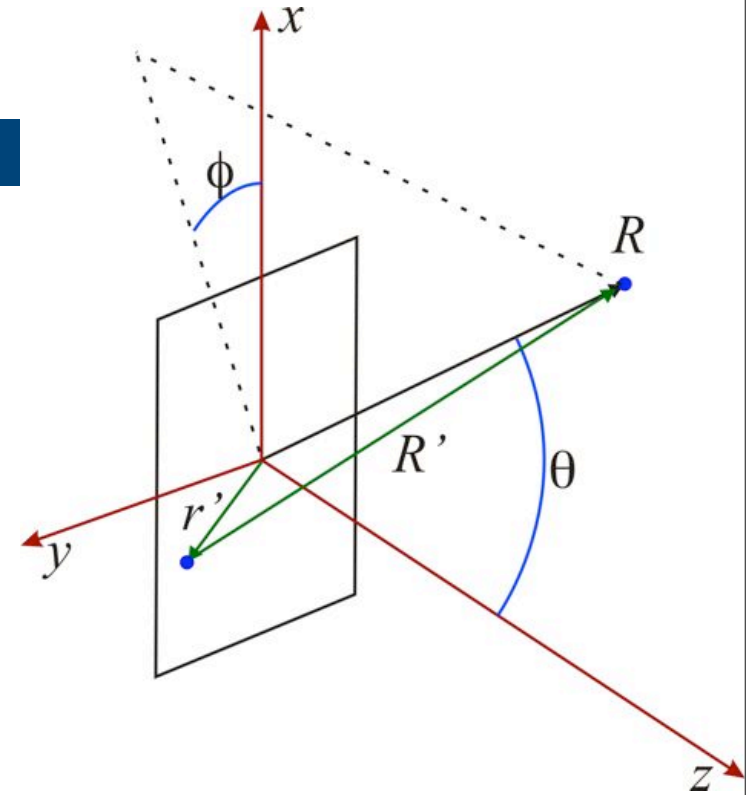
Generalizando a difração de Fraunhofer

$$\vec{k} \cdot \vec{r}'$$



Generalizando a difração de Fraunhofer

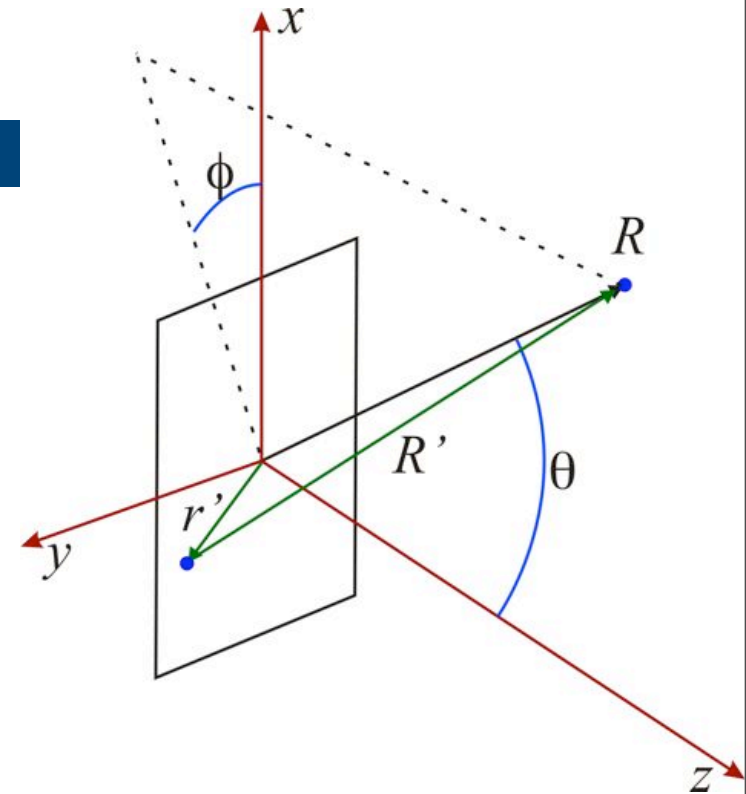
- Quem é $\vec{k} \cdot \vec{r}'$?



Generalizando a difração de Fraunhofer

- Quem é $\vec{k} \cdot \vec{r}'$?

$$\vec{r}' = x\hat{x} + y\hat{y}$$

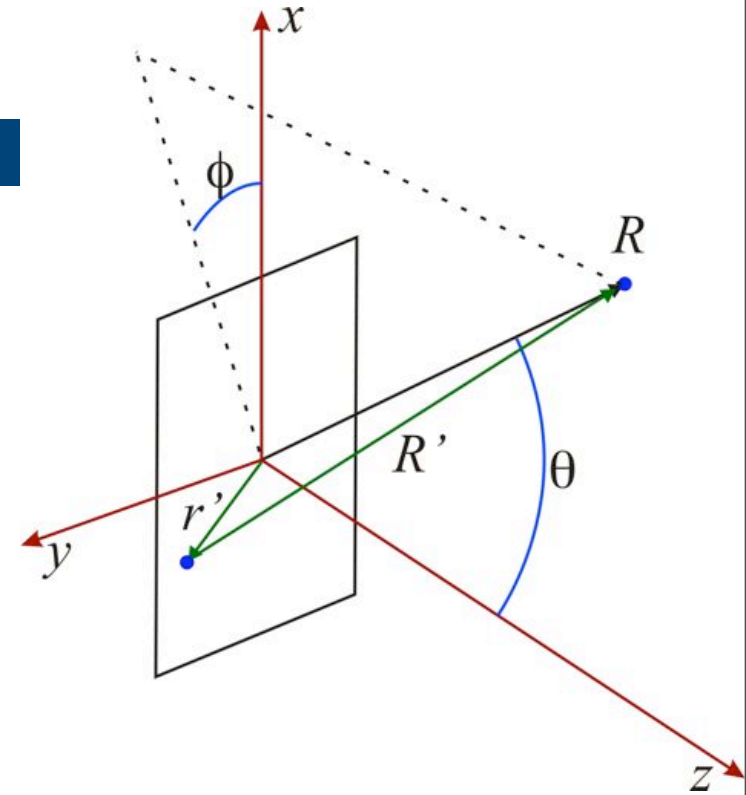


Generalizando a difração de Fraunhofer

- Quem é $\vec{k} \cdot \vec{r}'$?

$$\vec{r}' = x\hat{x} + y\hat{y}$$

$$\vec{k} = k\hat{r} = (k \sin \theta \cos \phi)\hat{x} + (k \sin \theta \sin \phi)\hat{y} + (k \cos \theta)\hat{z}$$



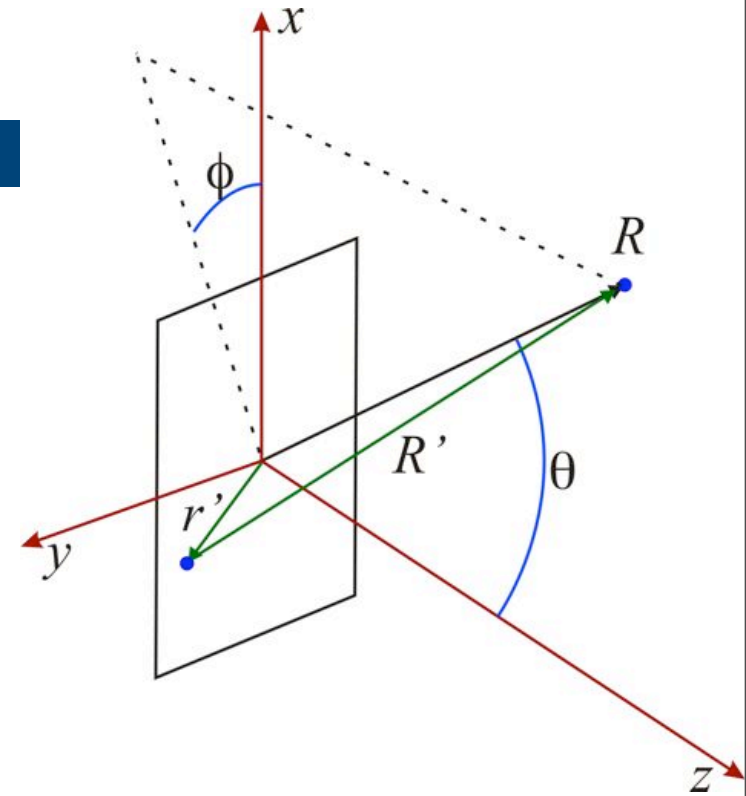
Generalizando a difração de Fraunhofer

- Quem é $\vec{k} \cdot \vec{r}'$?

$$\vec{r}' = x\hat{x} + y\hat{y}$$

$$\vec{k} = k\hat{r} = (k \sin \theta \cos \phi)\hat{x} + (k \sin \theta \sin \phi)\hat{y} + (k \cos \theta)\hat{z}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{r}' = k \sin \theta \cos \phi x + k \sin \theta \sin \phi y$$



Generalizando a difração de Fraunhofer

- Quem é $\vec{k} \cdot \vec{r}'$?

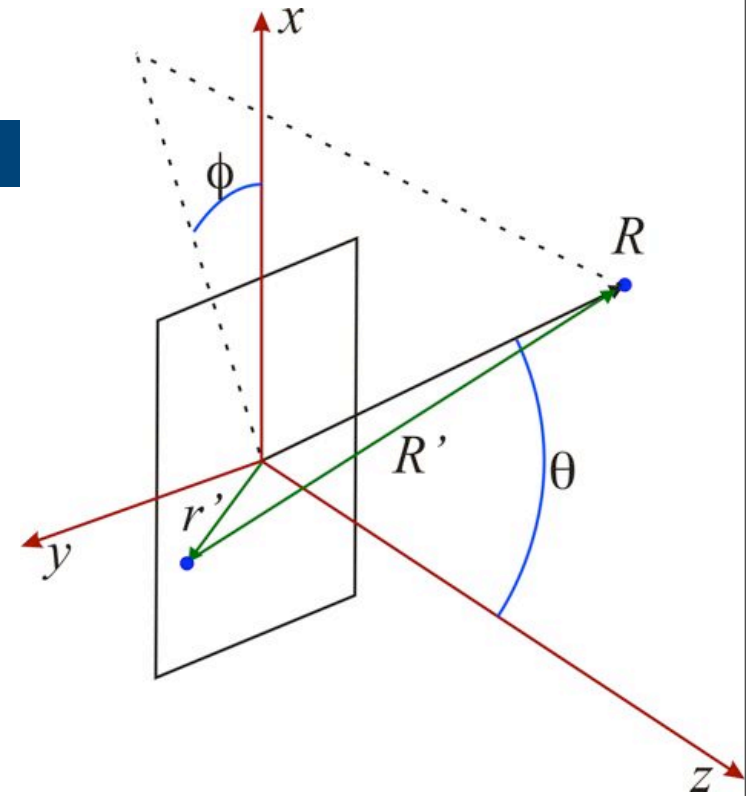
$$\vec{r}' = x\hat{x} + y\hat{y}$$

$$\vec{k} = k\hat{r} = (k \sin \theta \cos \phi)\hat{x} + (k \sin \theta \sin \phi)\hat{y} + (k \cos \theta)\hat{z}$$

- Assim:

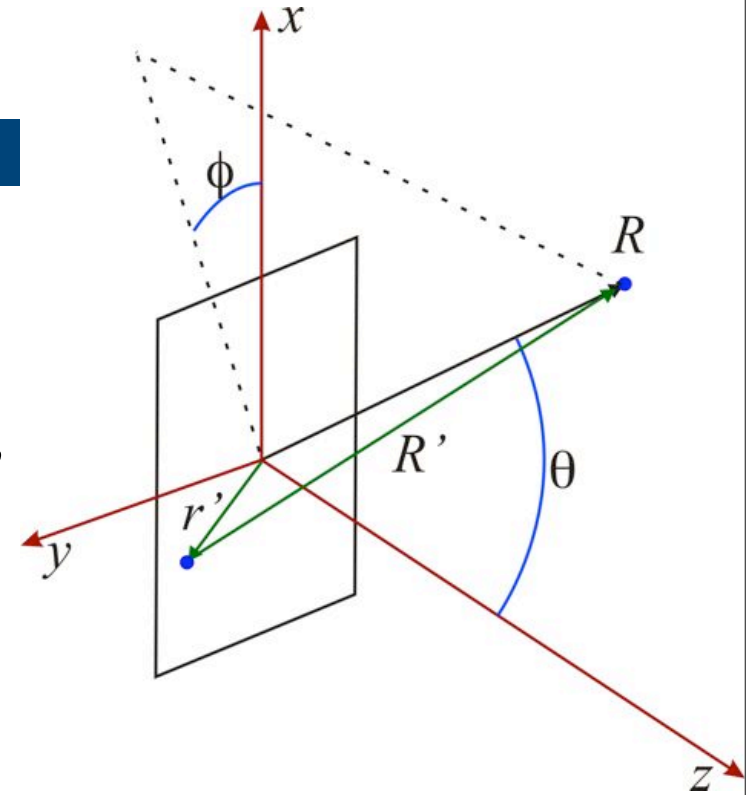
$$\vec{k} \cdot \vec{r}' = k \sin \theta \cos \phi x + k \sin \theta \sin \phi y$$

- Definindo $\begin{cases} k_x = k \sin \theta \cos \phi \\ k_y = k \sin \theta \sin \phi \end{cases}$



Generalizando a difração de Fraunhofer

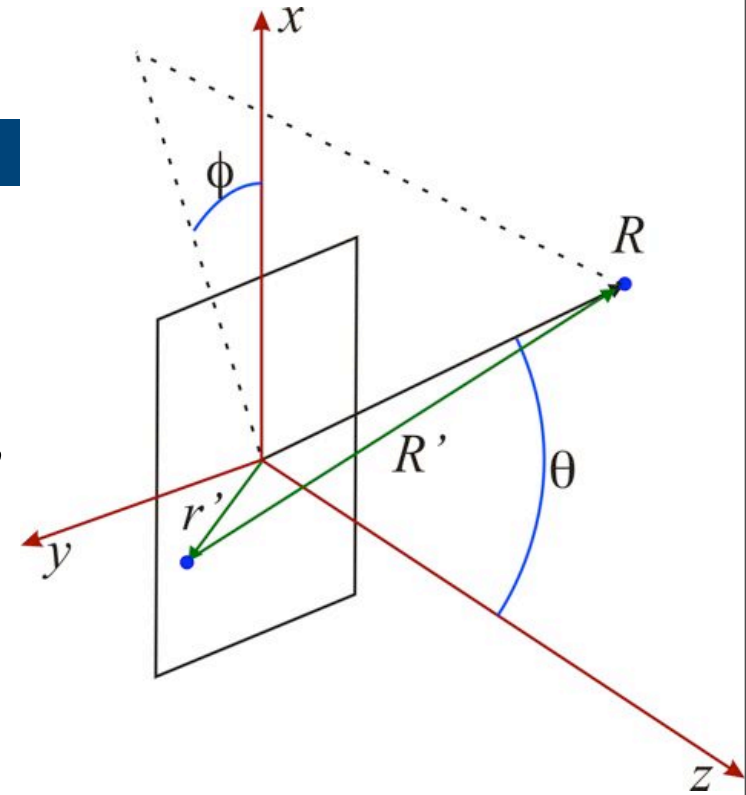
$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(r') e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}'} dx dy$$



Generalizando a difração de Fraunhofer

- A expressão para o campo

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(r') e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}'} dx dy$$



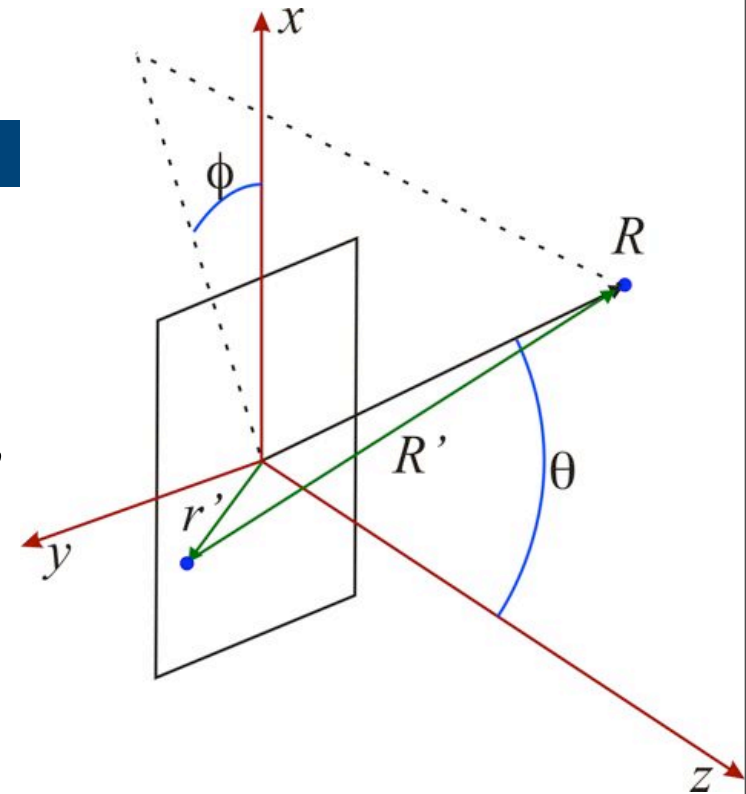
Generalizando a difração de Fraunhofer

- A expressão para o campo

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(r') e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}'} dx dy$$

- Torna-se:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy$$

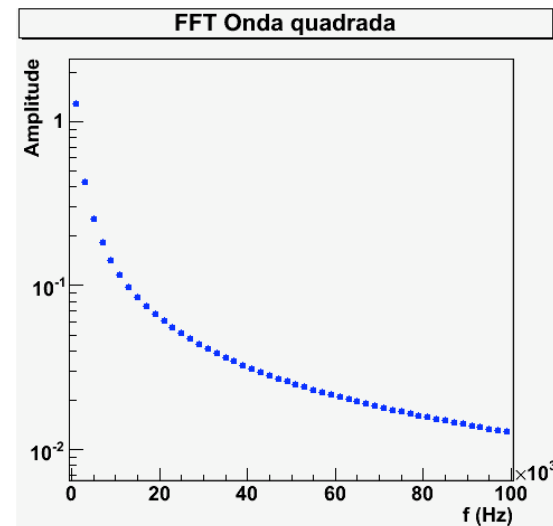
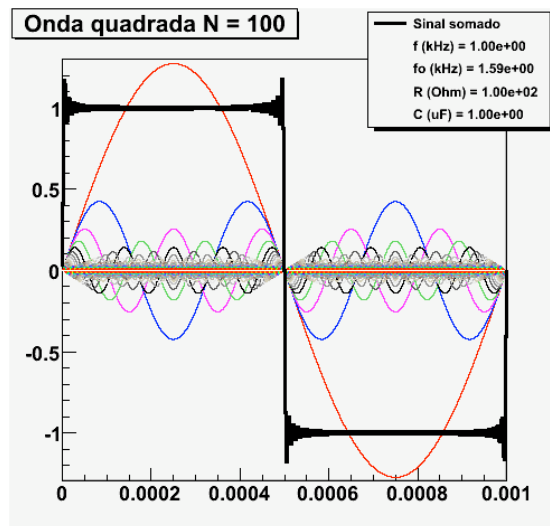


Lembrando: Séries de Fourier

- Aula 2 – Série de Fourier em uma dimensão

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnx} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-jnx} dx$$

- Transformada de Fourier



Lembrando: Séries de Fourier

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{j(nx+my)}$$

$$c_{nm} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) e^{-j(nx+my)} dx dy$$

Lembrando: Séries de Fourier

- Transformada de Fourier em 2D

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{j(nx+my)}$$

$$c_{nm} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) e^{-j(nx+my)} dx dy$$

Lembrando: Séries de Fourier

- Transformada de Fourier em 2D

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{j(nx+my)}$$

$$c_{nm} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) e^{-j(nx+my)} dx dy$$

- No caso da difração de Fraunhofer

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy$$

Lembrando: Séries de Fourier

- Transformada de Fourier em 2D

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{j(nx+my)}$$

$$c_{nm} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) e^{-j(nx+my)} dx dy$$

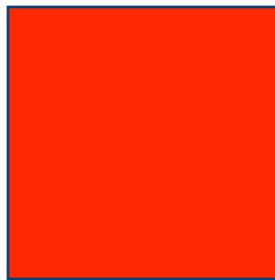
- No caso da difração de Fraunhofer

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy$$

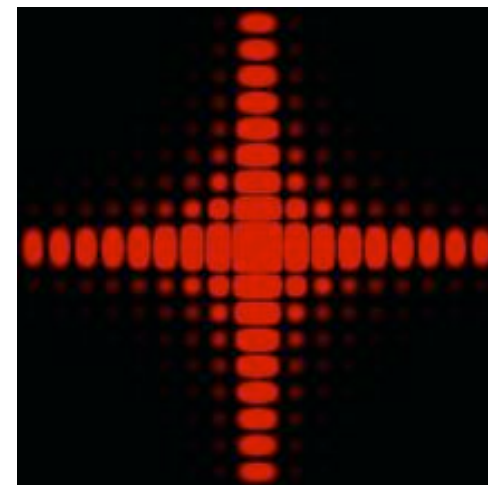
Difração e transformada de Fourier

- A figura de difração está relacionada à transformada de Fourier do objeto iluminado

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x,y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy$$



Objeto



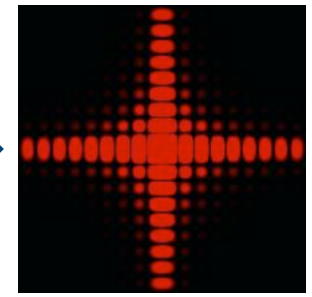
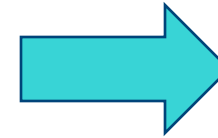
Difração

Difração e transformada de Fourier

- A figura de difração está relacionada à transformada de Fourier do objeto iluminado

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy$$

A transformada de Fourier se dá no campo elétrico. Contudo, medimos intensidade luminosa, que é proporcional a E^2 .



Freqüências espaciais

- A intensidade luminosa em uma dada posição está relacionada às componentes da T.F. para cada freqüência espacial

$$\hat{E}(\vec{R}) \rightarrow E(R_x, R_y) \rightarrow E(k_x, k_y)$$

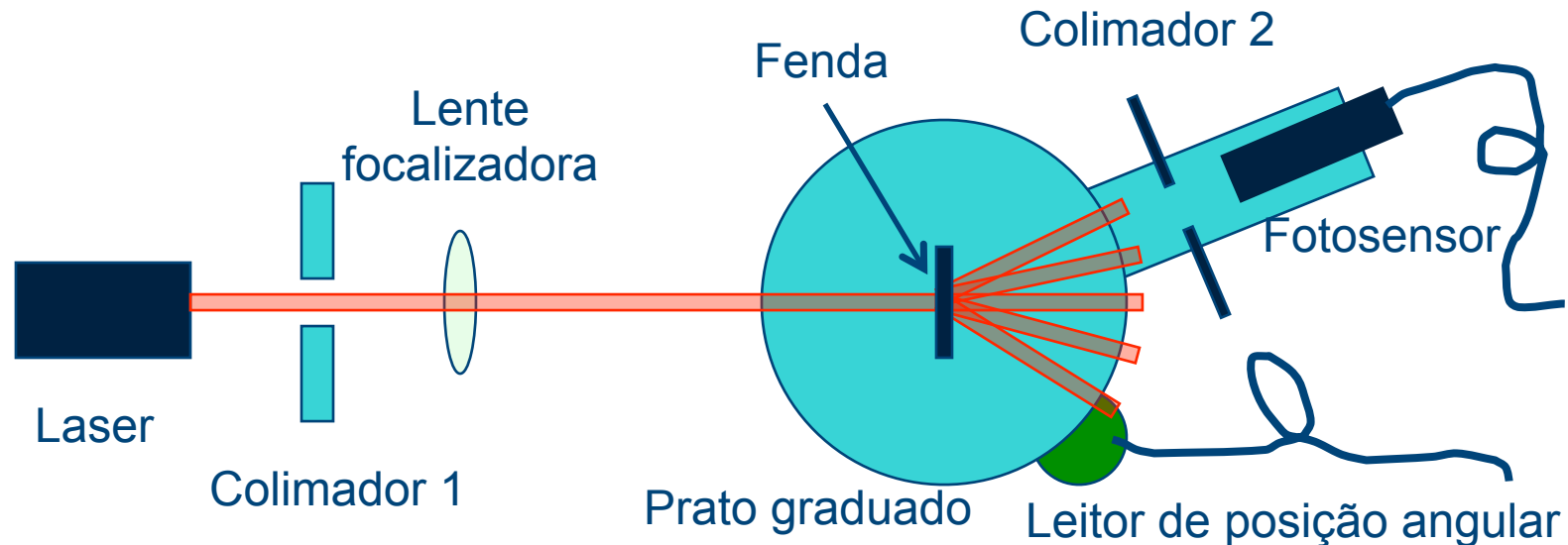
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \begin{cases} k_x = k \sin \theta \cos \phi \\ k_y = k \sin \theta \sin \phi \end{cases}$$

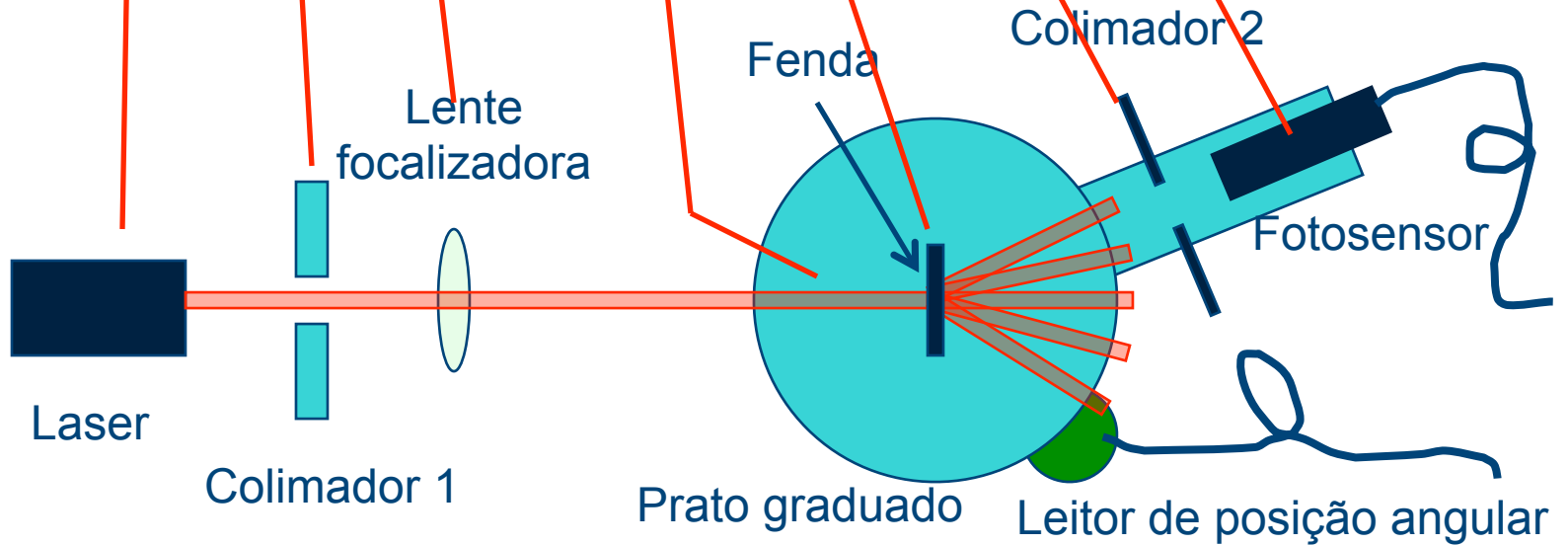
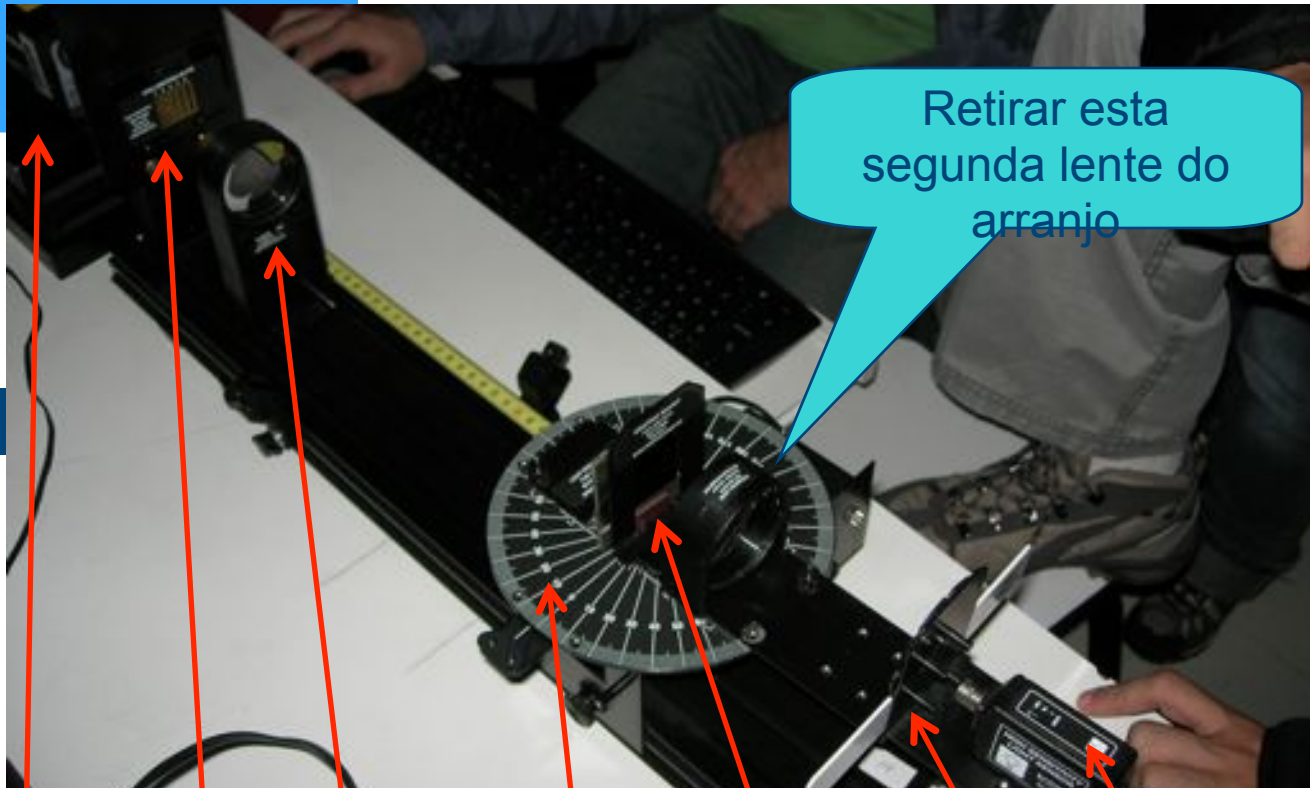
Objetivos

- Estudar, quantitativamente, a figura de difração de uma fenda simples
 - Medir as intensidades para cada ângulo
 - Comparar com previsão teórica
 - Ajuste de X^2_{red} para obter a dimensão (d) da fenda
 - Mostrar que a figura de difração é a transformada de Fourier da fenda
 - Lembre-se que a transformada de Fourier é no campo elétrico e que medimos intensidade, ou seja, o quadrado do campo elétrico

Arranjo experimental

- Espectrofotômetro e datastudio
 - O espectrofotômetro consiste de um arranjo contendo um fotosensor (para medir intensidade) e um sensor de rotação para medir ângulo





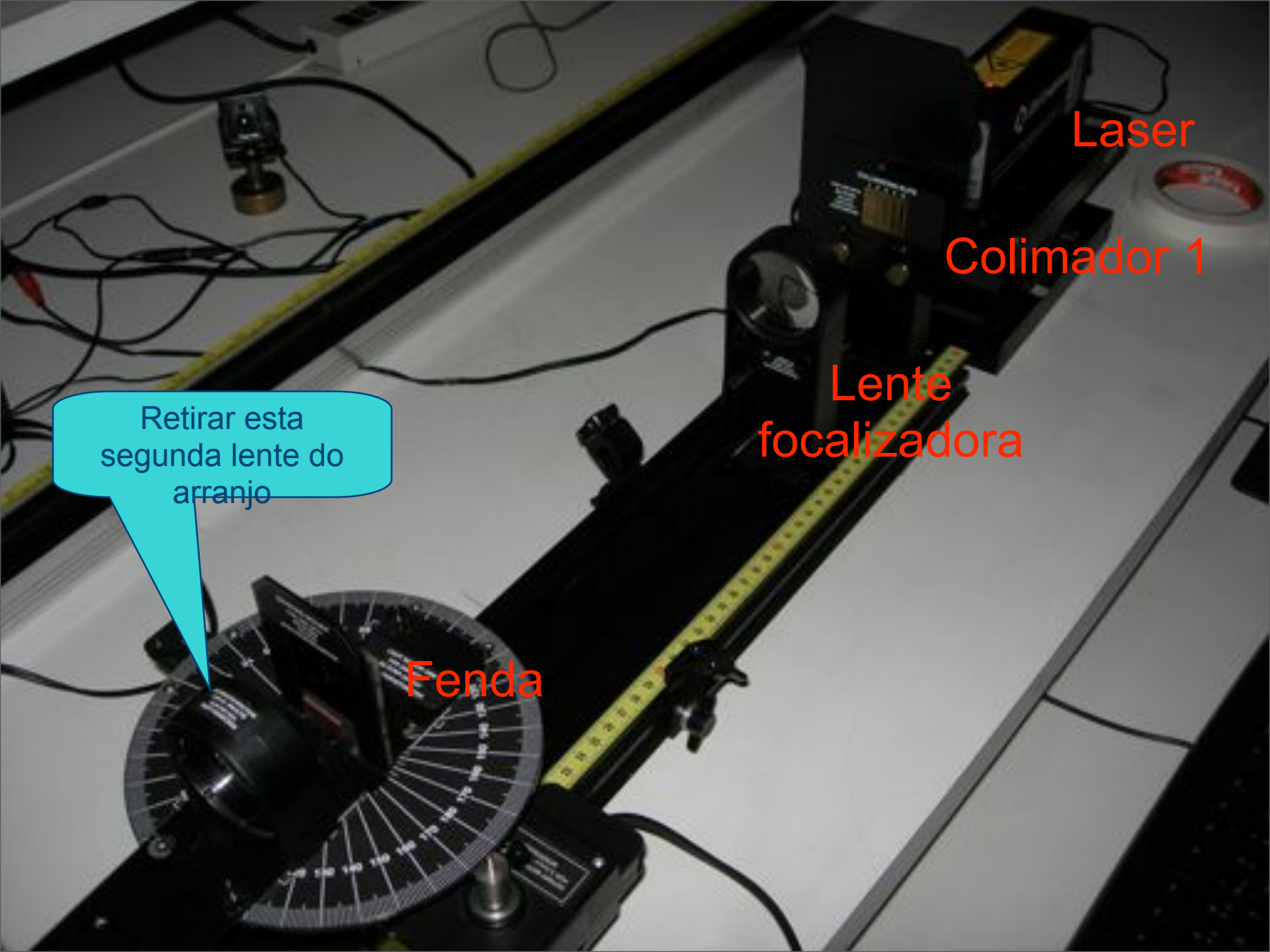
Laser

Colimador 1

Lente focalizadora

Fenda

Retirar esta segunda lente do arranjo



Fotosensor

Colimador 2

Retirar esta
segunda lente do
arranjo

Fendas

Mover devagar, sem
fazer força
1-2 graus/segundo

Movimento manual

Leitor de posição

A fenda escolhida
deve estar bem
centralizada no
prato para garantir a
correta medida
angular

Fotosensor

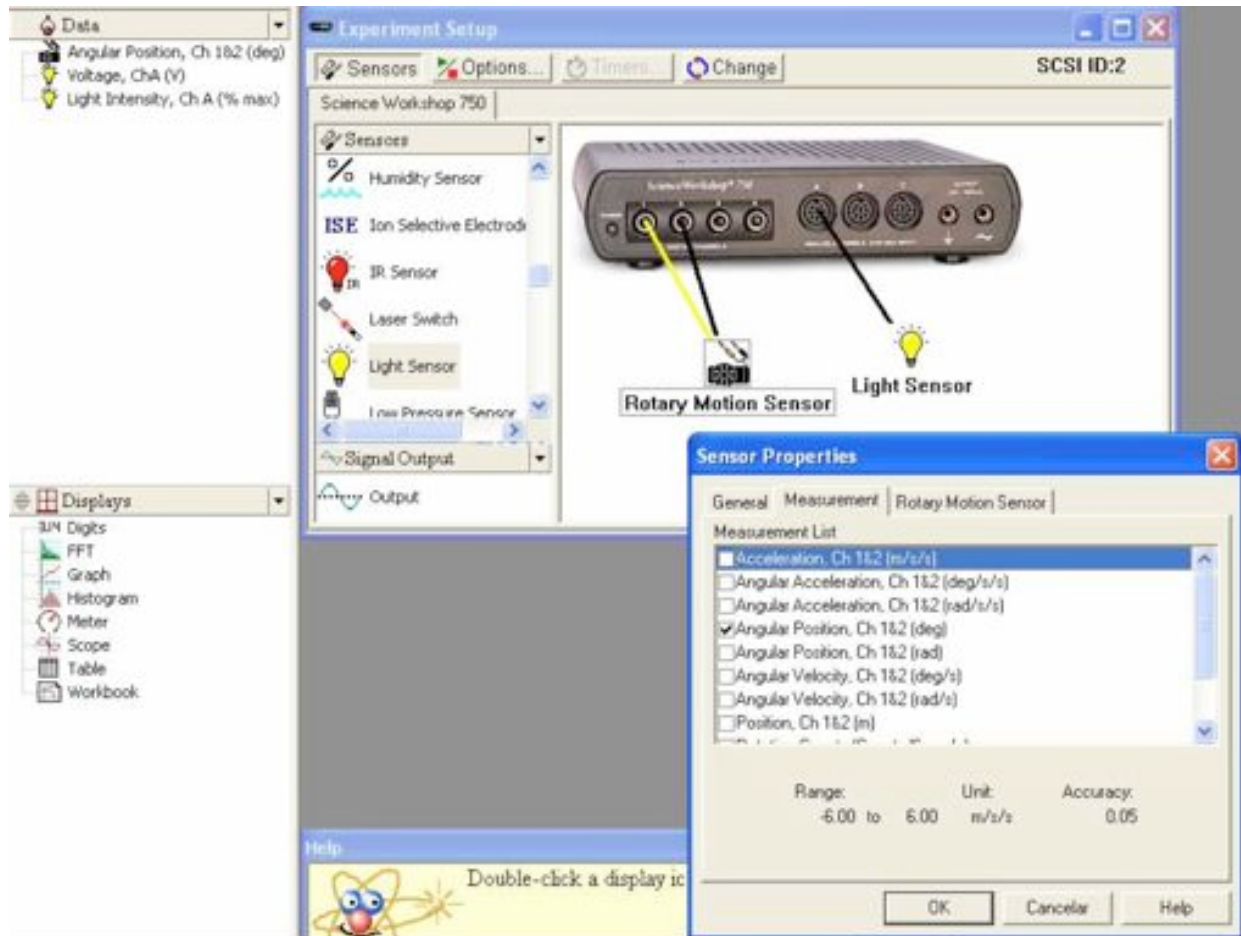
Colimador 2

A largura da abertura do colimador 2 define a precisão angular na qual a medida é feita. Quanto menor a abertura, maior é a precisão angular

Procedimento experimental

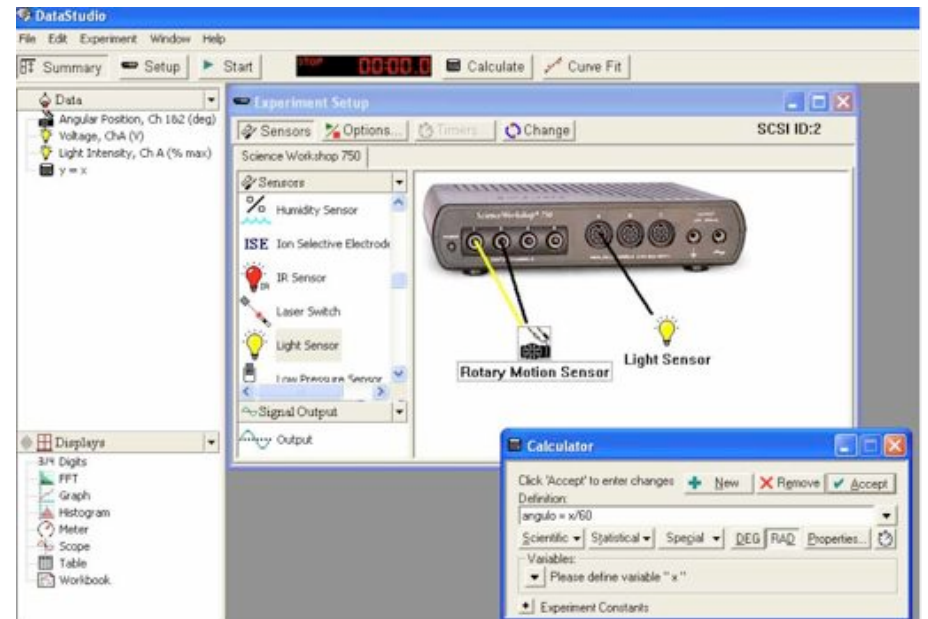
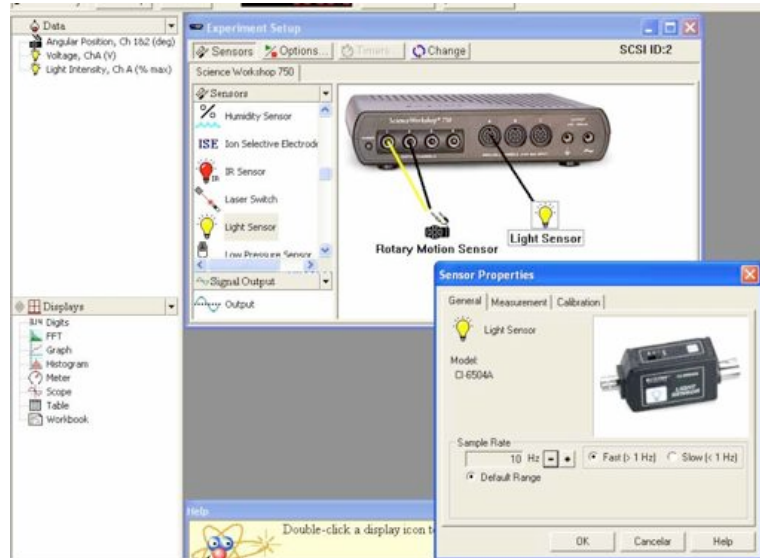
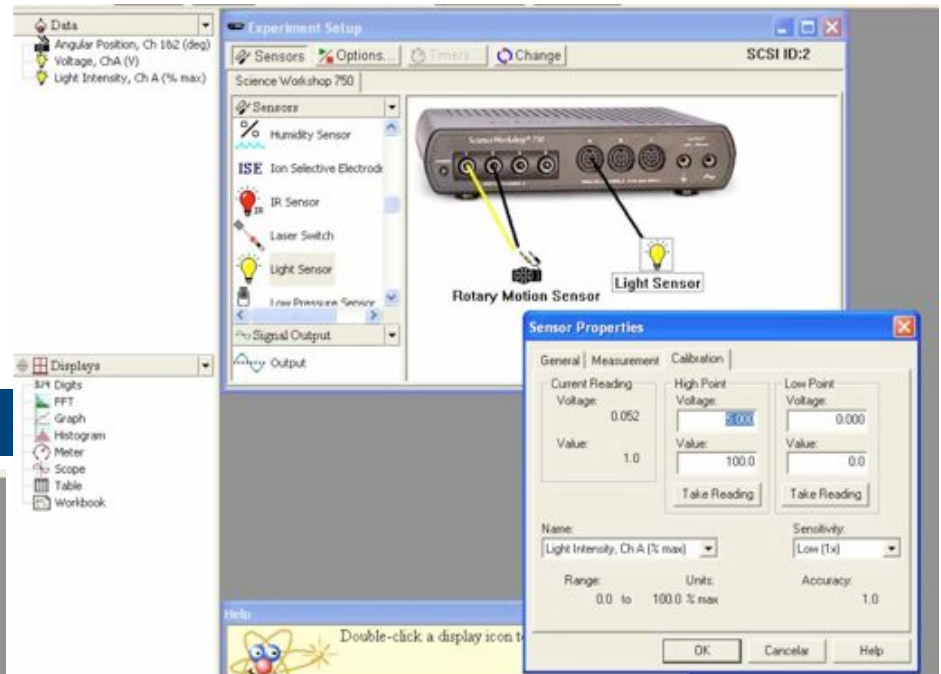
- Selecionar as fendas colimadoras corretas. O Colimador 1 deve ser o mais aberto possível. A fenda colimadora 2 deve ser a mais estreita para garantir a melhor resolução na medida.
- Remover a lente (caso esta esteja presente) entre o suporte do slide e o fotosensor.
- Alinhar o laser com o fotosensor.
- Fixar o slide com o conjunto de fendas no respectivo suporte. A fenda escolhida deve estar bem centralizada.
- Ajustar a lente que fica entre o primeira fenda colimadora e o suporte do slide de modo a garantir o melhor foco possível sobre o slide de fendas.
- Para a fenda simples e duplas quanto maior a abertura da fenda, maior a intensidade da figura de difração e/ou interferência.

Procedimento experimental Sobre o datastudio



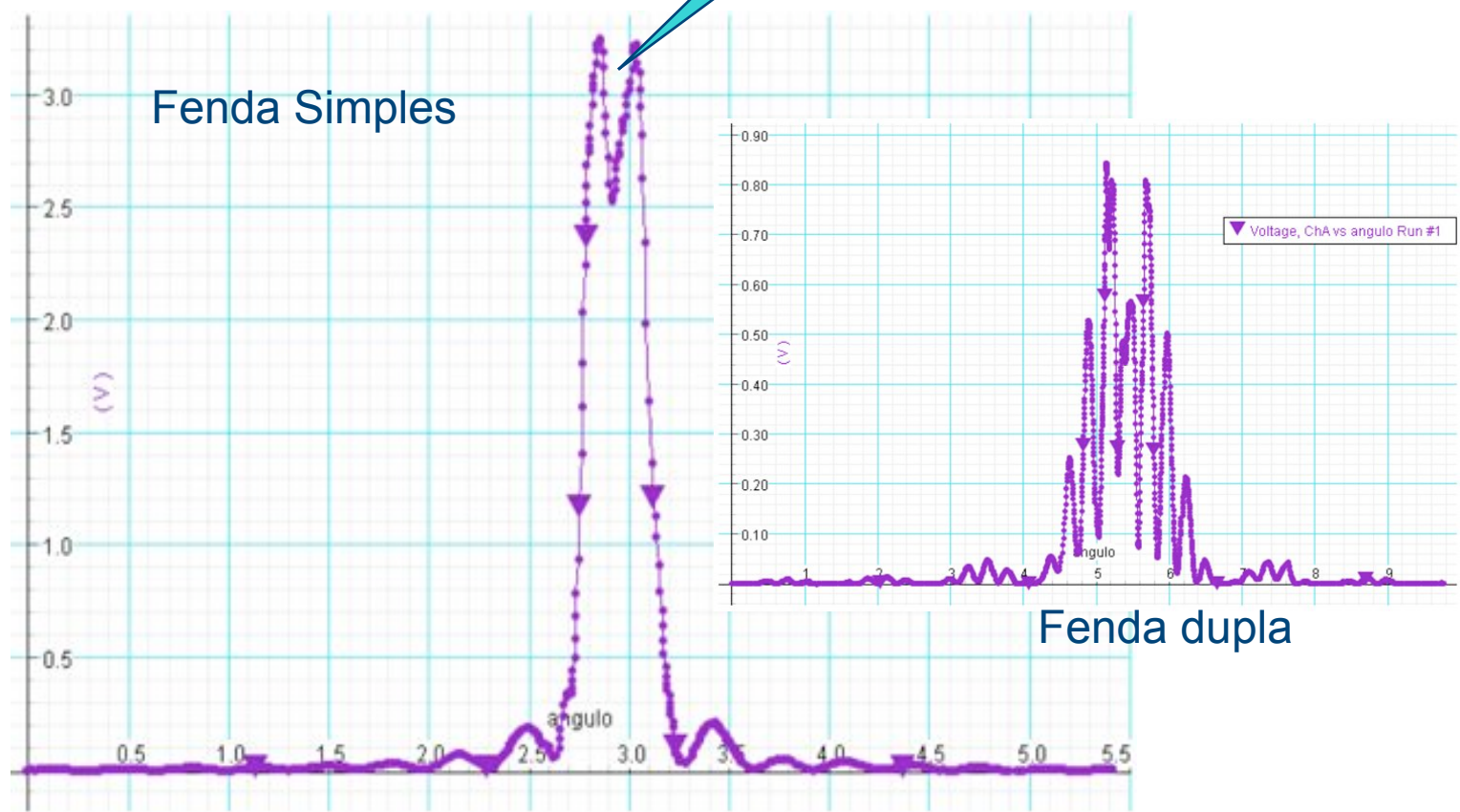
Propriedades do sensor e cálculo do ângulo

Alexandre Suaide, LabFlex (2008)



Dados

Este vale é devido àquela lente que deve ser retirada do arranjo



Cuidados experimentais

- Calibração da medida de ângulo
 - Verifique que o máximo de intensidade esteja em zero graus
 - Alinhamento do sistema óptico
 - Se não estiver, aplicar correções aos dados
 - Verifique a calibração
 - A leitura de $\pm 45^\circ$ no datastudio corresponde, de fato, a $\pm 45^\circ$ no prato graduado?
 - Se não for, aplique uma correção (escala) às leituras angulares

Atividades da semana

- Utilizar o espectrofotômetro da PASCO para medir o espectro de difração de *uma fenda simples*.
 - A partir deste espectro, fazer uma análise de X^2_{red} entre os dados e a curva teórica para obter o tamanho da fenda.
 - A curva teórica descreve bem os dados? Há alguma discrepância? Descreva os resultados.
 - Compare as intensidades dos máximos com a transformada de Fourier de uma fenda quadrada.
 - Lembre-se que a TF é no campo elétrico.