



FÍSICA EXPERIMENTAL IV

AULA 3

[HTTP://WWW.IF.USP.BR/SUAIDE/](http://www.if.usp.br/suaide/)

Alexandre Suaide

Ed. Oscar Sala

sala 246

ramal 7072

SÉRIES DE FOURIER

- Hoje em dia, usamos formalismos mais abrangentes

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnx}$$

- Com:
$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-jnx} dx$$

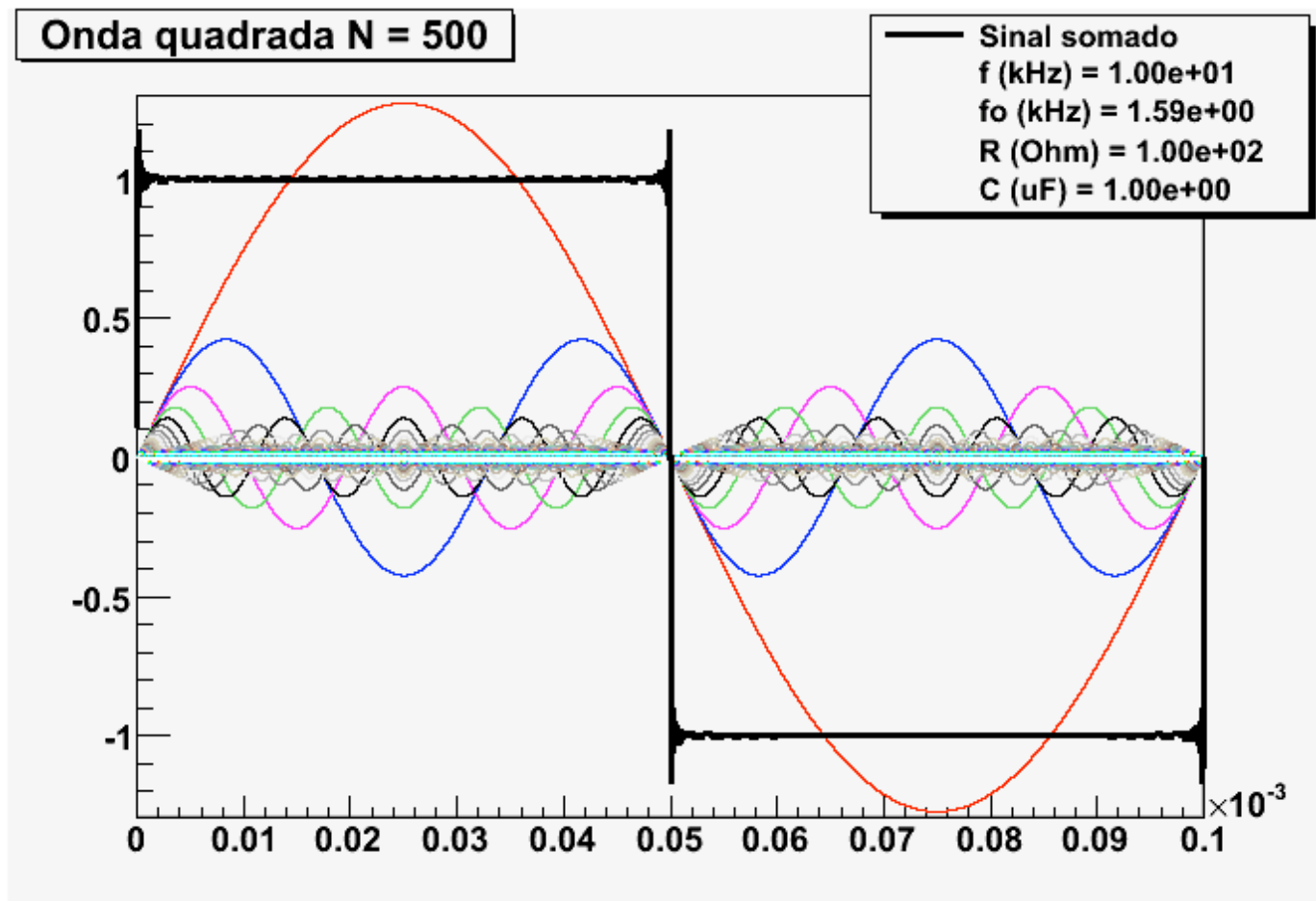
- As constantes a_n e b_n da expressão tradicional podem ser obtidas como:

$$a_n = c_n + c_{-n}, \text{ com } n = 0, 1, 2, \dots$$

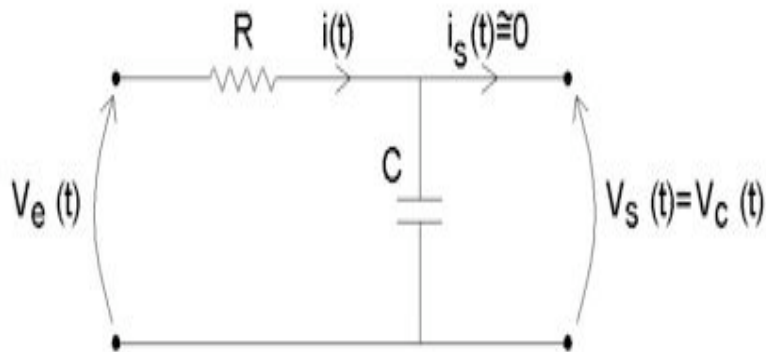
$$b_n = j(c_n - c_{-n}), \text{ com } n = 0, 1, 2, \dots$$

EXEMPLO: ONDA QUADRADA

$$V(t) = V_0 \left[\frac{4}{\pi} \sin(\omega t) + \frac{4}{3\pi} \sin(3\omega t) + \frac{4}{5\pi} \sin(5\omega t) + \dots \right]$$

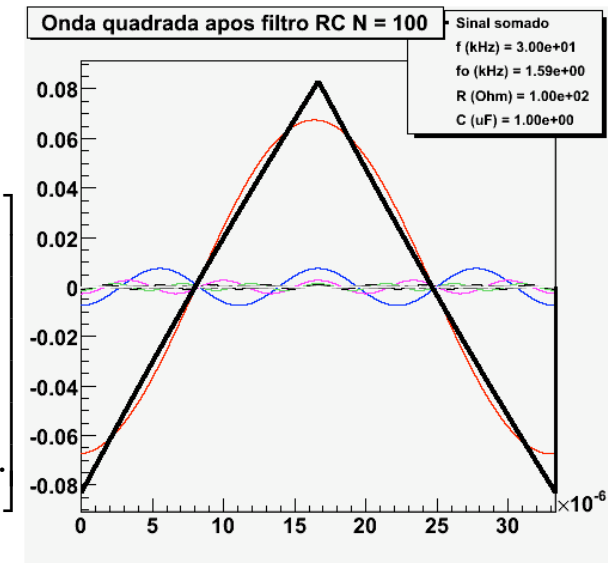
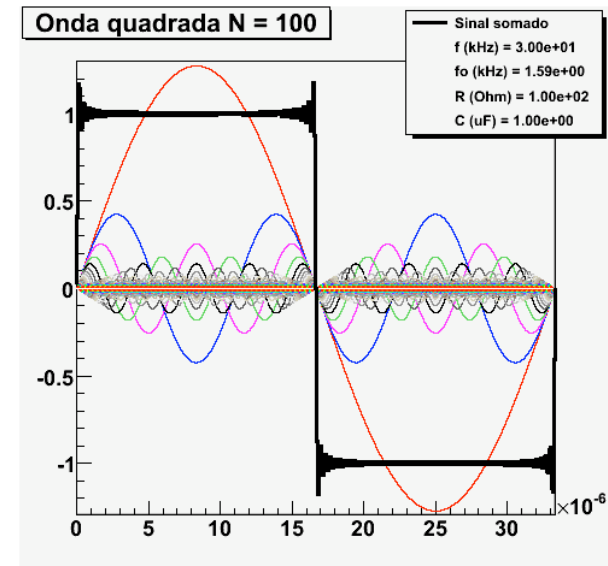


O QUE FIZEMOS ATÉ O MOMENTO? FILTRO RC



$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \quad \phi(\omega) = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

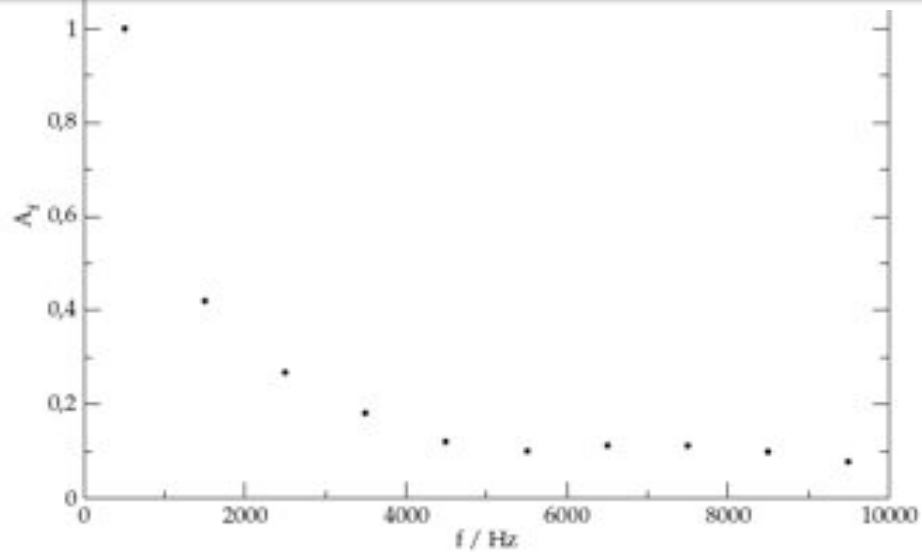
$$V_e = V_0 \begin{bmatrix} \frac{4}{\pi} \sin(\omega t) + \\ \frac{4}{3\pi} \sin(3\omega t) + \\ \frac{4}{5\pi} \sin(5\omega t) + \dots \end{bmatrix} \xrightarrow{G, \phi} V_s = V_0 \begin{bmatrix} G_\omega \cdot \frac{4}{\pi} \sin(\omega t + \phi_\omega) + \\ G_{3\omega} \cdot \frac{4}{3\pi} \sin(3\omega t + \phi_{3\omega}) + \\ G_{5\omega} \cdot \frac{4}{5\pi} \sin(5\omega t + \phi_{5\omega}) + \dots \end{bmatrix}$$



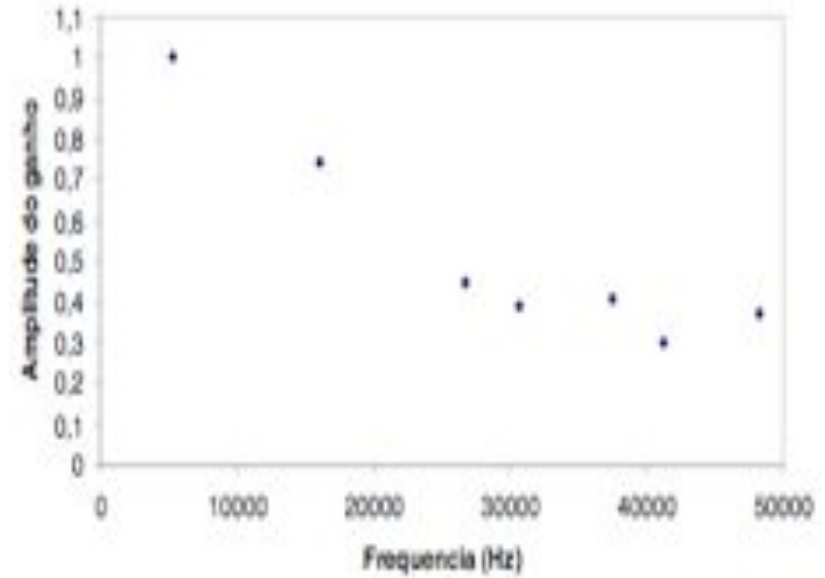
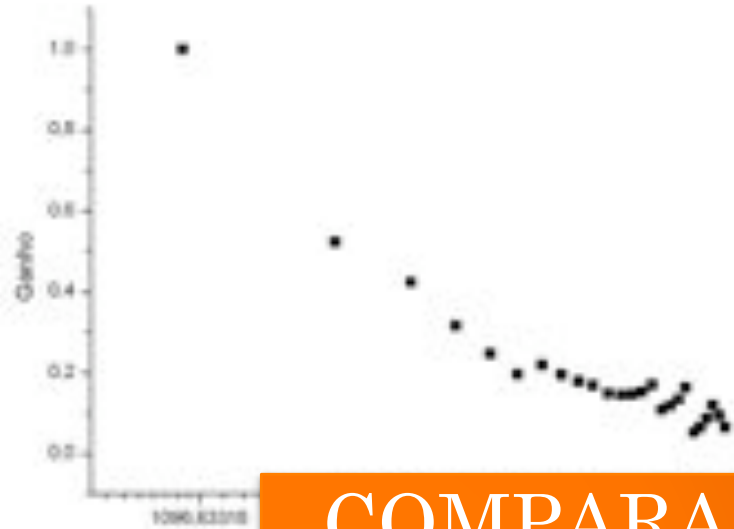
FFT DO SINAL DE ENTRADA



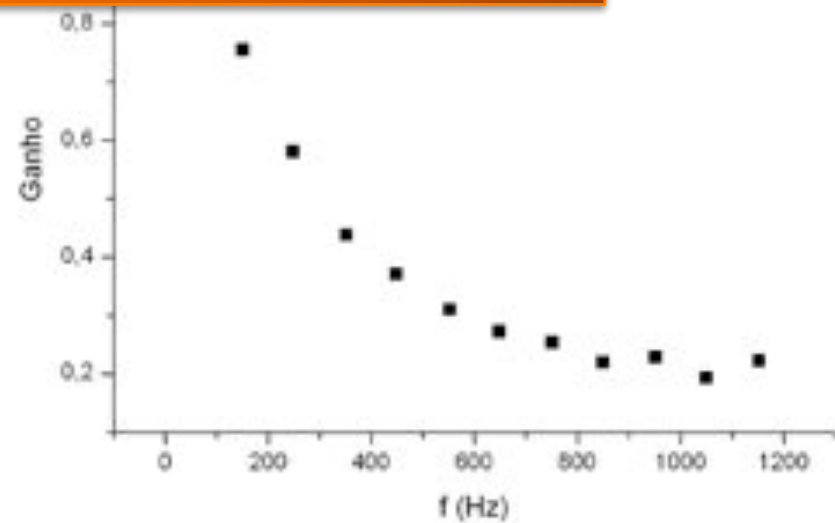
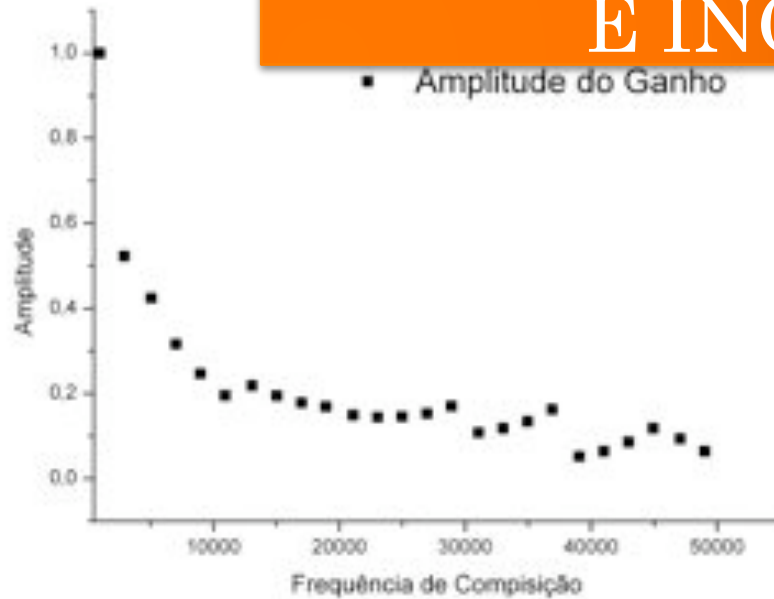
COMPARAÇÃO COM TEORIA
INCERTEZAS E ESCALA



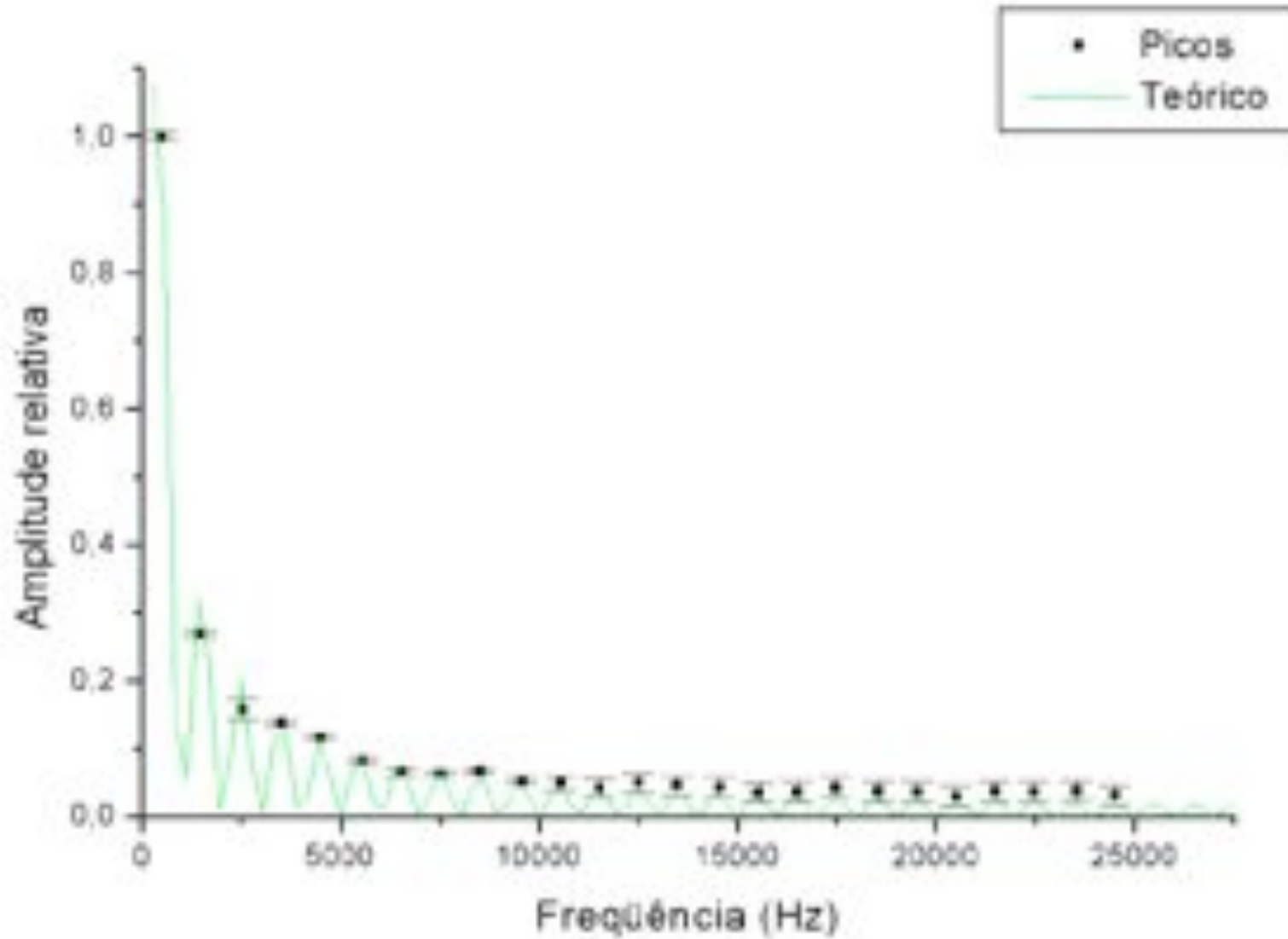
GANHOS DO FILTRO RC



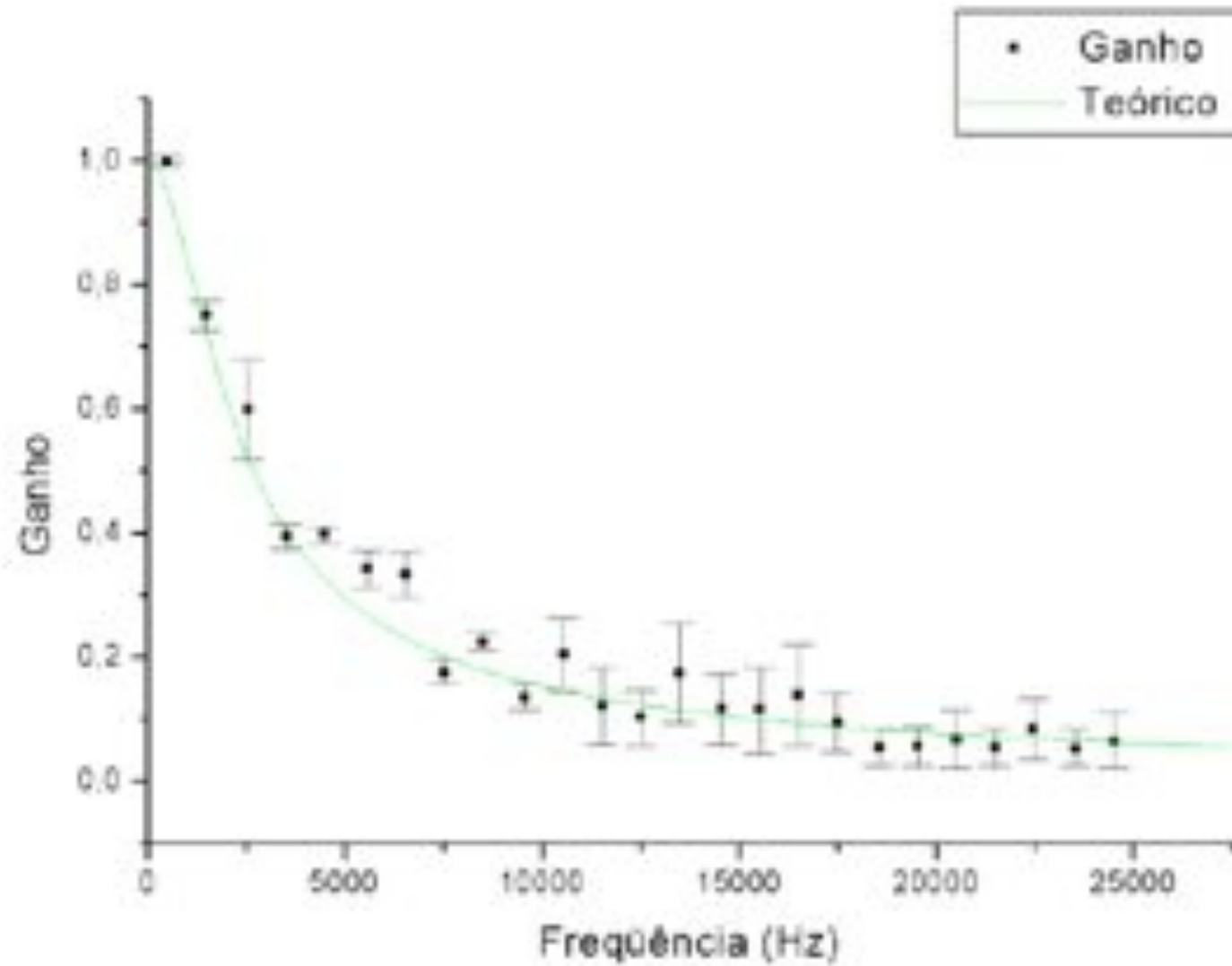
COMPARAÇÃO COM TEORIA E INCERTEZAS



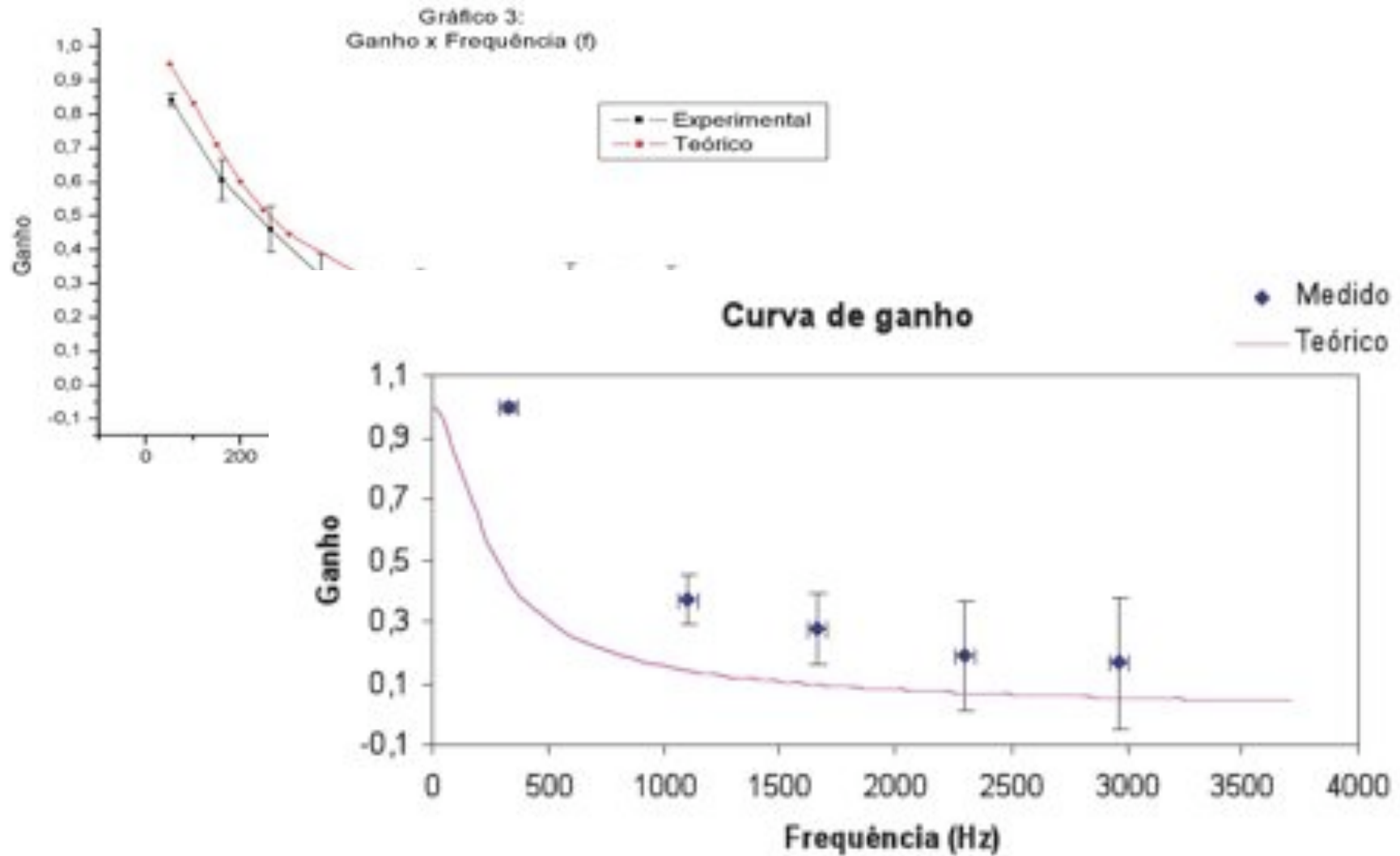
QUANDO SE COMPARA COM PREVISÃO...



QUANDO SE COMPARA COM PREVISÃO...



... COISAS INTERESSANTES PODEM SURGIR

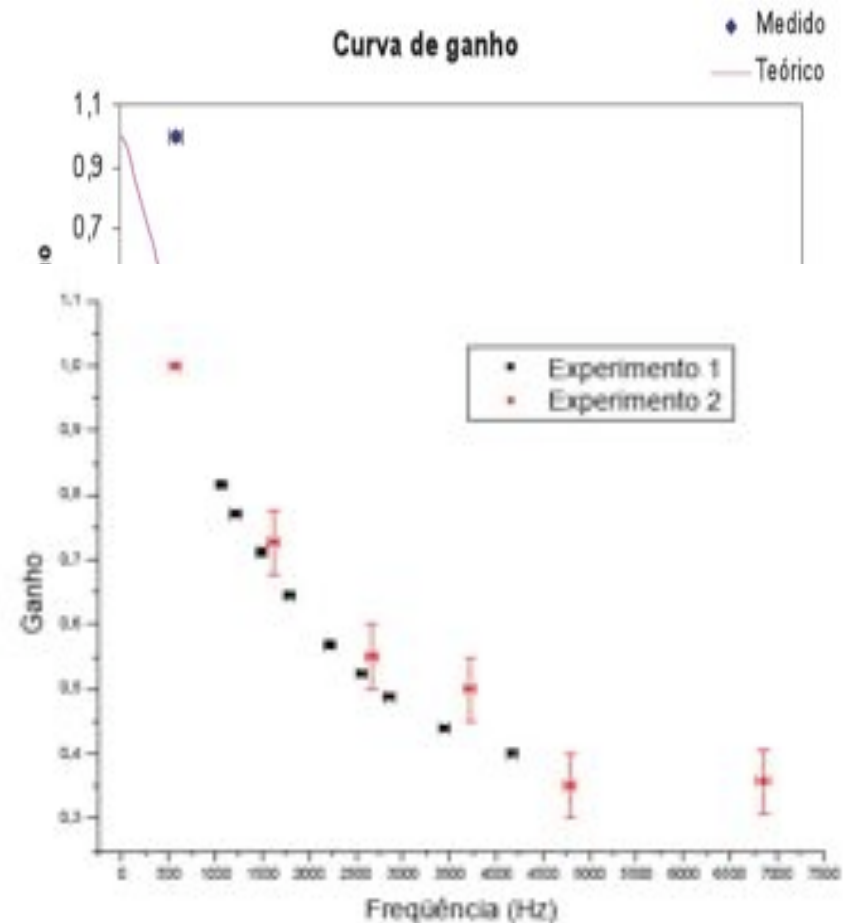


QUAL É O PROBLEMA?

- O DataStudio fornece amplitude da FFT relativa
 - Normaliza para 1 o maior valor de amplitude da FFT
- Não seria problema se a frequência básica fosse muito menor que a de corte
 - Pois esperamos que o ganho seja 1 nesta região
- Mas o que fazer quando a frequência básica é maior ou próxima a de corte?
 - Artificialmente o ganho deste ponto será 1, causando deslocamento da curva de ganho experimental.

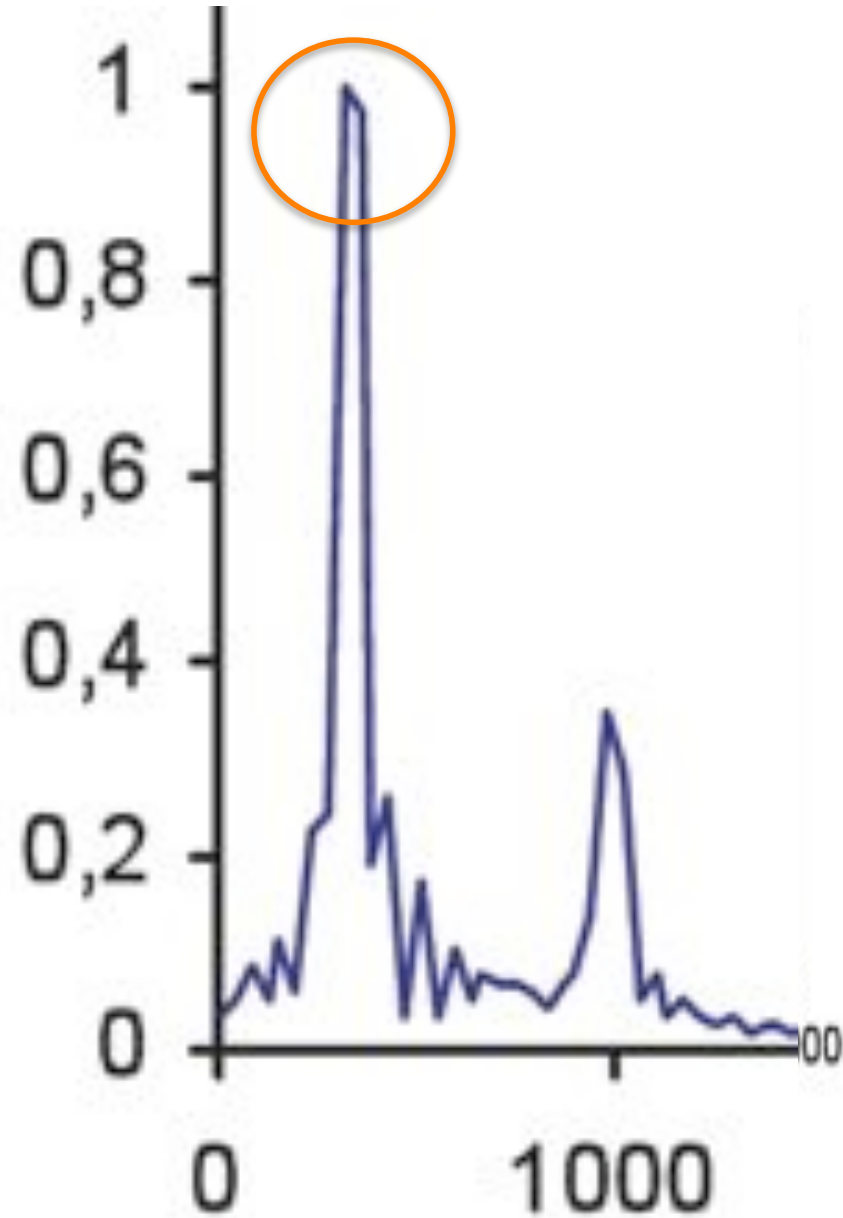
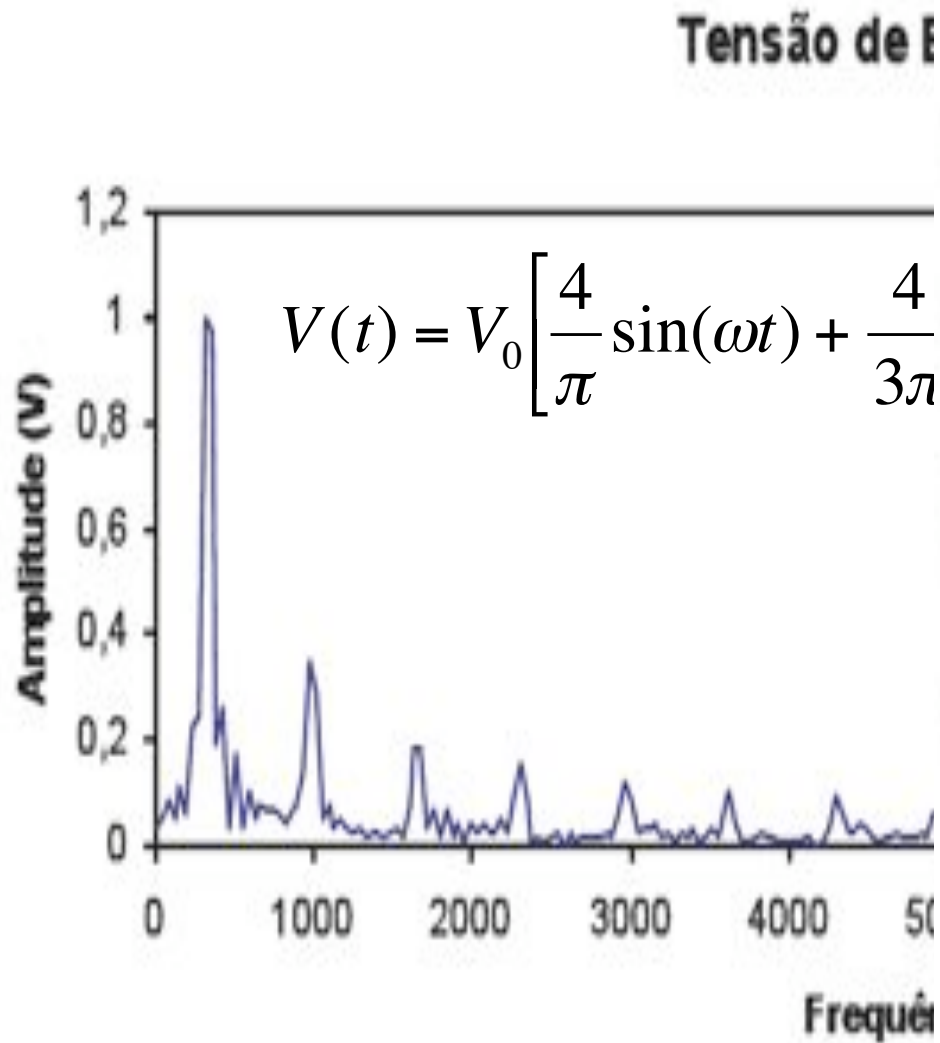
COMO RESOLVER O PROBLEMA?

- Retornar os dados?
 - Solução mais simples
- Normalizar pela razão das tensões de pico-a-pico da saída e entrada?
 - Aproximação que a primeira componente da transformada não tenha fatores extras
- Normalizar com a previsão teórica do ganho?
 - Depende do modelo estar certo
- Normalizar com tomadas de dados anteriores

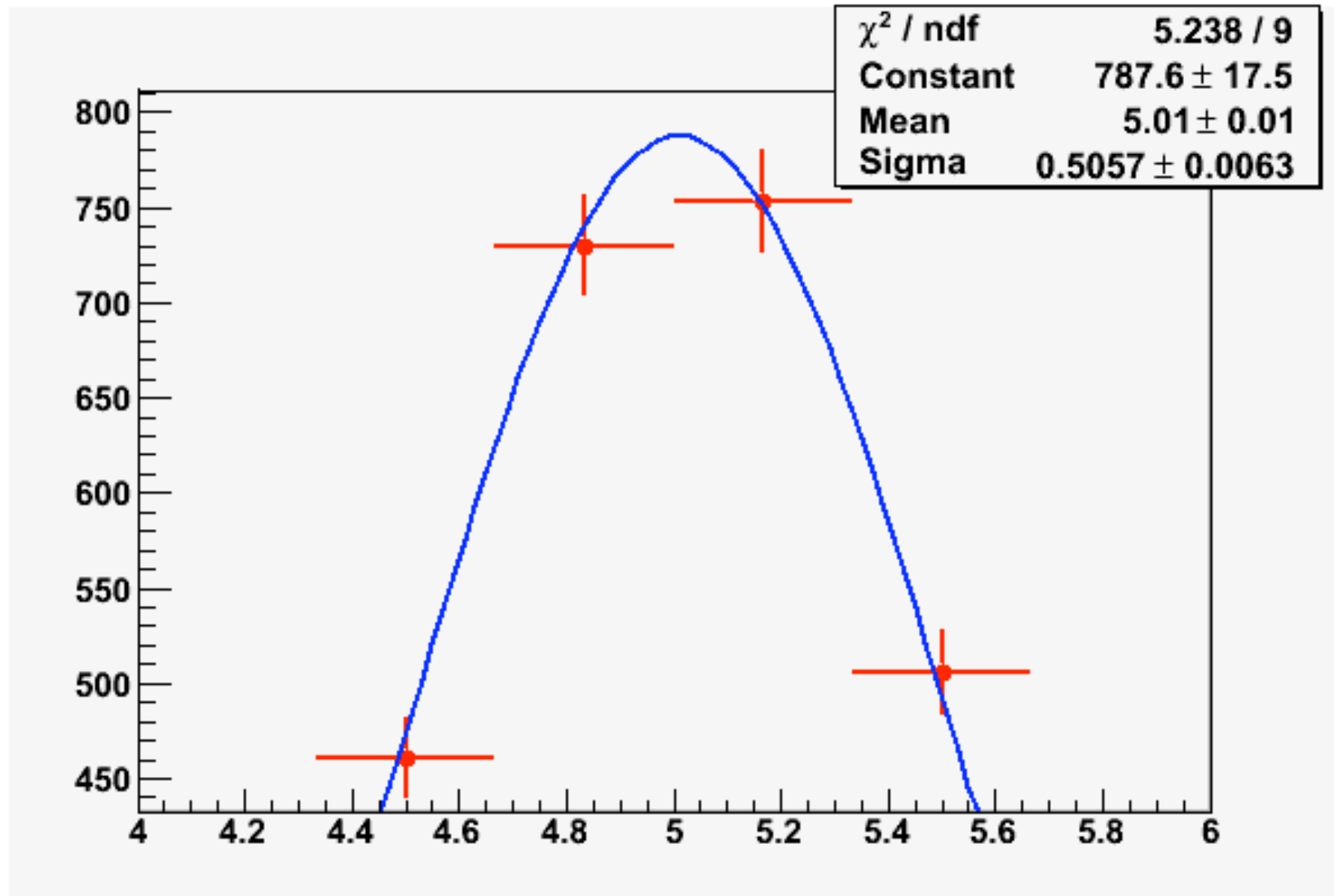


$$V(t) = V_0 \left[\frac{4}{\pi} \sin(\omega_c t) + \dots \right]$$

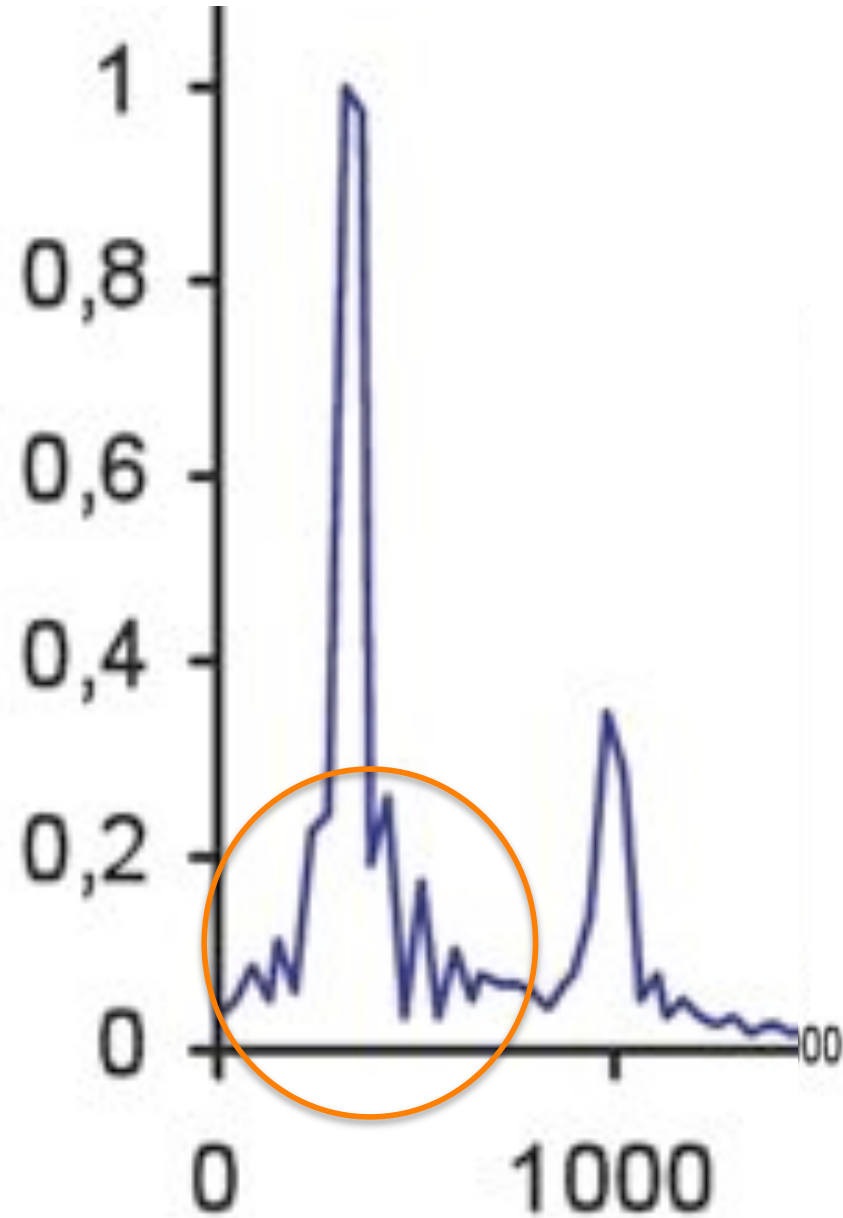
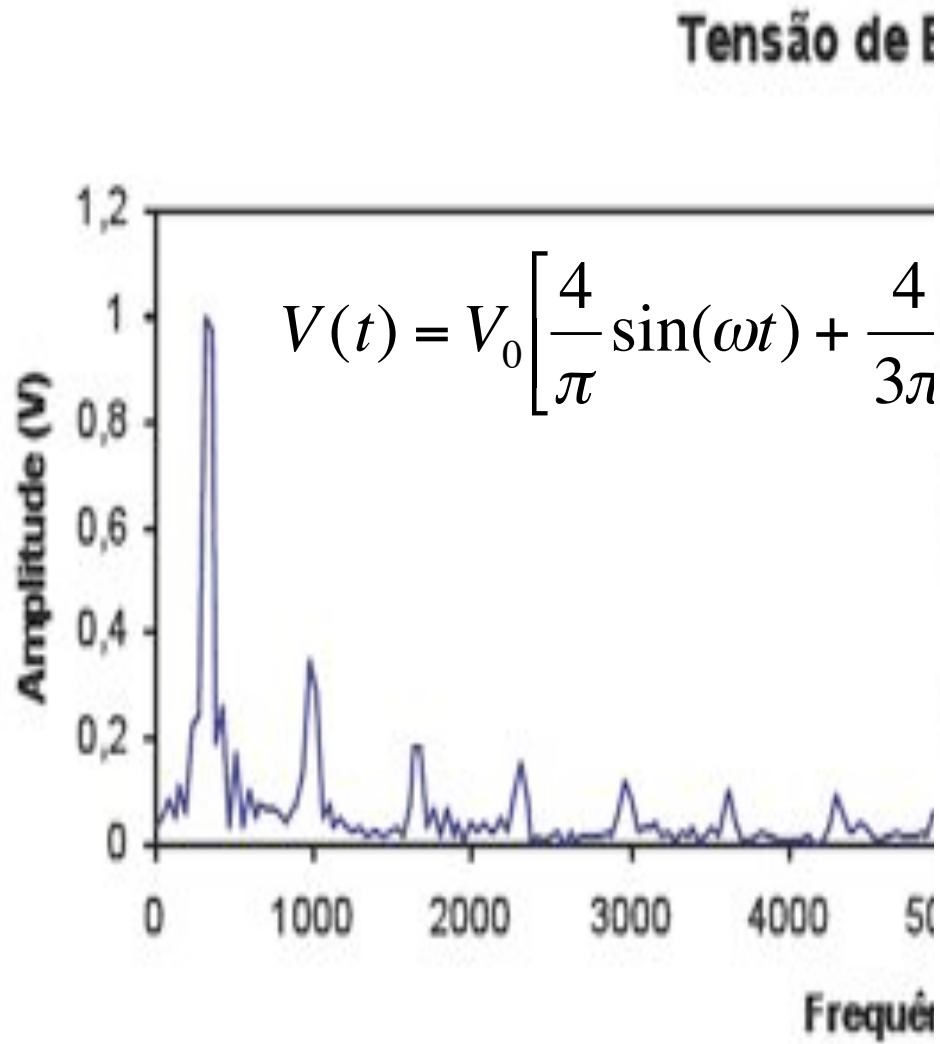
INDO ALÉM DO ÓBVIO



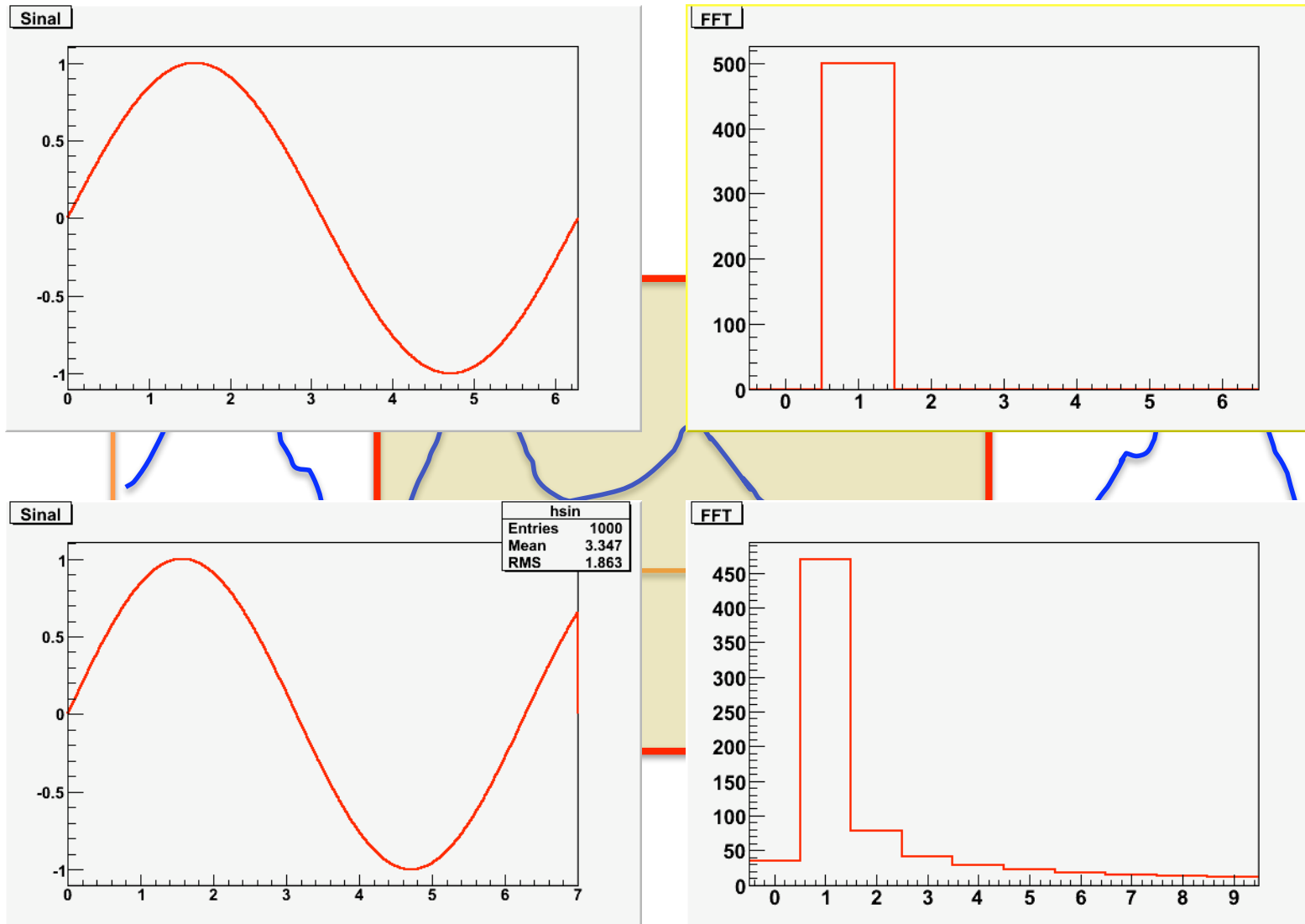
COMO MEDIR A POSIÇÃO DE UM PICO?



INDO ALÉM DO ÓBVIO

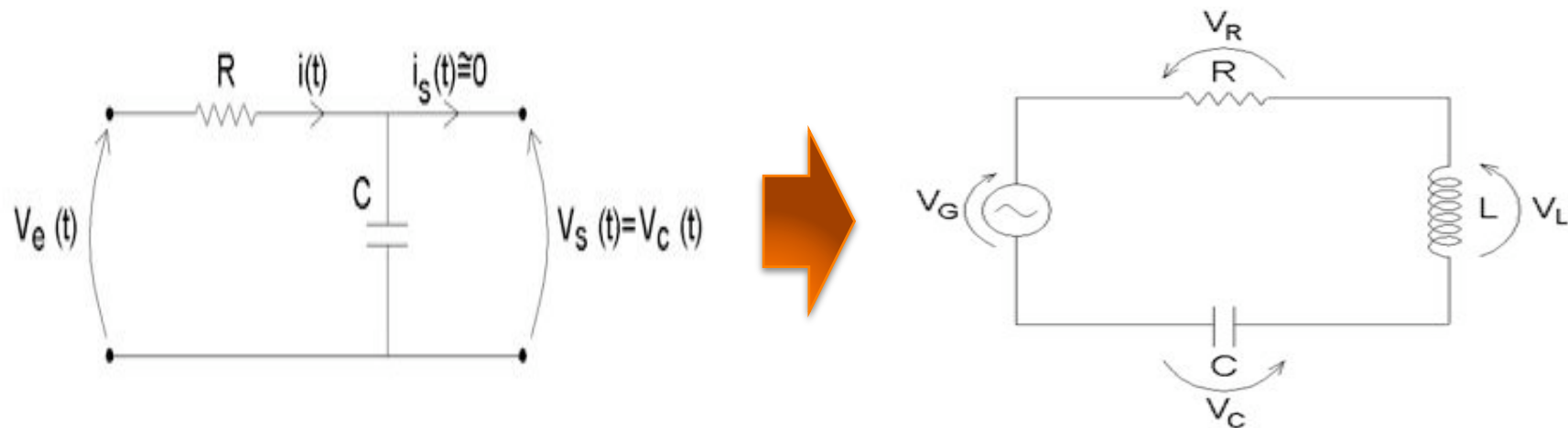


O IMPACTO DO INTERVALO DE AMOSTRAGEM



INCREMENTANDO O FILTRO RC \rightarrow RLC

- Adicionar um novo elemento \rightarrow indutor
 - O que ocorre com o ganho do circuito?
 - E se definimos o ganho como a tensão em outro elemento que não o capacitor?



O INDUTOR

- Lei de Faraday $\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt}$

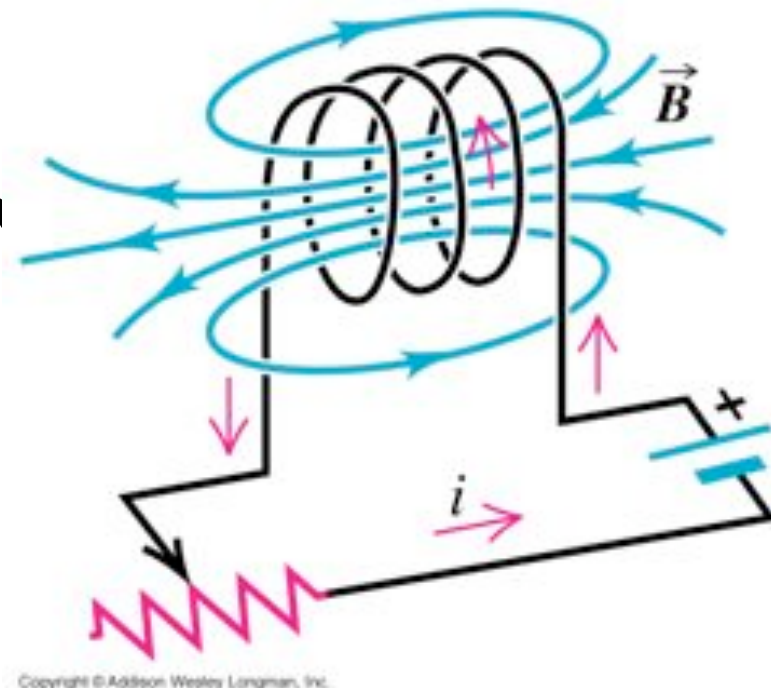
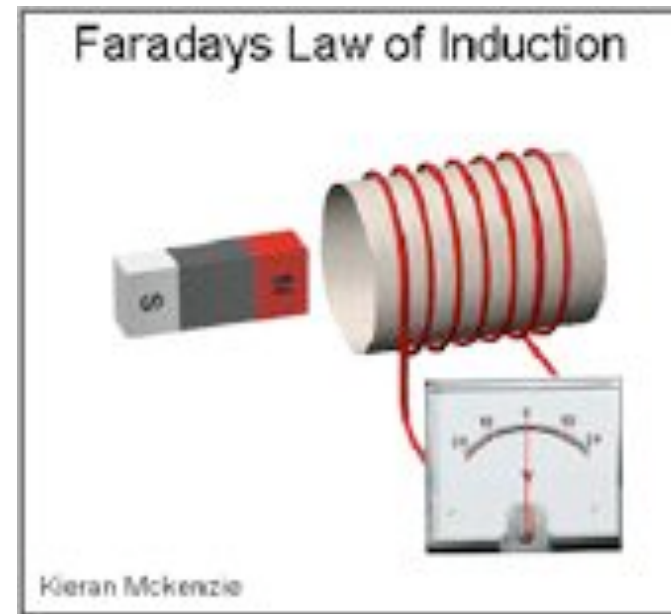
- Indutor

- Sistema de bobina

- Ao passar uma corrente, um campo magnético é criado, proporcional a esta corrente

$$B = f(i)$$

- Se a corrente for variável, campo também será

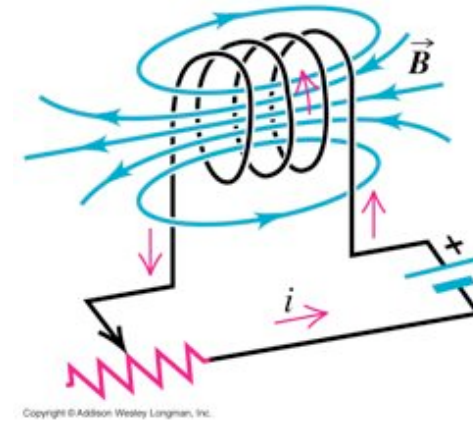


O INDUTOR

- Usando a Lei de Faraday

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

- Irá surgir, nos terminais do indutor, uma tensão elétrica proporcional à variação de fluxo magnético
 - Como a geometria (área) é constante, esta variação do fuxo é devida somente à variação de campo magnético (ou corrente)



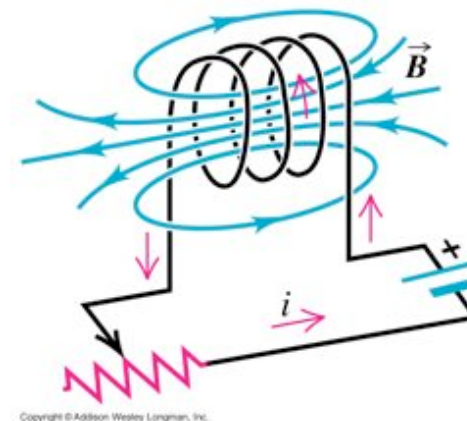
$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -A\frac{dB}{dt} = -Cte\frac{di}{dt}$$

O INDUTOR

- O indutor é um elemento elétrico que provoca uma queda de tensão no circuito dada por:

$$V_L = L \frac{di}{dt}$$

L é a indutância do elemento
([L] = H)



- Sendo a corrente que passa pelo indutor dada por:

$$\hat{i}_L = i_0 e^{j\omega t}$$

- A tensão elétrica no indutor será:

$$\hat{V}_L = L \frac{d\hat{i}}{dt} = j\omega L i_0 e^{j\omega t}$$

O INDUTOR

- A impedância pode ser calculada a partir de

$$\hat{Z}_L = \frac{\hat{V}_L}{\hat{i}_L}$$

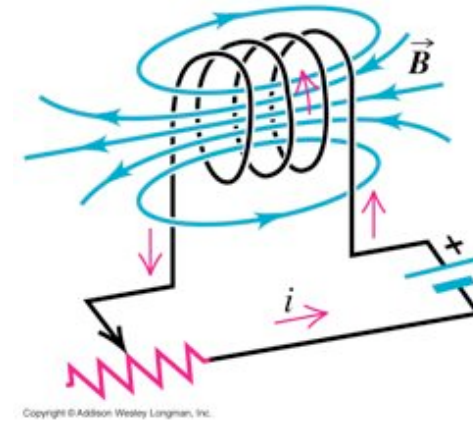
- Ou seja:

$$\hat{Z}_L = \frac{j\omega L i_0 e^{j\omega t}}{i_0 e^{j\omega t}} \Rightarrow \hat{Z}_L = j\omega L$$

- Pensando na expressão $e^{jx} = \cos x + j \sin x$

$$\hat{Z}_L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Ou seja, a tensão está desfasa de $\pi/2$ em relação à corrente



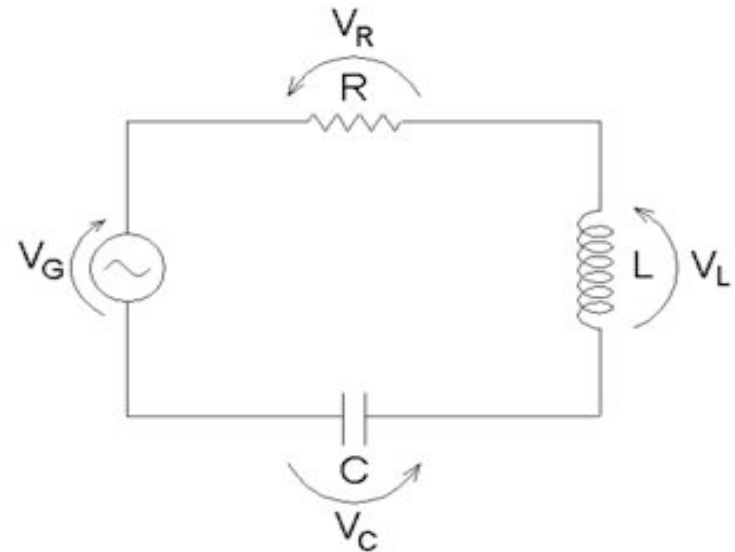
O FILTRO RLC

- Sabendo o que é um indutor, temos o filtro RLC ao lado:

$$\hat{V}_G = V_G e^{j\omega t}$$

- A impedância total do circuito é:

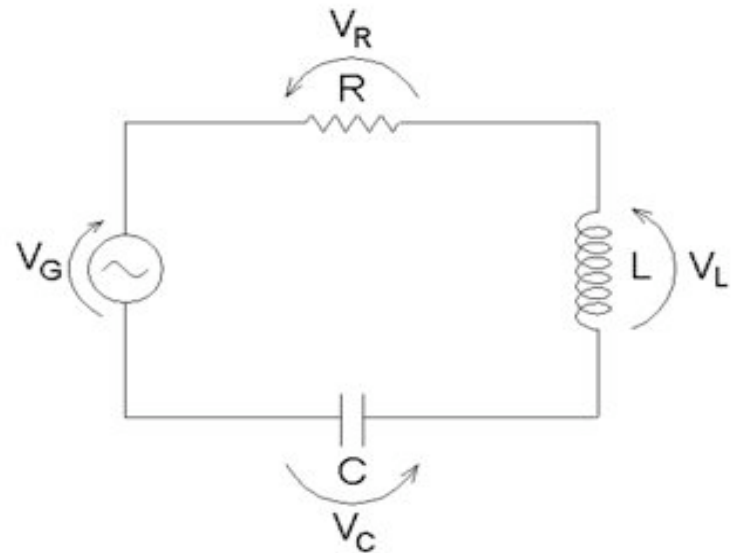
$$\hat{Z} = \hat{Z}_R + \hat{Z}_L + \hat{Z}_C = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$



O FILTRO RLC

- Podemos escrever também que a impedância é:

$$\hat{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = Ze^{j\phi}$$



- Com:

$$Z = \sqrt{\hat{Z}^* \cdot \hat{Z}} = \sqrt{\left(R - j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right) \cdot \left(R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right)}$$

$$Z = \sqrt{\left(R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right)}$$

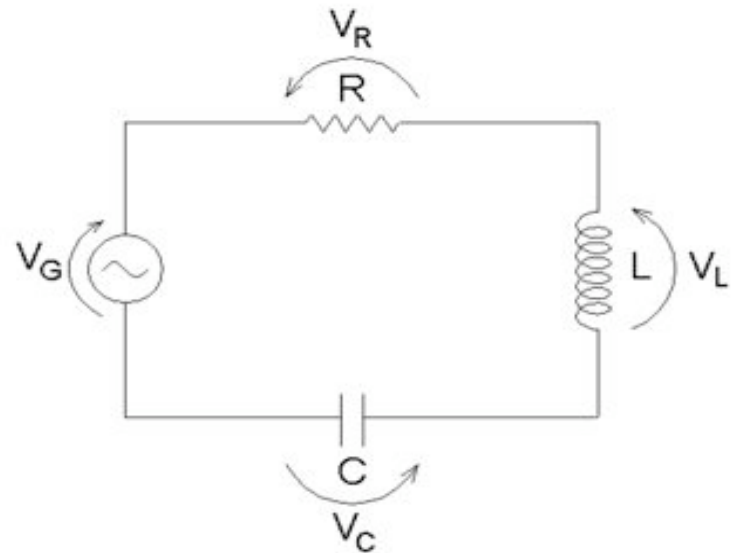
O FILTRO RLC

- Podemos escrever também que a impedância é:

$$\hat{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = Ze^{j\phi}$$

- Com:

$$\phi = \arctan\left(\frac{\text{Im}[\hat{Z}]}{\text{Re}[\hat{Z}]}\right) = \arctan\left(\omega \frac{L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)$$



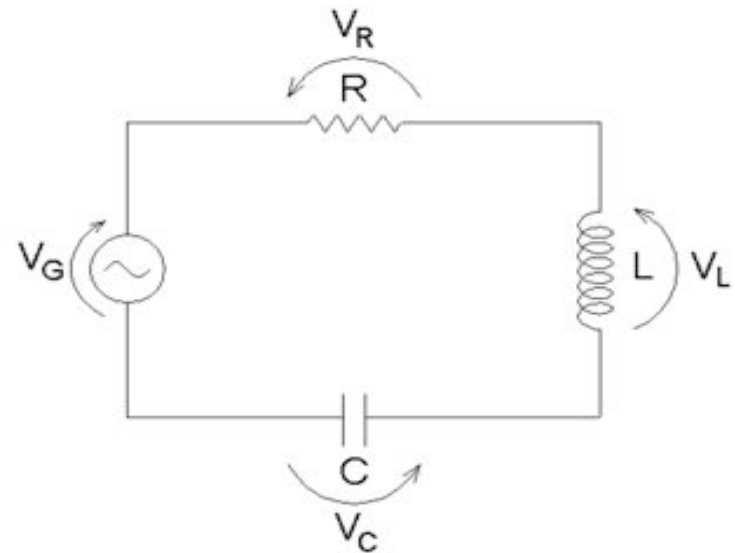
O FILTRO RLC

- Então, a corrente no circuito ao lado vale:

$$\hat{i} = \frac{\hat{V}}{\hat{Z}} = i_0 e^{j(\omega t - \phi_i)}$$

- Que vale:

$$\hat{i} = \frac{V_G e^{j\omega t}}{Z e^{j\phi}} = \frac{V_G}{Z} e^{j(\omega t - \phi)} = \frac{i_0 V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{j(\omega t - \phi)}$$



O FILTRO RLC

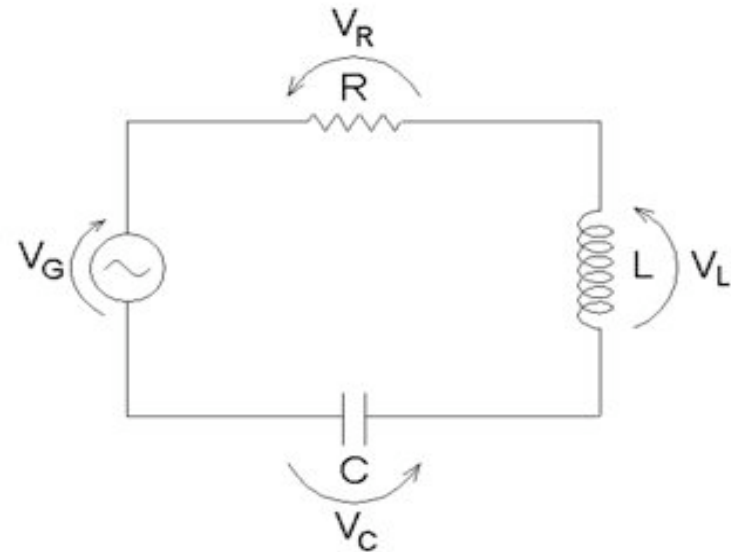
- Sabendo que a corrente é a mesma em cada elemento do circuito, podemos obter a tensão sobre cada um deles através de:

$$\hat{V}_X = \hat{i} \cdot \hat{Z}_X$$

- Para o resistor:

$$\hat{Z}_R = R$$

$$\hat{V}_R = Ri_0 e^{j(\omega t - \phi)}$$



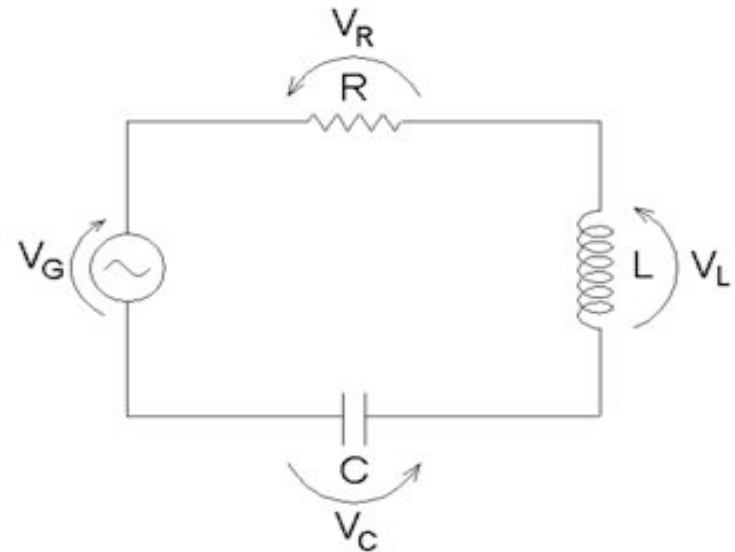
O FILTRO RLC

- Sabendo que a corrente é a mesma em cada elemento do circuito, podemos obter a tensão sobre cada um deles através de:

$$\hat{V}_X = \hat{i} \cdot \hat{Z}_X$$

- Para o indutor:

$$\hat{Z}_L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} \quad \hat{V}_L = \omega L i_0 e^{j\left(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2}\right)}$$



O FILTRO RLC

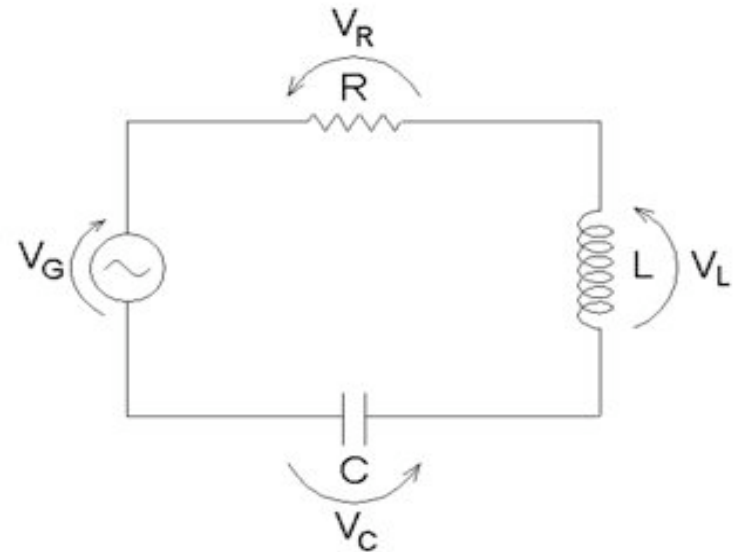
- Sabendo que a corrente é a mesma em cada elemento do circuito, podemos obter a tensão sobre cada um deles através de:

$$\hat{V}_X = \hat{i} \cdot \hat{Z}_X$$

- Para o capacitor:

$$\hat{Z}_C = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\hat{V}_C = \frac{i_0}{\omega C} e^{j\left(\omega t - \phi - \frac{\pi}{2}\right)}$$

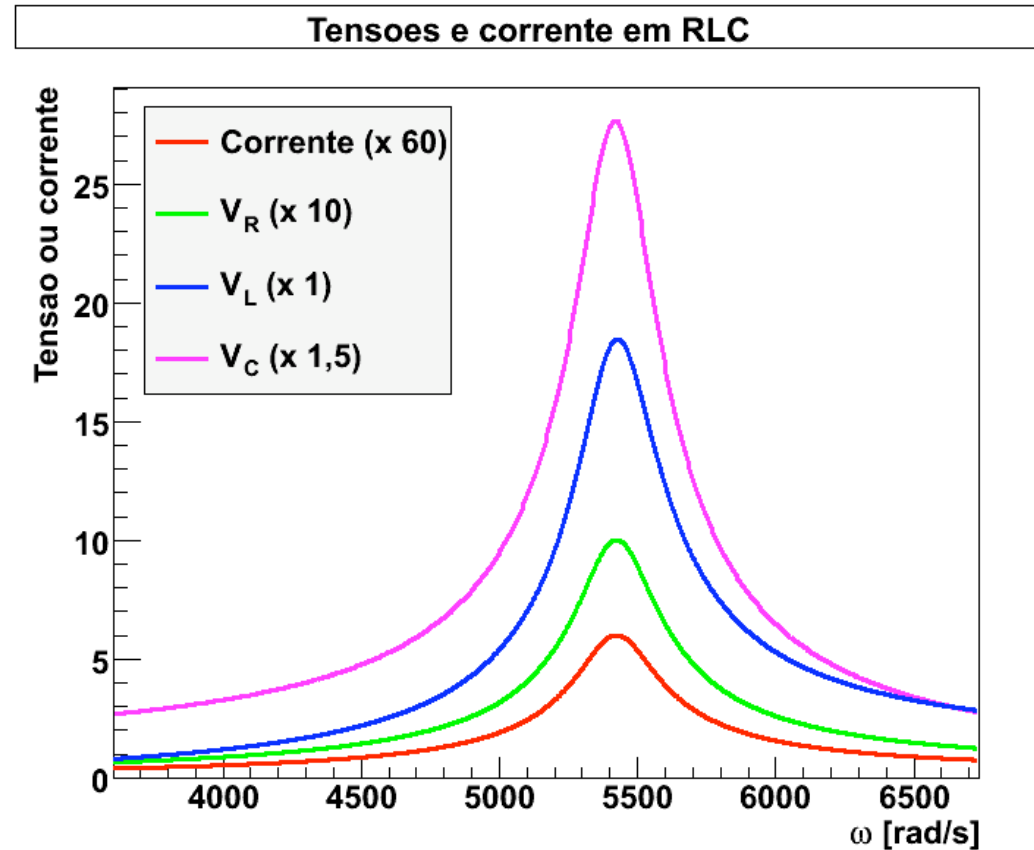


OBJETIVOS DA AULA DE HOJE

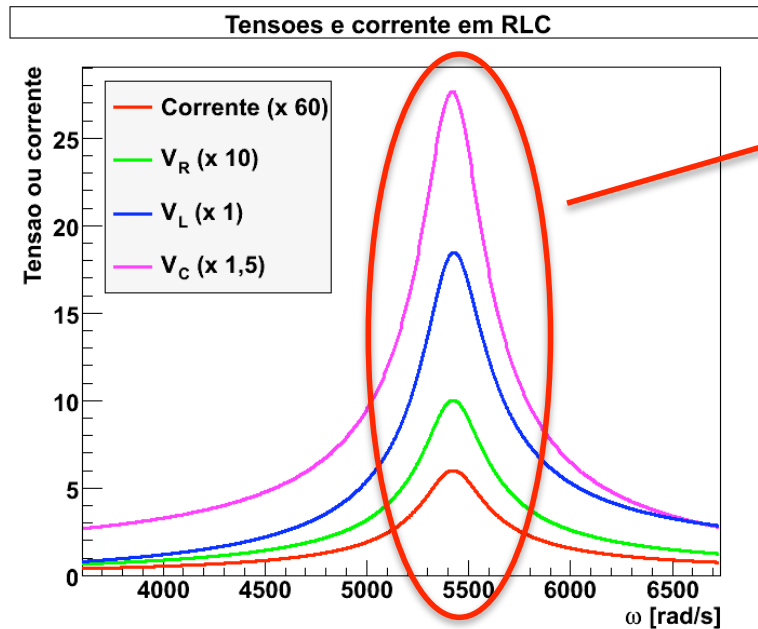
- Medir o ganho de um circuito RLC em função da frequência da onda harmônica
 - Mas vamos medir o ganho sobre qual elemento?
 - Vamos utilizar qual método de medida de ganho?
 - Ondas harmônicas simples ou
 - Análise de Fourier de um sinal adequado?
 - Onda quadrada, por exemplo.
- Como decidir qual elemento medir e qual método utilizar?
 - Análise do problema físico e da expectativa teórica.

O QUE PODEMOS PREVER DO CIRCUITO?

- Sabemos, teoricamente, como calcular as tensões e corrente no circuito
- Sabemos os valores típicos de capacitores, indutores e resistores disponíveis no laboratório didático
- Fazemos previsões teóricas



QUAL A FÍSICA QUE PODEMOS ESTUDAR?



As tensões e correntes apresentam um pico em um valor de frequência bem definido

RESSONÂNCIA

A posição do pico é a mesma para todos sinais?

O que define a posição deste pico?

O que define a altura e largura deste pico?

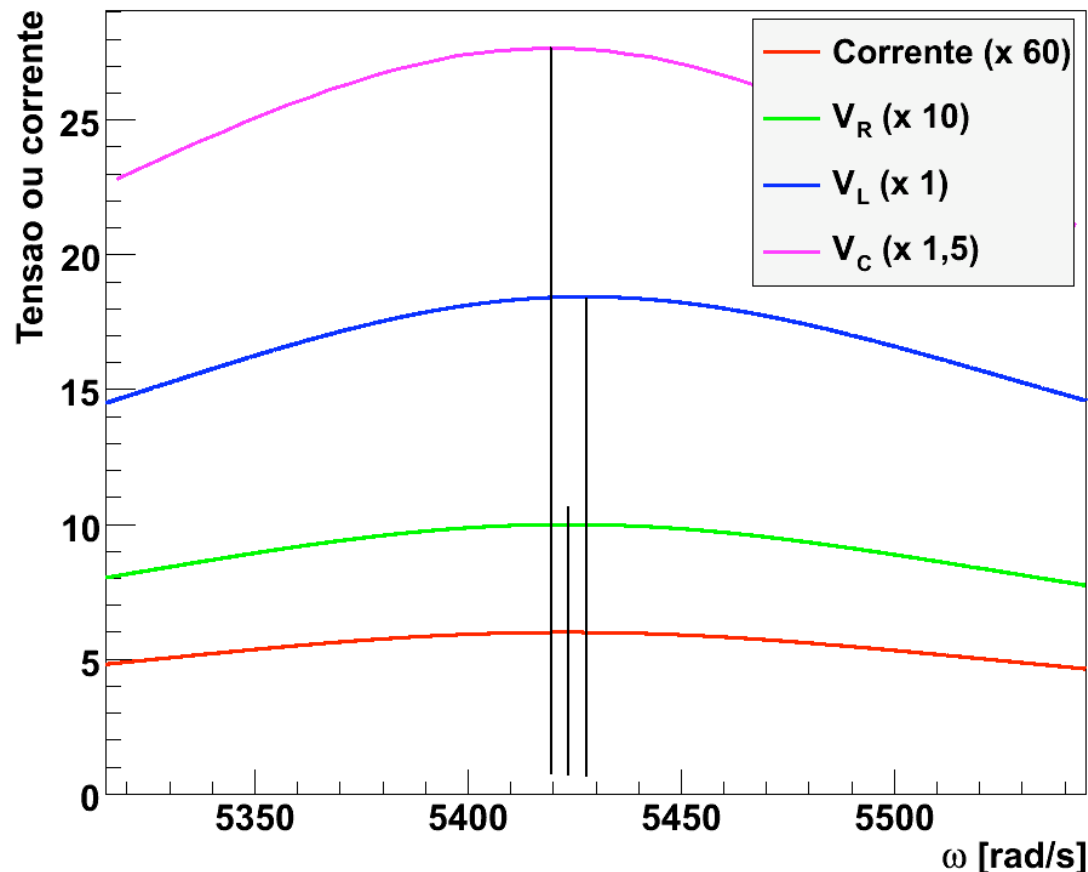
Existe física mais fundamental envolvida?

O sistema real se comporta como a previsão teórica?

Existe alguma Física que não estamos considerando neste problema?

QUAL A FÍSICA QUE PODEMOS ESTUDAR?

Tensoes e corrente em RLC



As tensões e correntes apresentam um pico em um valor de frequência bem definido

RESSONÂNCIA

A posição do pico é a mesma para todos sinais?

O que define a posição deste pico?

O que define a altura e largura deste pico?

Existe física mais fundamental envolvida?

QUAL A FÍSICA QUE PODEMOS ESTUDAR?

- Ressonância em corrente

$$\hat{i} = \frac{V_G}{\underbrace{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}_{i_0}} e^{j(\omega t - \phi)}$$

- Condição para corrente máxima

$$\frac{di_0}{d\omega} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\omega} \left(R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right) = 0$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

As tensões e correntes apresentam um pico em um valor de frequência bem definido

RESSONÂNCIA

A posição do pico é a mesma para todos sinais?

O que define a posição deste pico?

O que define a altura e largura deste pico?

Existe física mais fundamental envolvida?

QUAL A FÍSICA QUE PODEMOS ESTUDAR?

- Ressonância em carga (tensão no capacitor)

$$\hat{V}_C = \frac{V_G}{\underbrace{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}_{V_{C0}}} e^{j\left(\omega t - \phi - \frac{\pi}{2}\right)}$$

- Condição para tensão máxima

$$\frac{dV_{C0}}{d\omega} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\omega} \left[\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \right] = 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{2L^2}}$$

As tensões e correntes apresentam um pico em um valor de frequência bem definido

RESSONÂNCIA

A posição do pico é a mesma para todos sinais?

O que define a posição deste pico?

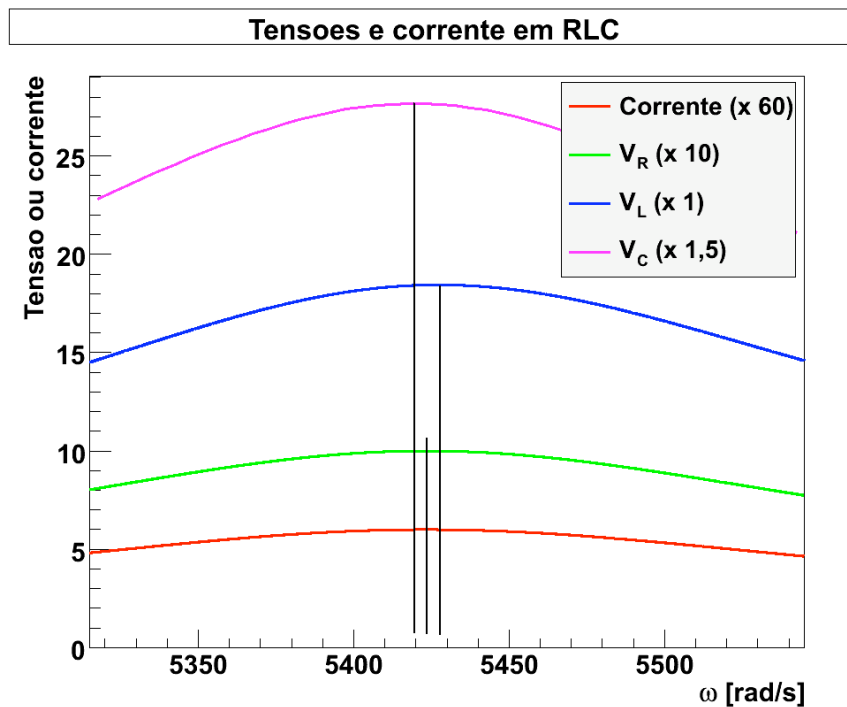
O que define a altura e largura deste pico?

Existe física mais fundamental envolvida?

QUAL A FÍSICA QUE PODEMOS ESTUDAR?

- Pergunta experimental: É possível distinguir as frequências de ressonância em carga e corrente?

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{2L^2}}$$



$$\omega_0 - \omega_1 \sim 5/5000 \sim 0,01\%$$

As tensões e correntes apresentam um pico em um valor de frequência bem definido

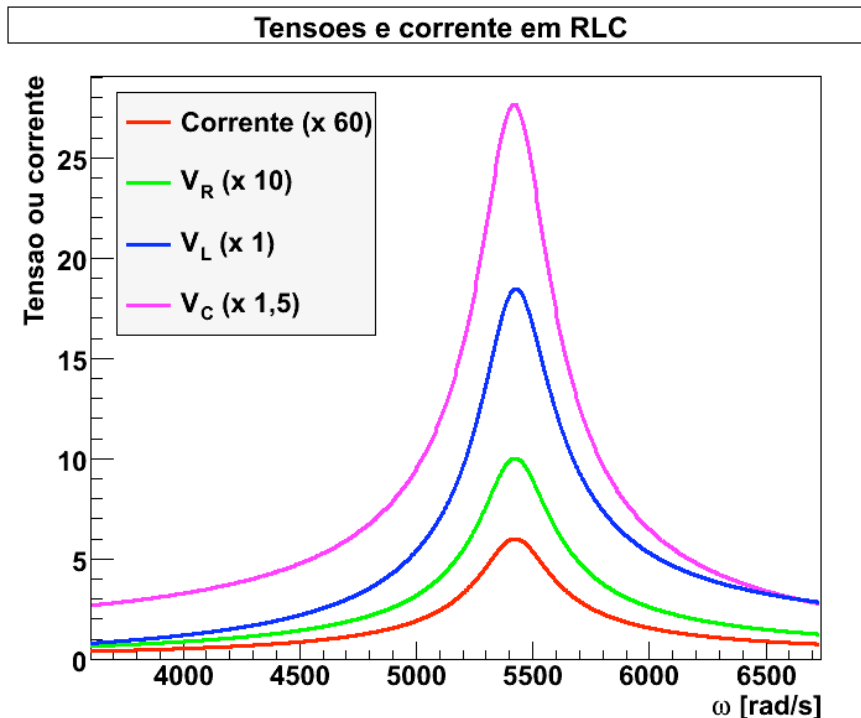
RESSONÂNCIA

A posição do pico é a mesma para todos sinais?

O que define a posição deste pico?

Se há limitações experimentais, a diferença entre as frequências de ressonância é difícil de ser estudada

QUAL A FÍSICA QUE PODEMOS ESTUDAR?



- Fator de qualidade (Q) do circuito.

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

$\Delta\omega$ é a largura do pico de ressonância em corrente a $1/\sqrt{2}$ da altura máxima

As tensões e correntes apresentam um pico em um valor de frequência bem definido

RESSONÂNCIA

A posição do pico é a mesma para todos sinais?

O que define a posição deste pico?

O que define a altura e largura deste pico?

Existe física mais fundamental envolvida?

QUAL A FÍSICA QUE PODEMOS ESTUDAR?

- Fator de qualidade (Q) do circuito.

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = 2\pi \left(\frac{U}{\Delta U} \right)$$

- U é a energia armazenada no sistema na condição de ressonância

$$U = \frac{1}{2} L i_0^2 = \frac{1}{2} C V_{C0}^2$$

Energia armazenada no campo elétrico do capacitor ou no campo magnético do indutor

- ΔU é a energia dissipada pelo sistema durante um período de oscilação

$$\Delta U = PT = \frac{1}{2} R i_0^2 T$$

Energia dissipada no resistor em um período

ESTUDAR A APOSTILA DO CURSO/2007

As tensões e correntes
co em
ência

A posição do pico é a mesma para todos sinais?

que define a posição deste pico?

O que define a altura e largura deste pico?

Existe física mais fundamental envolvida?

QUAL A FÍSICA QUE PODEMOS ESTUDAR?

- A frequência de ressonância é ligeiramente diferente se observarmos a corrente, tensão no capacitor ou indutor
 - Contudo, é muito difícil quantificar experimentalmente
 - **CONCLUSÃO:** Vamos medir apenas uma curva de ressonância e tentar aprender o máximo possível com ela.
 - Ressonância em carga.
- O que podemos obter da curva de ressonância?
 - Frequência e largura
 - Fator de qualidade (Q)
 - Energia armazenada e dissipada no circuito.

As tensões e correntes apresentam um pico em um valor de frequência bem definido

RESSONÂNCIA

A posição do pico é a mesma para todos sinais?

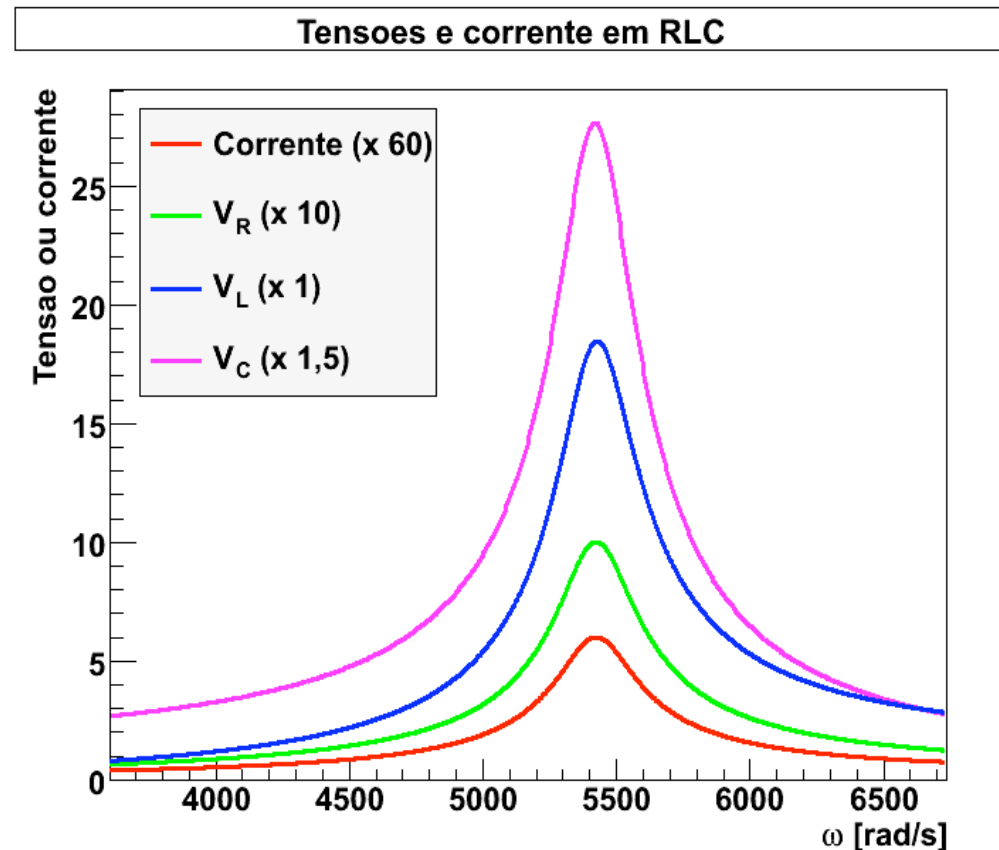
O que define a posição deste pico?

O que define a altura e largura deste pico?

Existe física mais fundamental envolvida?

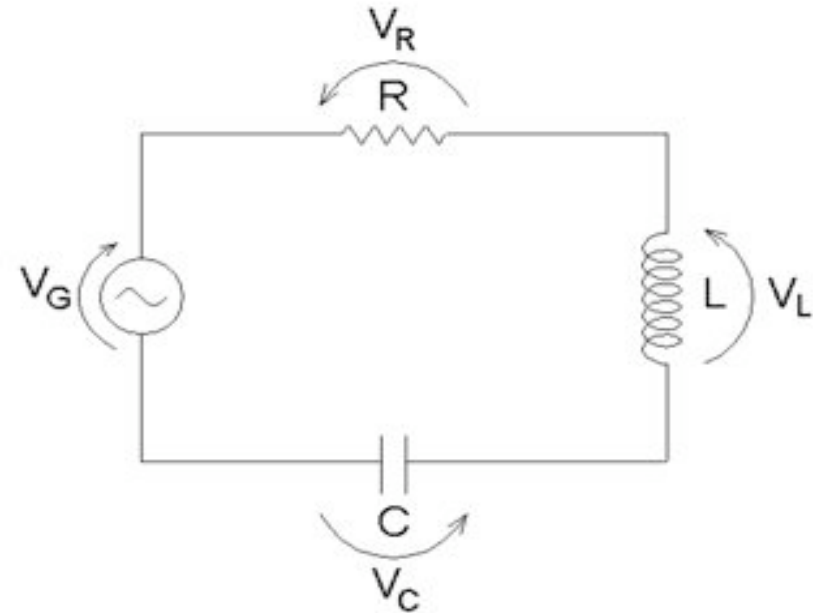
UMA ÚLTIMA PERGUNTA:

- Qual método de medida devemos utilizar?
 - Ondas harmônicas simples ou
 - Transformada de Fourier?



ATIVIDADES DA SEMA

- Levantar a curva de ressonância em carga do circuito RLC para DOIS valores de R
 - Usar $L \sim 35 \text{ mH}$
 - Usar $C \sim 1 \mu\text{F}$
 - Usar $R \sim 1 \Omega$.
 - Usar o casador de impedâncias da fonte



PARA ENTREGAR...

- Entregar gráfico de V_{C0} vs ω
 - Superpor curvas teóricas teóricas e comparar com os resultados experimentais.
 - O sistema real se comporta como a previsão teórica?
- Lembre-se que queremos medir a curva de ressonância, que pode ser bem localizada em frequências. Use o seu conhecimento experimental para determinar quantos pontos são razoáveis para caracterizar bem esta curva