



FÍSICA EXPERIMENTAL IV

AULA 5

[HTTP://WWW.IF.USP.BR/SUAIDE/](http://www.if.usp.br/suaide/)

Alexandre Suaide

Ed. Oscar Sala

sala 246

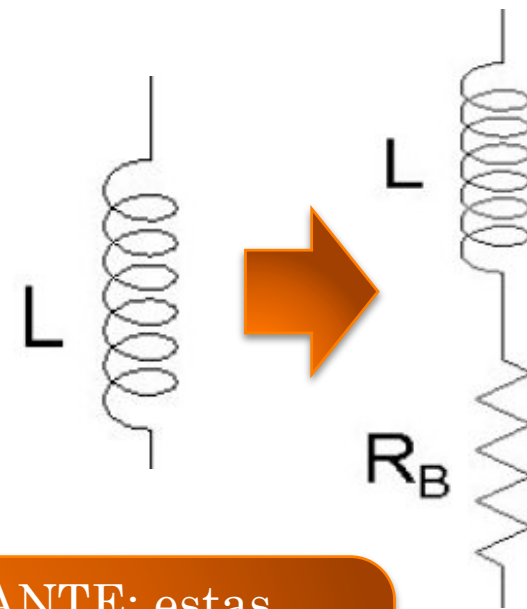
ramal 7072

MEDINDO R_B COM DIAGRAMA DE FASE

- O indutor real possui uma resistência não nula que pode ser considerada como estando em série ao circuito
- Assim, quando medimos a tensão na bobina (V_R), estamos, na verdade medindo a tensão no resistor (V_R) mais a do indutor (V_L)

$$V_B = V_R + V_L$$

IMPORTANTE: estas tensões não são a de pico-a-pico mas sim as instantâneas (lembrem das fases)



MEDINDO R_B COM DIAGRAMA DE FASE

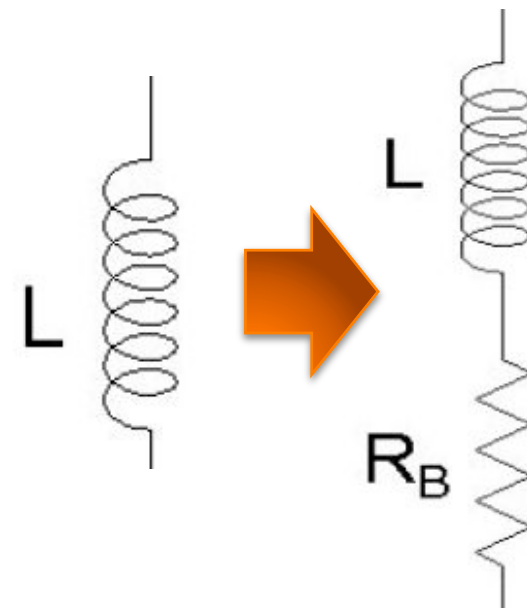
- Lembrando: $\hat{V} = \hat{Z} \cdot \hat{i} \Rightarrow V = \text{Re}[\hat{V}]$ $i = i_0 \cos(\omega t)$

$$V_R = Ri = Ri_0 \cos(\omega t)$$

$$\hat{V}_L = j\omega L \hat{i} \Rightarrow V_L = \omega L i_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\hat{V}_C = -\frac{j}{\omega C} \hat{i} \Rightarrow V_C = \frac{i_0}{\omega C} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

- Com estas informações podemos resolver o problema.



MEDINDO R_B COM DIAGRAMA DE FASE

- Lembrando: $\hat{V} = \hat{Z} \cdot \hat{i} \Rightarrow V = \text{Re}[\hat{V}] \quad i = i_0 \cos(\omega t)$

$$V_R = Ri = Ri_0 \cos(\omega t)$$

$$\hat{V}_L = j\omega L \hat{i} \Rightarrow V_L = \omega L i_0 \cos(\omega t - 90^\circ)$$

- Qual a magnitude do efeito?

$$\phi = \arctan \left[\frac{\text{Im}[\hat{Z}]}{\text{Re}[\hat{Z}]} \right] = \arctan \left[\frac{\omega L}{R} \right] \sim 87,5^\circ$$

$$ideal = 90^\circ$$

$$\sim 2,5/90 \sim 3\%$$

Efeito muito pequeno!
Qualquer influência sistemática pode mudar totalmente o resultado.

Nós descobrimos, através da medida de alguns grupos que, a ponta de prova em **10X** muda a fase entre B-C de 1-2°, o suficiente para comprometer a medida. Use apenas a ponta em 1X.

ALGUNS RESULTADOS

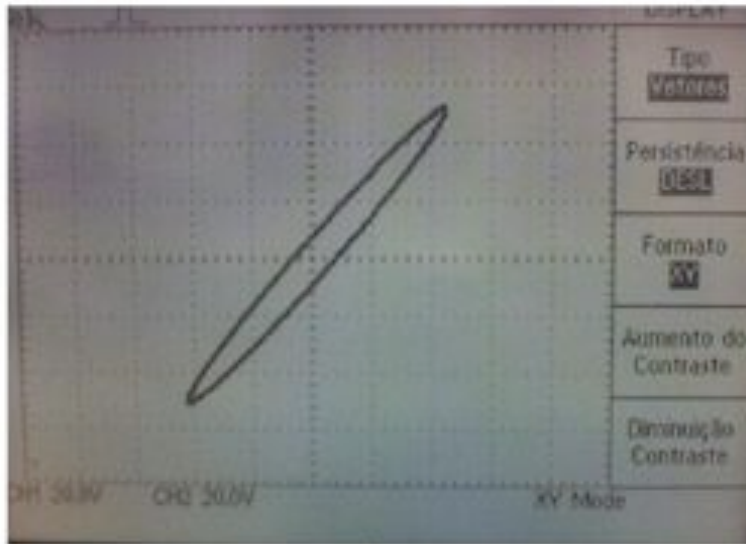
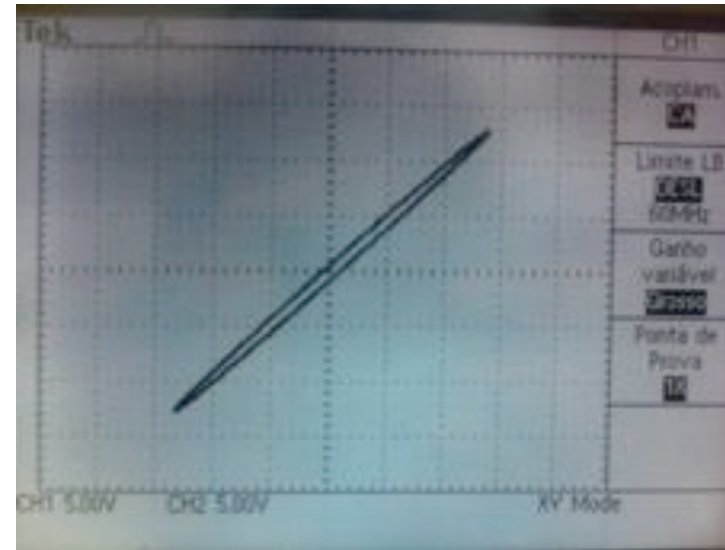


Fig. 1



A maioria dos grupos apenas apresentou os dados e não tentou (pelo menos não indicou) obter o valor de RB.

Porque?

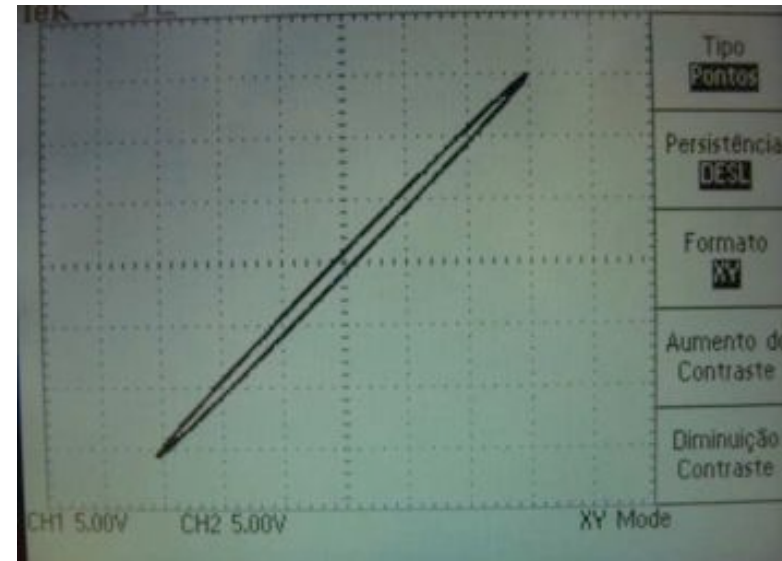
ALGUNS RESULTADOS

Alguns grupos tentaram obter alguma Relação que fosse possível extrair R.

Alguns até obtiveram a fase razoável (faltou pouco)



$$\phi_1 = (1,50 \pm 0,03) \text{ rad} = (85,90 \pm 1,72)^\circ$$



A função teórica da elipse, no entanto, se provou ser um desafio. Utilizando as equações:

$$V_L = V_{0R} \cos(\omega t - \phi + \phi_1)$$

$$V_C = V_{0R} \cos(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2})$$

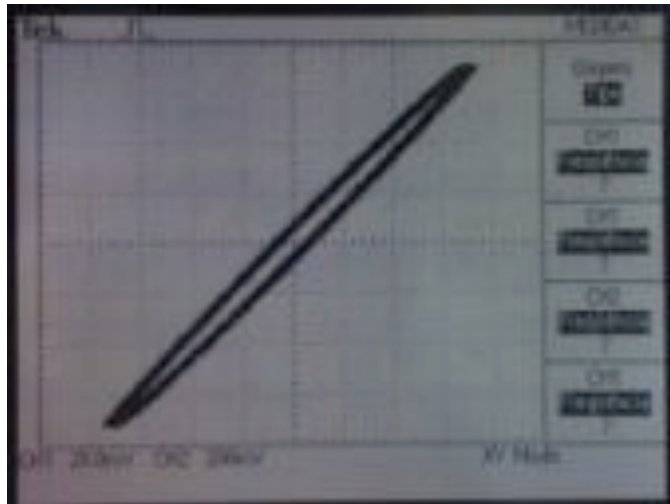
Podemos isolar t da segunda equação e substituir na primeira, conseguindo assim $V_L(V_C)$:

$$V_L = V_{0R} \cos(\arccos \frac{V_C}{V_{0R}} + \frac{\pi}{2} + \phi_1)$$

O que dá a equação de uma elipse. No entanto, não foi possível tirar R desta equação como desejado, pois a dependência dela com o valor da resistência não é óbvio, sendo o termo V_{0R} dependente de R de uma forma não explícita. É possível conjecturar que $V_{0R} + V_{0C} + V_{0L} = V_G$, e sabemos V_{0C} , mas como V_{0L} não é conhecido, não temos como prosseguir.

ALGUNS RESULTADOS

Somente dois grupos obtiveram algum Valor para R. Parabéns!



A fase do indutor real é dada por

$$\operatorname{tg}\phi_1 = \frac{\omega L}{R_B}$$

Dedução ou referência

Se tomarmos a razão entre os eixos maior e menor da elipse vemos que equivale a 22,50(45). Tomando este valor como $\operatorname{tg}\phi_1$, vemos que a resistência da bobina foi $R_B = 8,17(74)\Omega$, que é menos preciso mas ainda está compatível com os valores nominal e do multímetro.

Será que as hipóteses são válidas?



Como $V_C = V_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$ e $V_L = V_0 \cos(\omega t - \phi_1)$, quando o indutor completa meio ciclo, isso equivale ao comprimento do eixo menor, então podemos obter a fase ϕ no indutor,

$$V_0 \cos(\omega \frac{T}{2} - \phi_1) = E_m \Rightarrow \phi = \arccos(\frac{E_m}{V_0}) = 0,96 \text{ rad} \quad (1)$$

Para obter a resistência do indutor, sabemos que o Diagrama de Fase é uma elipse, portanto

$$\frac{V_C^2}{A^2} + \frac{V_L^2}{B^2} = 1 \Rightarrow \frac{X_C^2 i_0^2}{E_m^2} + \frac{X_L^2 i_0^2}{E_M^2} = 1 \quad (2)$$

$R_L = 14,2 \Omega$, que é um tanto diferente do valor obtido com o ohmímetro, $R_{L,o} = 8,9 \pm 0,2 \Omega$, talvez pelo fato de que a resistência do indutor quando submetido a corrente alternada não seja mais somente a resistência do fio enrolado, mas seja também influenciada por fenômenos de impedância.

MEDINDO R_B COM DIAGRAMA DE FASE

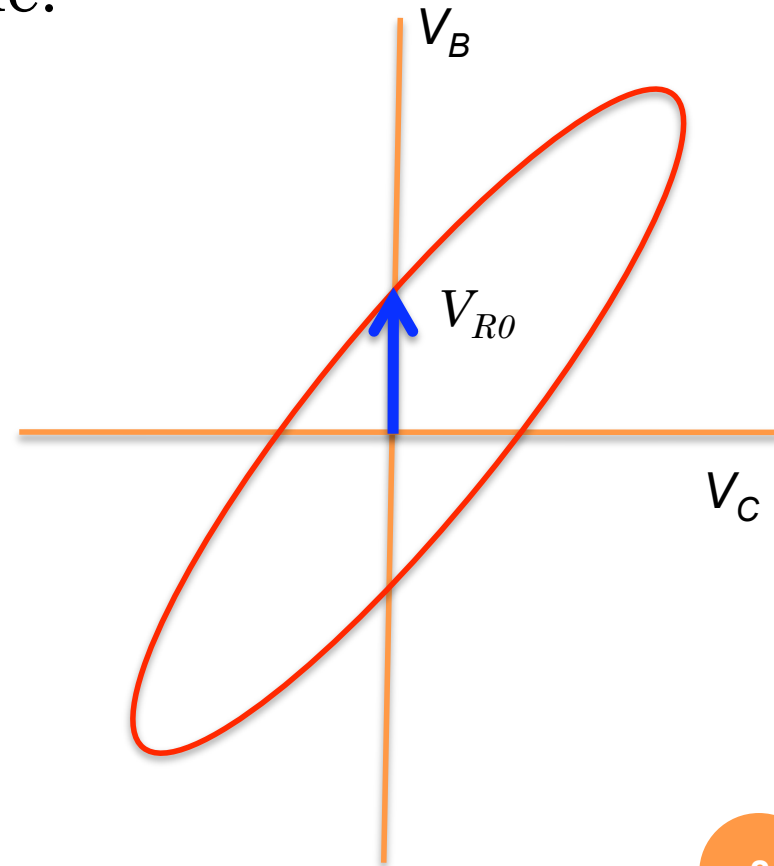
$$\begin{cases} V_R = Ri_0 \cos(\omega t) \\ V_L = \omega Li_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ V_C = \frac{i_0}{\omega C} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

- Na ressonância de corrente: $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- Neste caso, é fácil mostrar que:

$$V_L = -V_C$$

- Seja o diagrama ao lado:
- Quando $V_C = 0$, temos que V_L também é nulo, assim, a tensão medida na bobina vale:

$$V_B = V_R = V_{R0} = Ri_0$$



MEDINDO R_B COM DIAGRAMA DE FASE

- Quando a tensão no capacitor é máxima, temos que a tensão na bobina é puramente indutiva, ou seja $V_R = 0$. Neste caso:

$$V_B = V_L$$

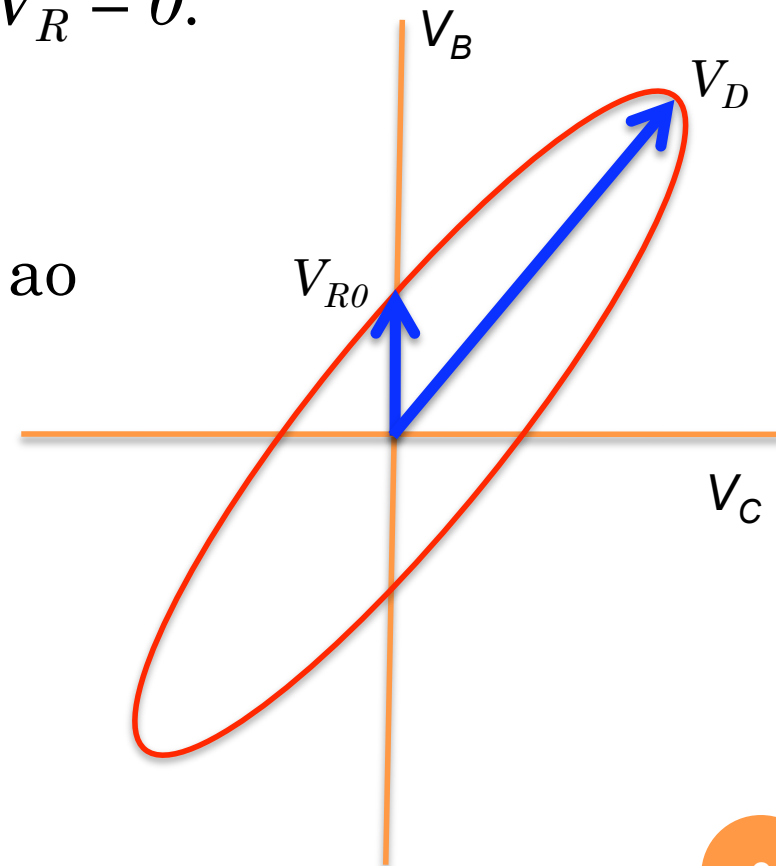
- Ou seja, a diagonal da figura ao lado vale:

$$V_D = \sqrt{V_{L0}^2 + V_{C0}^2}$$

- Na ressonância em corrente:

$$V_D = i_0 \sqrt{2 \frac{L}{C}}$$

$$\begin{cases} V_R = Ri_0 \cos(\omega t) \\ V_L = \omega Li_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ V_C = \frac{i_0}{\omega C} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$



MEDINDO R_B COM DIAGRAMA DE FASE

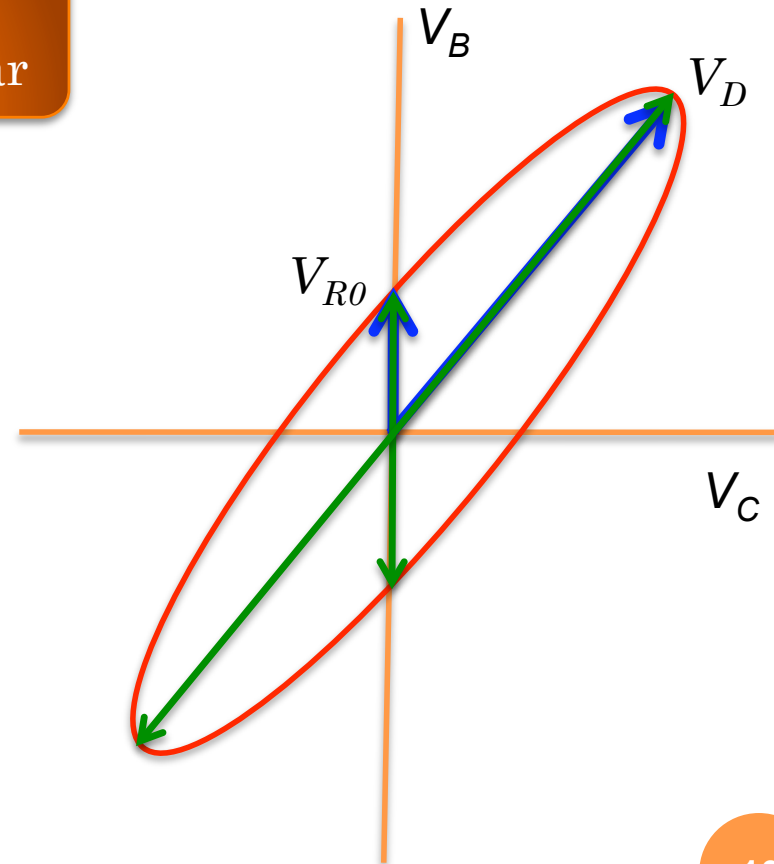
$$\begin{cases} V_R = Ri_0 \cos(\omega t) \\ V_L = \omega Li_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ V_C = \frac{i_0}{\omega C} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

- Fazendo a razão de um pelo outro:

Sei medir $\frac{V_{R0}}{V_D} = \frac{R}{\sqrt{2\frac{L}{C}}}$ Sei calcular

- Ou, experimentalmente mais simples:

$$\frac{2V_{R0}}{2V_D} = \frac{R}{\sqrt{2\frac{L}{C}}}$$



MOTIVAÇÃO

- Será que a introdução de efeitos não lineares no RLC mudará o comportamento observado?
- Existe algum fenômeno físico interessante e novo que pode ser explorado?
- Resposta: SIM!
 - Nas próximas semanas estudaremos o que acontece se trocarmos o capacitor do circuito por um diodo
 - Diodo → capacitor não linear
 - A dinâmica muda totalmente → Caos

O QUE É CAOS?

- Quais são os dois extremos para a dinâmica (evolução temporal) de um sistema físico?
 - Sistemas bem comportados ou lineares
 - Sistemas totalmente aleatórios (probabilísticos)
- Há algo intermediário?

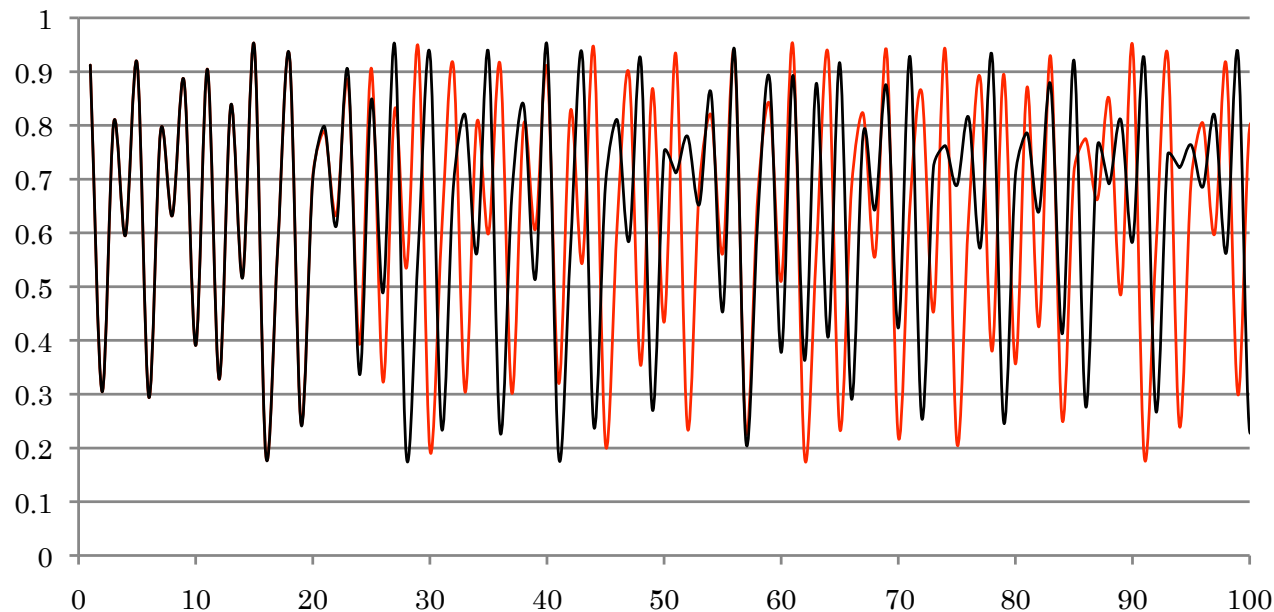
Sistema massa-mola
Queda livre no vácuo
Pêndulo simples
Circuito RLC comum

Cara ou coroa
Movimento browniano
Decaimento radioativo
Transições nucleares

Clima
Turbulências
Crescimento populacional
Pêndulo duplo

O QUE É CAOS?

- São sistemas determinísticos (não probabilísticos), ou seja, as equações que descrevem a evolução são bem determinadas.
- A evolução temporal é muito dependente das condições iniciais
- As trajetórias são muito irregulares
- Sistemas caóticos são previsíveis a curto prazo

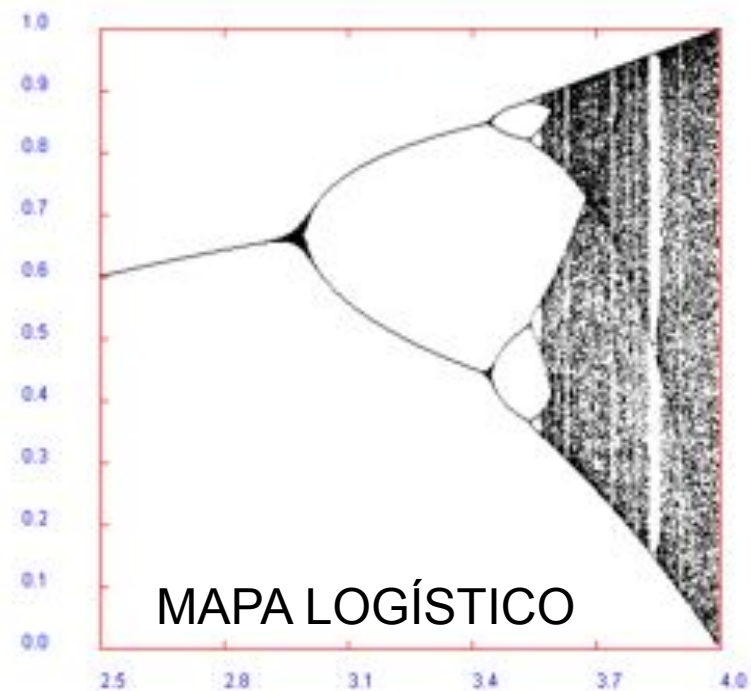
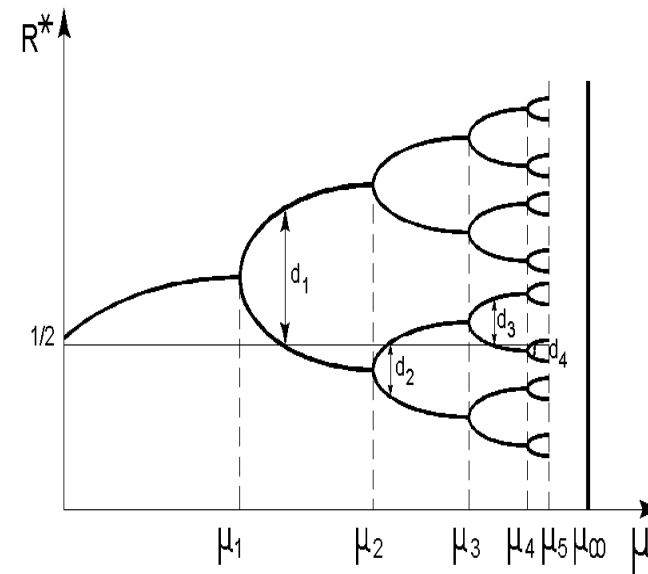


COMO SE CHEGA AO CAOS?

- Bifurcações de período
 - Rota mais comum para o caos (**cenário de Feigenbaum**)
 - Duplicação dos atratores

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\mu_n - \mu_{n-1})}{(\mu_{n+1} - \mu_n)} = \delta$$

$$\delta = 4,6692016091029909....$$



ALGUNS RESULTADOS

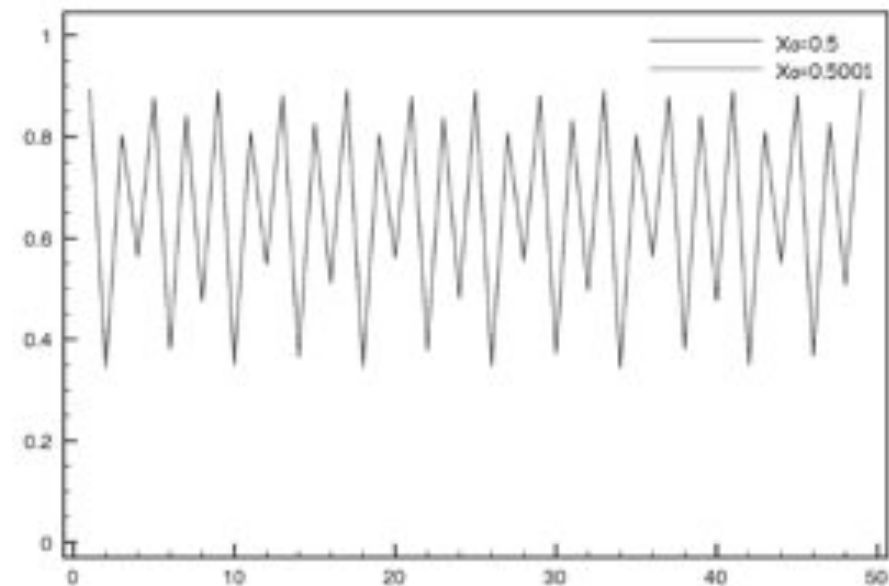
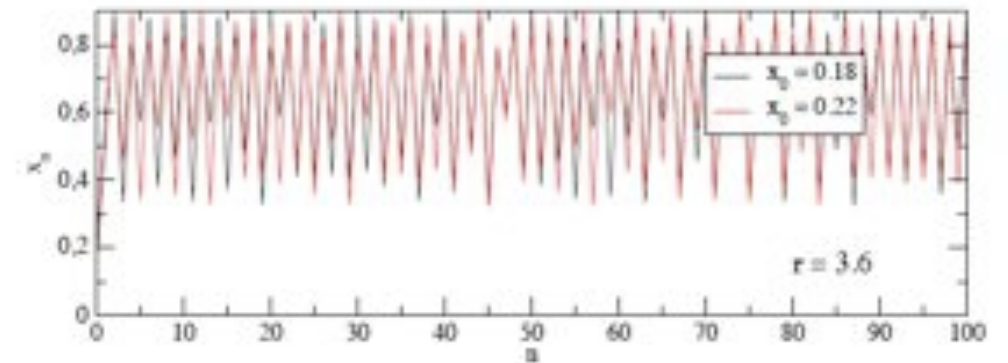
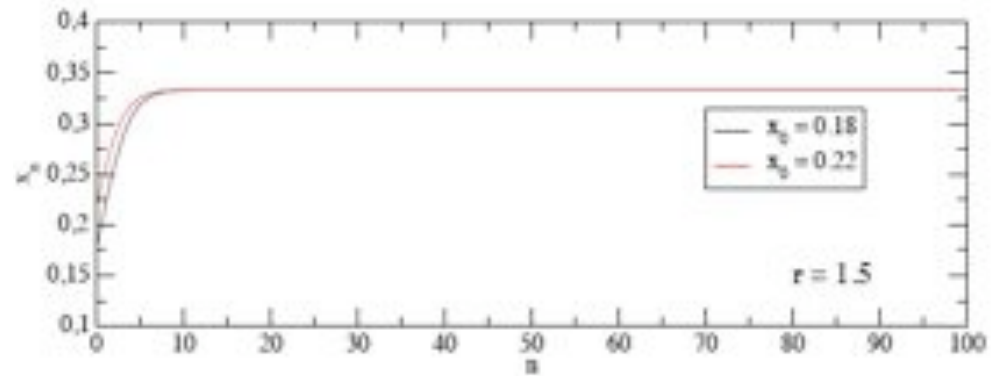
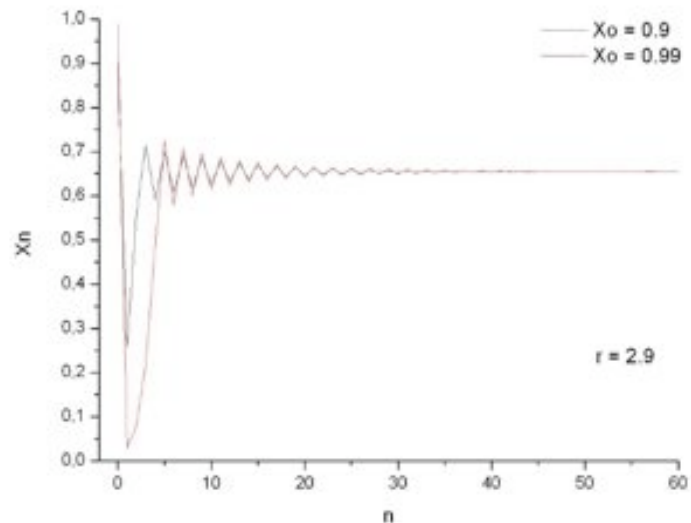
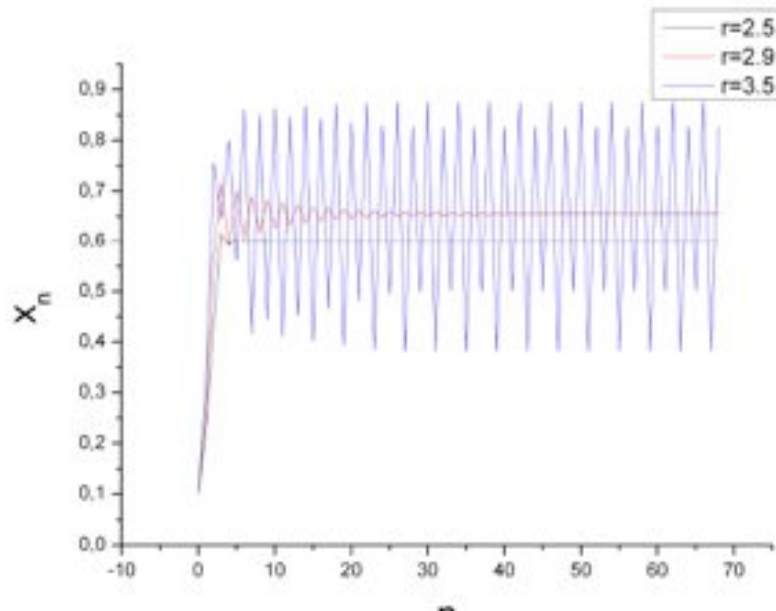


Gráfico 4: 50 primeiras iterações para $r=3.57$

ALGUNS RESULTADOS

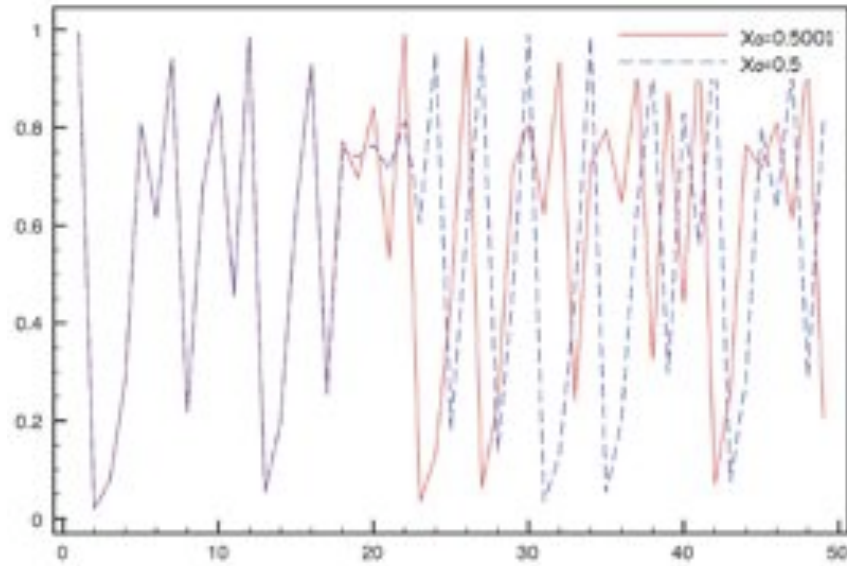
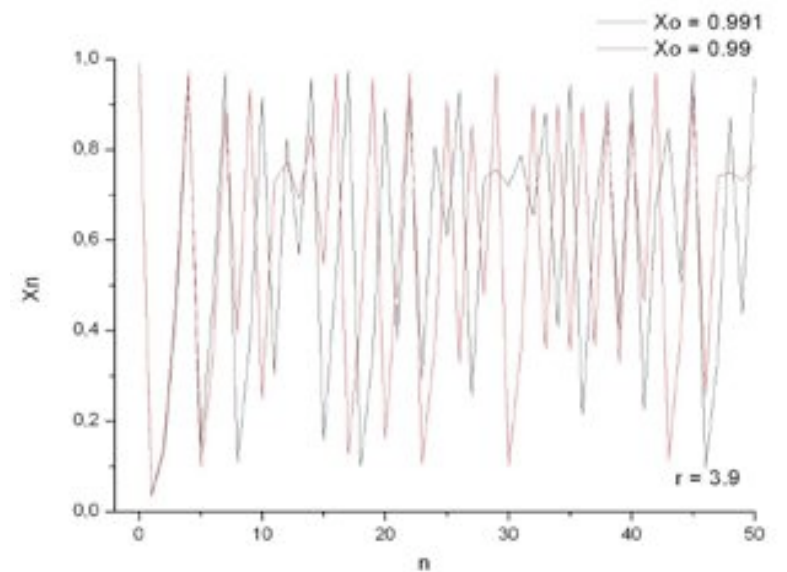
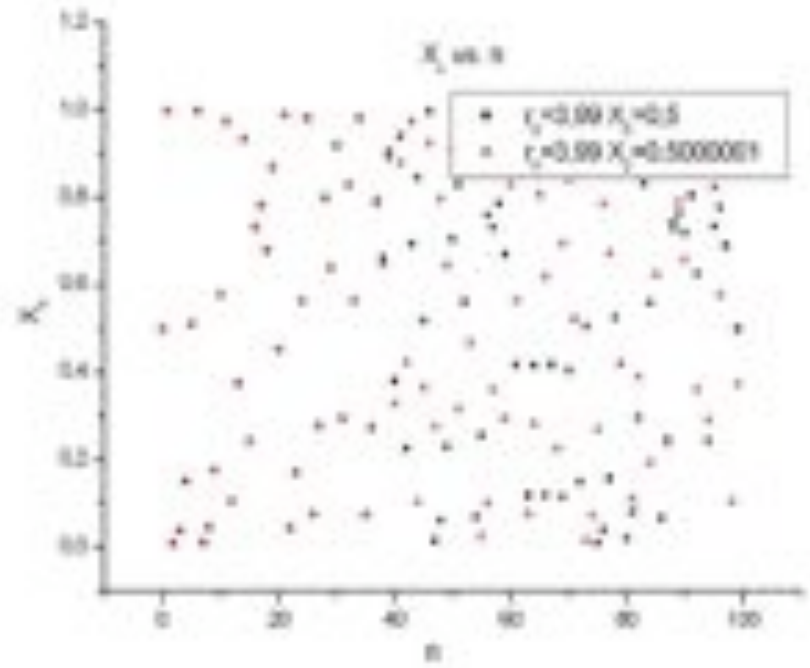
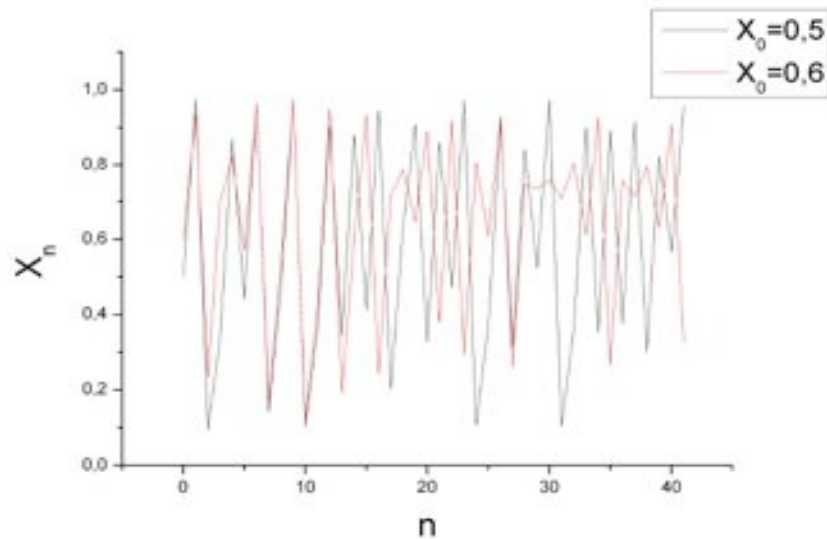
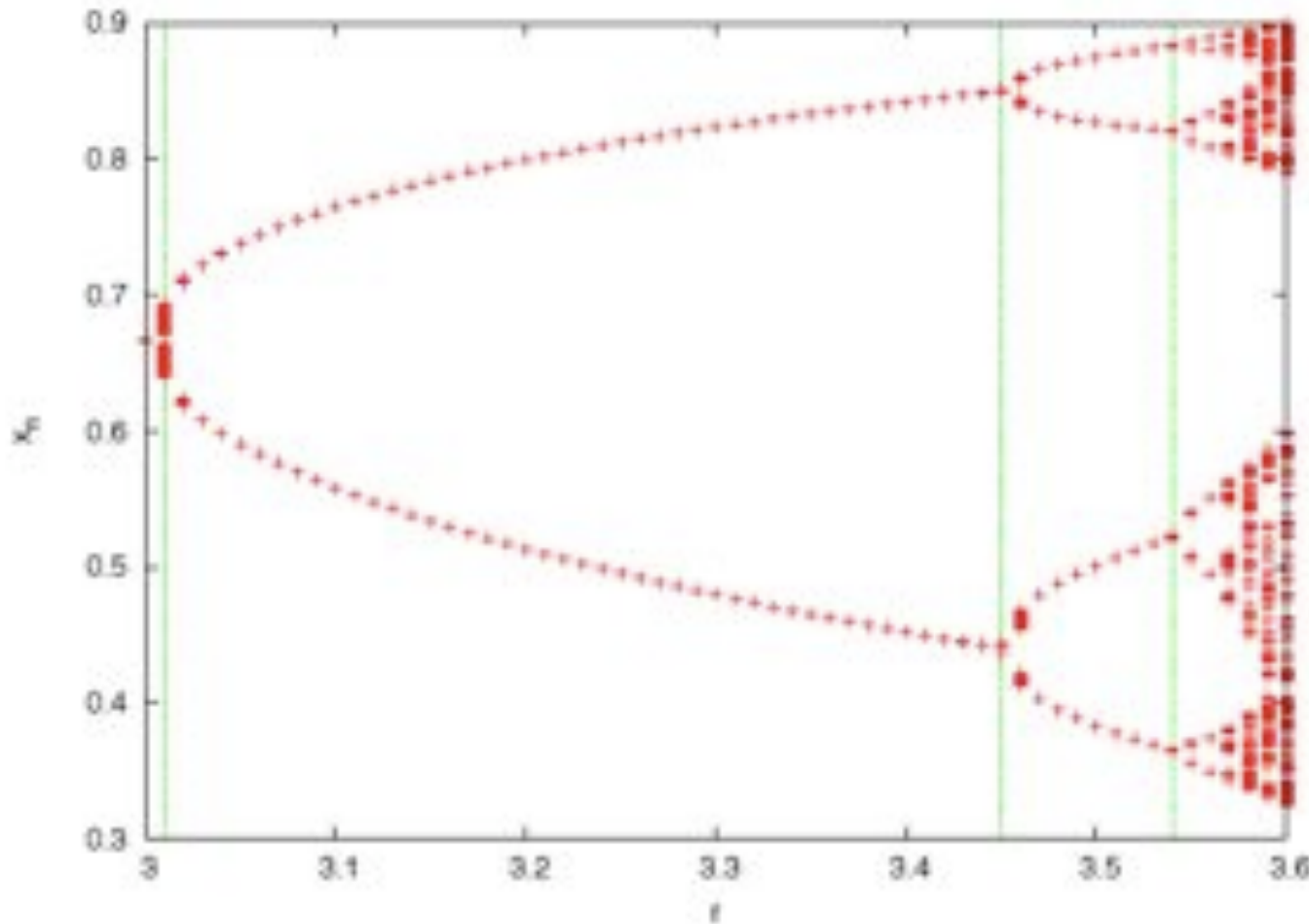


Gráfico 4: 50 primeiras iterações para $r=3.98$



ALGUNS RESULTADOS

Poucos calcularam o diagrama De bifurcções e no. Feigenbaum



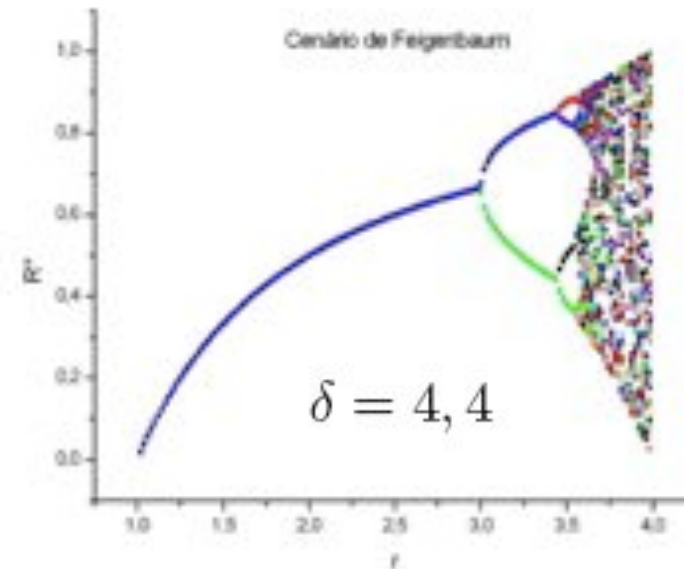
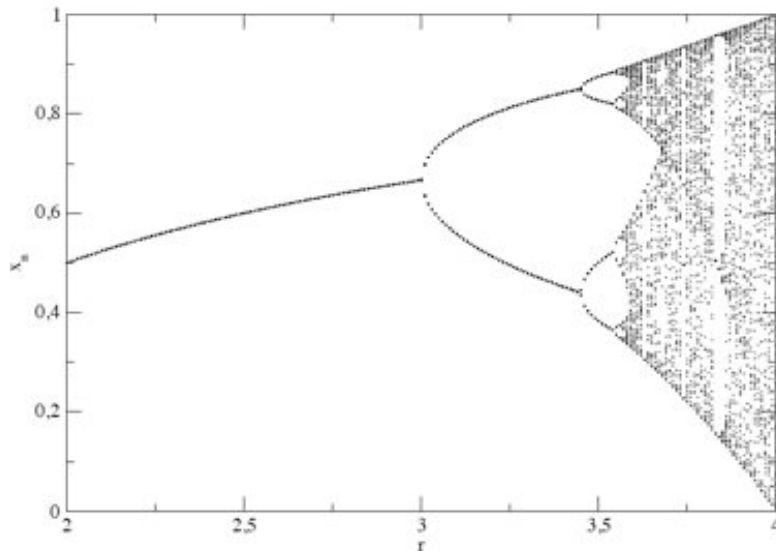
As primeiras bifurcações ocorrem em $r = 3,01$, $r = 3,45$ e $r = 3,54$, o que nos dá um número de Feigenbaum de $\delta = 4,89(54)$, que é compatível com o valor esperado.

ALGUNS RESULTADOS

Poucos calcularam o diagrama De bifurcções e no. Feigenbaum

De acordo com o gráfico, x_n começa a oscilar entre 2 valores a partir de $r = 3,00$, e entre 4 em $r = 3,45$, parando em $r = 3,54$. Desta forma, uma estimativa para δ seria:

$$\delta_{est} = \frac{3,45 - 3}{3,54 - 3,45} = 5 \tag{2}$$

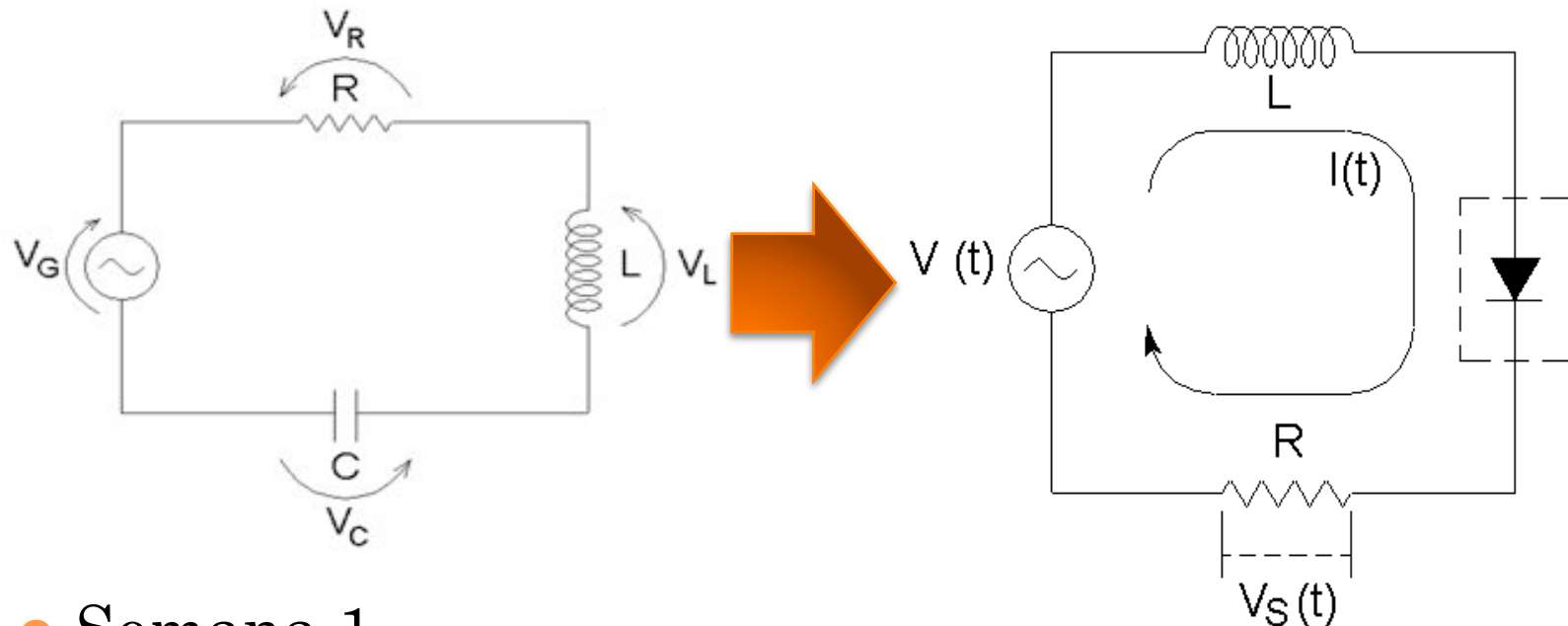


Bifurcação de período

μ_1	2,98
μ_2	3,42
μ_3	3,52

OBJETIVOS DA SEMANA

- Estudar o circuito RLD (ou RLC não linear)



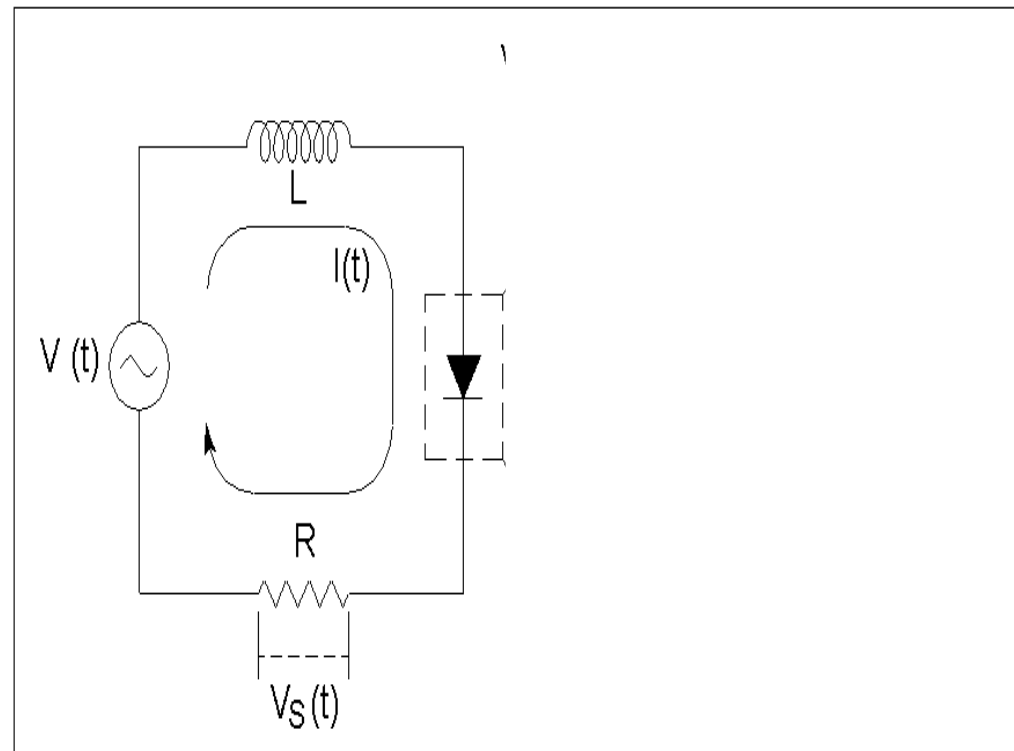
- Semana 1
 - Métodos de análise (experimental) e teoria de caos
- Semana 2
 - Medidas experimentais com RLD

O CIRCUITO UTILIZADO

- $R = 10 \Omega$
- $L = 1 \text{ mH}$
- Diodo = 1N4007
 - Curvas características

$$i_D(V_D) = i_{D0} \left[e^{\frac{eV_D}{kT}} - 1 \right]$$

- Não linearidade

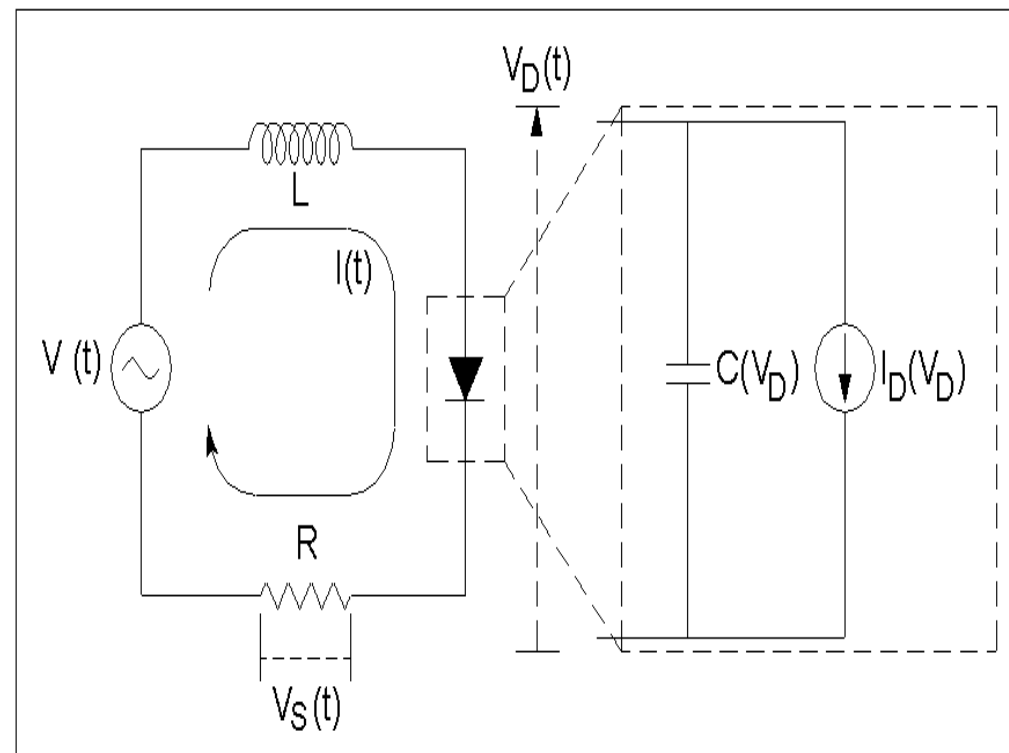


O CIRCUITO UTILIZADO

- O diodo pode ser entendido como um capacitor não linear

$$C(V_D) = C_0 e^{\frac{eV_D}{kT}} \quad \text{para } V_D > 0$$

$$C(V_D) = \frac{C_0}{\sqrt{1 - \frac{eV_D}{kT}}} \quad \text{para } V_D \leq 0$$



O DIODO

- Capacitância do diodo depende da tensão sobre ele

$$C(V_D) = C_0 e^{\frac{eV_D}{kT}} \quad \text{para } V_D > 0$$
$$C(V_D) = \frac{C_0}{\sqrt{1 - \frac{eV_D}{kT}}} \quad \text{para } V_D \leq 0$$

- Para baixas tensões, $\frac{eV_D}{kT} \ll 1$ a capacitância vale $C(V_D) \sim C_0$, ou seja, o diodo se comporta como um capacitor ideal



O DIODO

- Capacitância do diodo depende da tensão sobre ele

$$C(V_D) = C_0 e^{\frac{eV_D}{kT}} \quad \text{para } V_D > 0$$
$$C(V_D) = \frac{C_0}{\sqrt{1 - \frac{eV_D}{kT}}} \quad \text{para } V_D \leq 0$$

- Para tensões mais elevadas, a capacitância depende fortemente da tensão sobre o diodo e a capacitância deixa de ser constante



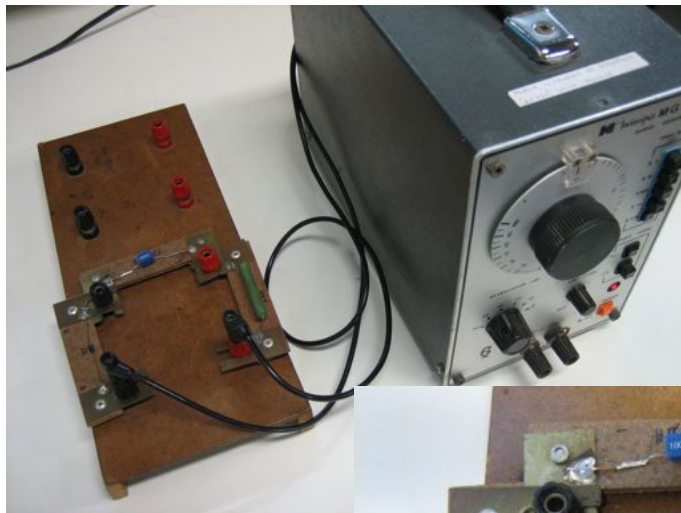
O DIODO E OBJETIVOS DA SEMANA

- Ou seja
 - Para baixas tensões, o circuito deve se comportar como um RLC padrão, como o estudado na primeira aula
 - Para tensões mais elevadas, o circuito apresenta comportamento não linear, podendo ser caótico em determinadas circunstâncias
- Vamos estudar o circuito acima no limite de tensões mais elevadas
 - $V_G \sim 3-4 \text{ V}$
 - Estudar o diagrama de bifurcações deste circuito



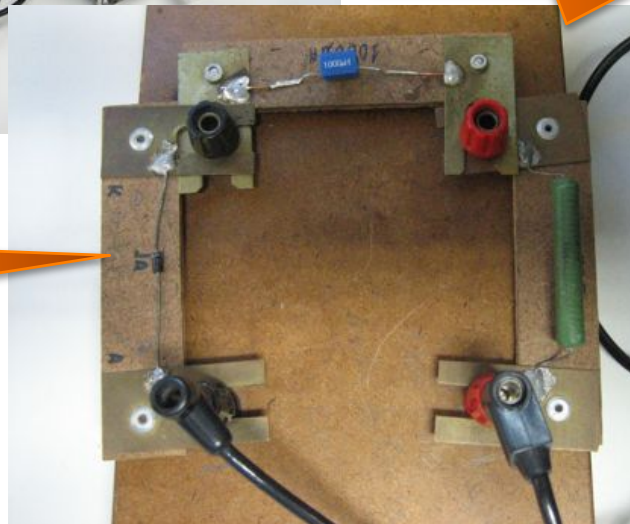
PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

- Montar o circuito RLD
 - Usar o indutor azul de indutância nominal $1000 \mu\text{H}$.
 - Usar $R = 10 \Omega$.
 - No lugar do capacitor, utilizar o diodo



INDUTOR

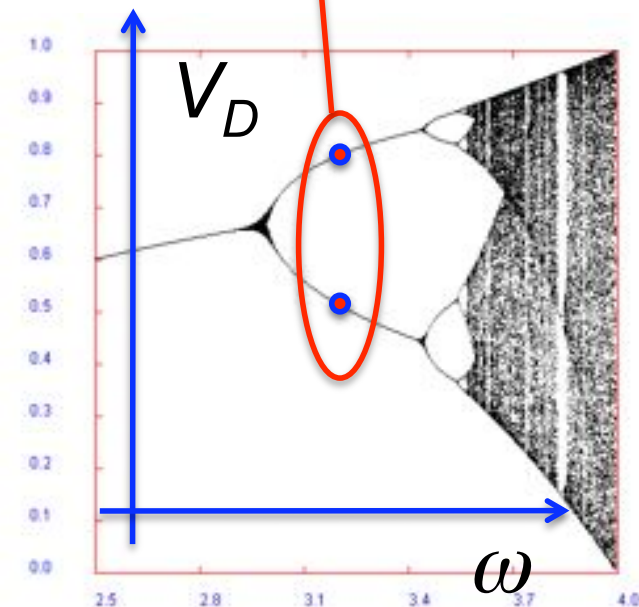
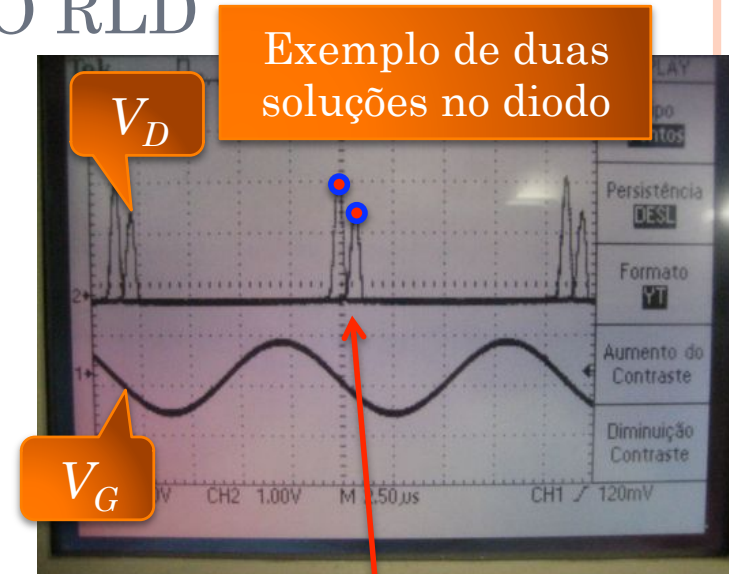
DIODO



PROCEDIMENTO E ATIVIDADES DA SEMANA

ESTUDO DE CAOS NO CIRCUITO RLD

- Aumentar a tensão do gerador para aproximadamente 70% do máximo
 - O diodo deixa de se comportar como capacitor ideal e pode haver caos
- Medir o diagrama de bifurcação do circuito
 - Gráfico de V_D em função da frequência no gerador. Começar próximo de 40 kHz
 - Tomar cuidado de medir vários pontos, principalmente quando estiver próximo de uma bifurcação.
 - Com cuidado, em alguns casos, podemos ir até 8 bifurcações
 - Determinar o número de Feigenbaum



PROCEDIMENTO E ATIVIDADES DA SEMANA

ESTUDO DE CAOS NO CIRCUITO RLD

- Levantar o diagrama de fase do circuito para algumas frequências interessantes
 - O diagrama de fase corresponde ao gráfico de V_D vs V_G .
 - Modo X-Y no osciloscópio
 - Fazer o diagrama para várias frequências com, pelo menos, os seguintes casos:
 - Não há bifurcações (1 solução para o diodo)
 - Uma bifurcação (2 soluções para o diodo)
 - Duas bifurcações (4 soluções para o diodo)
 - Caos
 - O diagrama pode ser obtido fotografando a tela do osciloscópio
 - Discutir os diagramas obtidos
- Alguns grupos já fizeram este estudo na semana passada (era a atividade opcional)

MUDANDO DE X-T PARA X-Y

- Clicar o botão DISPLAY do osciloscópio
- Selecionar FORMATO no menu de tela

