Introdução às Medidas em Física
5ª Aula
http://www.dfn.if.usp.br/~suaide/

Alexandre Suaide

Ed. Oscar Sala

sala 246

ramal 7072

Consolidando o conceito de incertezas

- Instrumentos de medição possuem limitações
  - Alguns instrumentos são mais recomendados que outros para efetuar uma certa medida
    - Ex: micrômetro é mais adequado que uma régua para medir espessura de uma folha de papel
  - Incerteza instrumental
    - Nenhum instrumento possui precisão infinita
      - Incerteza: em geral, metade da menor divisão (cuidado com o paquímetro!)

Consolidando o conceito de incertezas

- Em alguns casos, o objeto a ser medido é construído de forma mais precisa que o instrumento utilizado para realizar a medida
  - Ex: medir o comprimento de uma folha de sulfite com uma régua plástica
    - O instrumento é um fator limitante.

Consolidando o conceito de incertezas

- Em outros casos, o objeto a ser medido é construído de forma menos precisa que o instrumento utilizado para realizar a medida
  - Ex: medir a altura de uma mesa com a trena. As flutuações na altura da mesa são maiores que a precisão da trena.
    - Qual é a altura da mesa?

Consolidando o conceito de incertezas

- O instrumento é preciso, o objeto tem dimensões razoavelmente precisas mas há dificuldades experimentais para realizar as medidas
  - Ex: Medir o período de oscilação do pêndulo. Nesse caso, o cronômetro é um instrumento preciso e o período do pêndulo bem reprodutível. O fator limitante é a dificuldade experimental em definir o período do pêndulo.

Como estimar a incerteza?

- Incertezas estão sempre presentes
  - Limitações instrumentais...
  - Método de medida...
  - Precisão da grandeza a ser medida...
- Muitas situações diferentes...
  - Em muitos casos, várias das situações mostradas estão presentes ao mesmo tempo. O que fazer?

Tipos de incerteza

- Instrumental e/ou devido à metodologia
  - Aquelas devida à precisão do instrumento é método utilizado para realizar a medida direta de uma grandeza
- Estatística
  - Incerteza devido à repetição de uma mesma medida
- Sistemática
  - Aquelas onde a medida é desviada em uma única direção, tornando os resultados viciados

Incertezas instrumentais

- Em geral é a metade da menor divisão
  - Cuidado com instrumentos que possuem nônio (ex: paquímetro) onde a incerteza é a menor divisão do mesmo
  - Em alguns casos, onde a definição do ponto do objeto a ser medido torna-se obscura pode-se considerar a incerteza instrumental maior que a menor divisão do instrumento de medida.

Incertezas estatísticas

- O que acontece se eu repito a mesma medida, de forma independente, de um objeto?
  - Pode ser que cada medida apresente um valor diferente.
  - Nesse caso, a medida é a **média** de todas as medidas efetuadas
  - A incerteza é o **desvio padrão da média**.

Incertezas sistemáticas

- Aquelas que falseiam a medida
  - Ex: uma régua onde o primeiro mm está faltando e o experimentador não percebe. Todas as medidas serão 1 mm menor do que deviam
  - Ex: uma balança descalibrada
- Esse tipo de incerteza, em geral, só é percebida quando um resultado difere do esperado.
- Deve-se procurar avaliar o método experimental, bem como a confiabilidade dos instrumentos utilizados. Uma vez detectado esse tipo de erro, as medidas devem ser corrigidas ou refeitas.

Qual é a incerteza de uma medida?

- Suponha que o experimentador realize várias medidas do tamanho de uma mesa com uma régua.
  - Incerteza instrumental: σ_{Linstr} = 0,5 mm
  - Incerteza estatística: σ_{Lestat}

$$\sigma_L = \sqrt{\sigma_{Linstr}^2 + \sigma_{Lestat}^2}$$

  - Caso um tipo de incerteza seja dominante, pode-se desprezar a outra.
    - Ex: Período do pêndulo medido com o relogio de pulso. Nesse caso, a incerteza instrumental é muito maior que a estatística

Medidas indiretas

- Muitas vezes a medida em questão é feita de forma indireta
  - Ex: Determinar o período do pêndulo a partir do seu comprimento
  - Ex: Medir a área da sala a partir das medidas do comprimento e largura
  - Ex: Medir a velocidade de um carro a partir do tempo que o mesmo leva para percorrer uma determinada distância
- Como eu avalio as incertezas em medidas indiretas?

Densidade de sólidos

- Depende da massa e do volume

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad \sigma_\rho = ?$$

- O Volume pode ser obtido pela medida das dimensões do objeto.
  - Exemplo, um cilindro de raio R e altura H

$$V = \pi R^2 H \qquad \sigma_V = ?$$

Atividades

- Para cada objeto plástico de cada grupo, medir:
  - Massa dos objetos
    - Utilizar a **balança digital**.
  - Dimensões dos objetos
    - Medir as dimensões necessárias para o cáculo do volume utilizando uma **régua simples**.
  - Anotar todos os valores com as respectivas incertezas

Cálculo do volume

- Volume de um cilindro

$$V = \pi R^2 H = \pi \frac{D^2}{4} H$$

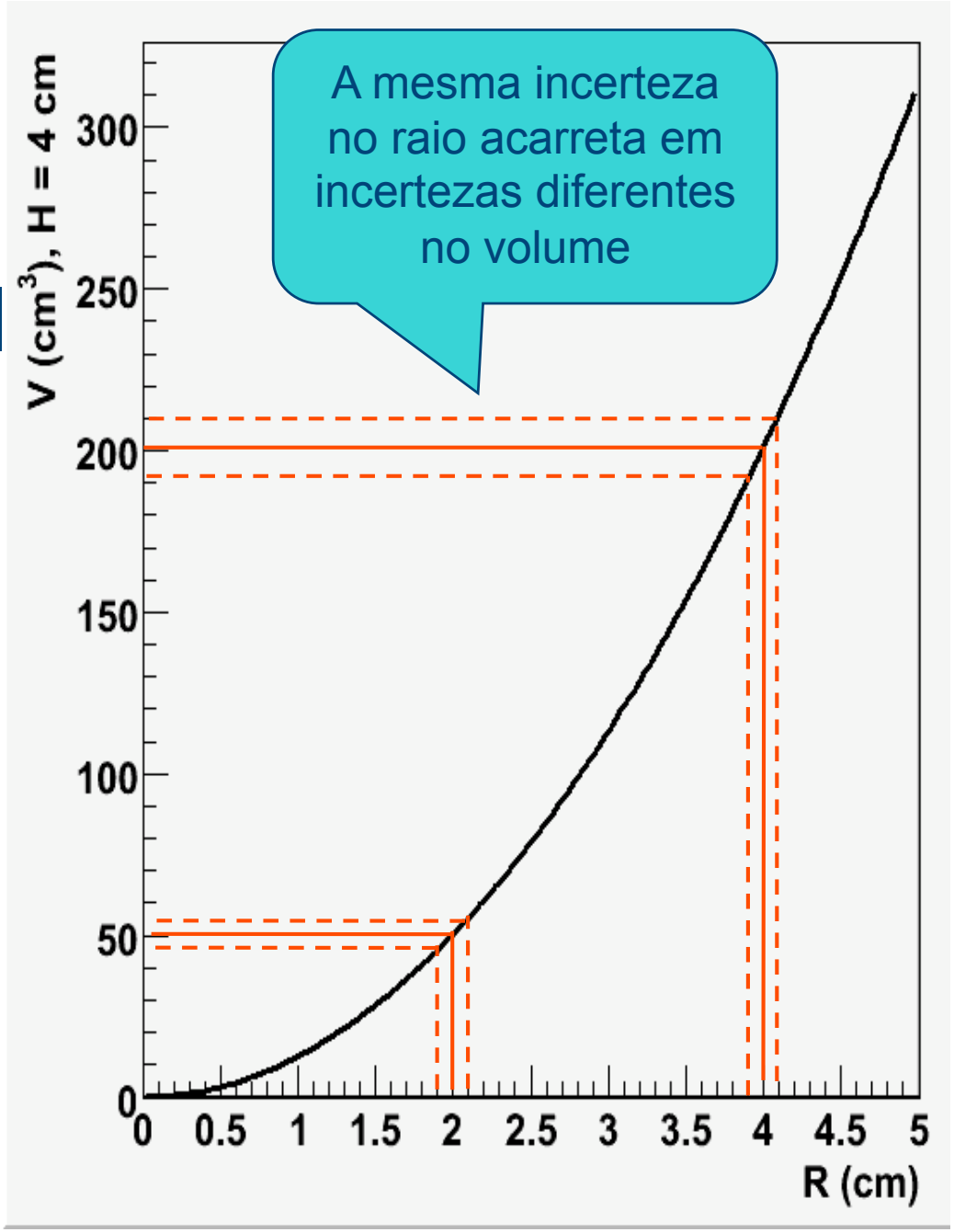
- Como o volume do cilindro varia com o diâmetro e altura?
  - Calcule o volume do cilindro, fixando o raio, para H + σ_H e H – σ_H. Calcule a diferença desses dois extremos em relação ao valor médio, calculado com a medida H
  - Calcule o volume do cilindro, fixando a altura, para D + σ_D, D – σ_D. Calcule a diferença desses dois extremos em relação ao valor médio, calculado com a medida D
- Qual é a incerteza no volume?
  - Como combinar as duas variações (diâmetro e altura)?

Propagação de incertezas

- Volume de um cilindro

$$V = \pi R^2 H$$

- Como uma variação na medida de raio afeta o volume?
- Essa variação é a mesma, independente da medida do raio?



Teoria de erros

- Teoria na qual estuda-se o comportamento dos erros de medidas, como eles influenciam outras medidas, bem como propagá-los no caso de uma medida indireta.
- Propagação de erros
  - Método para calcular a incerteza de uma medida indireta

Propagação de erros: fórmula geral

- Seja uma grandeza G, dependente de duas variáveis, A e B. O valor da incerteza em G, σ_G, pode ser expressa em termos das incertezas em A e B (σ_A e σ_B, respectivamente) através da fórmula:

$$\sigma_G^2 = \left(\frac{\partial G}{\partial A}\sigma_A\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial B}\sigma_B\right)^2$$

Derivada parcial de G em relação à A

Vamos fazer um exemplo simples

- Volume de um cilindro

$$V = \pi \frac{D^2}{4} H$$

- O Volume depende tanto do raio R, cuja incerteza é σ_R, e da altura H, com incerteza σ_H. Assim, a incerteza do volume é dada por:

$$\sigma_V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial D} \sigma_D \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial H} \sigma_H \right)^2$$

Como calcular as derivadas

- Suponha que todo o resto da expressão é uma constante....

$$V = \pi \frac{D^2}{4} H \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial H} = \dfrac{\partial}{\partial H}\left(\pi \dfrac{D^2}{4} H\right) = \pi \dfrac{D^2}{4} \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial D} = \dfrac{\partial}{\partial D}\left(\pi \dfrac{D^2}{4} H\right) = \pi \dfrac{2D}{4} H = \pi \dfrac{D}{2} H \end{cases}$$

Desse modo...

- Incerteza do volume do cilindro

$$\sigma_V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial D}\sigma_D\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial H}\sigma_H\right)^2$$

$$= \left(\pi\frac{D}{2}H\sigma_D\right)^2 + \left(\pi\frac{D^2}{4}\sigma_H\right)^2$$

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\pi\frac{D}{2}H\sigma_D\right)^2 + \left(\pi\frac{D^2}{4}\sigma_H\right)^2}$$

Professor, eu preciso fazer esse montão de derivadas e contas toda vez?

- A rigor deve-se sempre calcular as derivadas
- Na prática, com o tempo, desenvolve-se técnicas que simplificam a nossa vida
- Dois casos muito comuns:
  - Soma e subtração
  - Multiplicação e divisão

Dois casos comuns

- Soma e subtração
  - A incerteza da soma (ou subtração) é a raiz da soma dos quadrados das incertezas individuais

$$C = A + B \quad \text{ou} \quad C = A - B$$

$$\sigma_C = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$$

- Multiplicação e divisão
  - A incerteza percentual do produto (ou divisão) é a raiz da soma quadrática das incertezas percentuais individuais

$$C = AB \quad \text{ou} \quad C = A/B$$

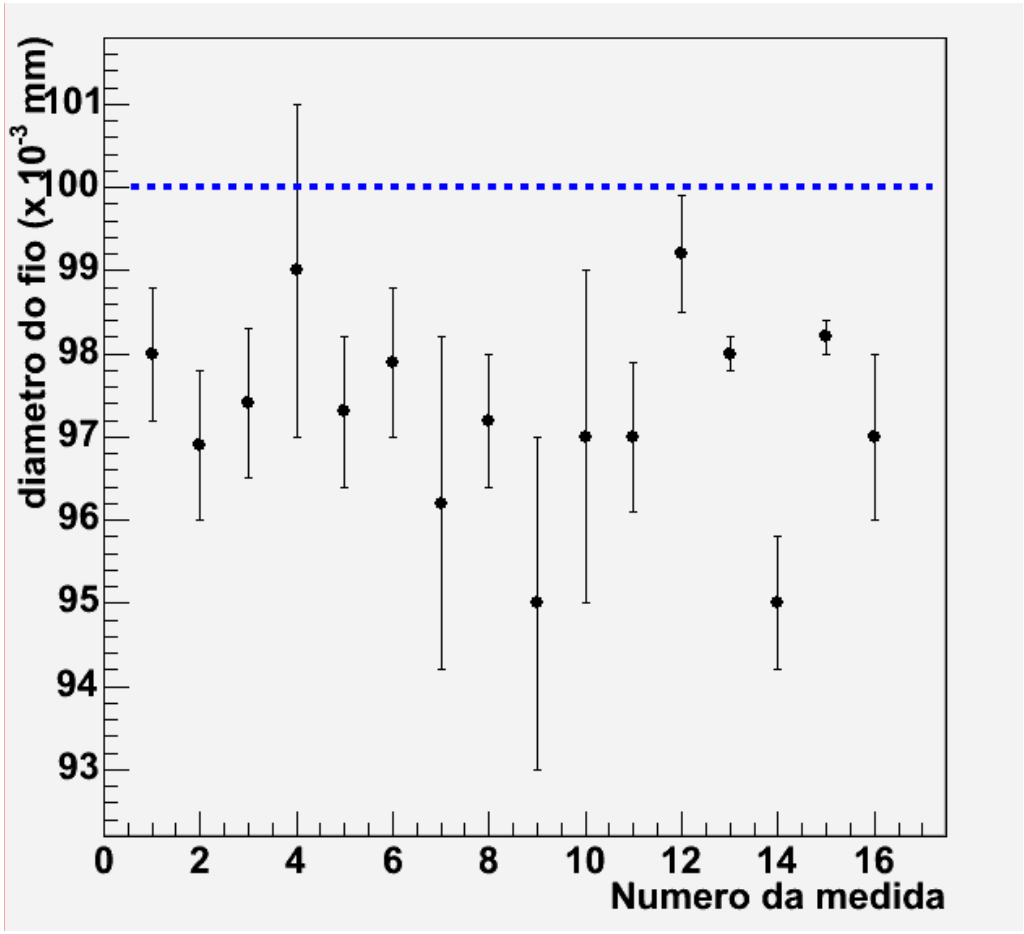
$$\frac{\sigma_C}{C} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_B}{B}\right)^2}$$

Quando medidas são compatíveis entre si?

- Intervalo de confiança
  - Significa o intervalo onde o experimentador espera que o valor verdadeiro de uma medida esteja situado.
  - Duas medidas são compatíveis quando os seus intervalos de confiança $[x-\sigma_x, x+\sigma_x]$ se superpõem.
    - O Intervalo de confiança não é absoluto. Lembre-se que, em uma distribuição aleatória de dados que podem ser descritos por uma função de Gauss (ver aula passada) somente ~70% das medidas vão cair nesse intervalo.

Exemplo: diâmetro de um fio de cobre

- Quais medidas são compatíveis entre si?
- Quais medidas são compatíveis com o valor nominal fornecido pelo fabricante?



Densidade de sólidos

Material	Densidade g/cm^3
Acrílico	1,17 – 1,20
Nylon	1,09 – 1,14
Polietileno	0,941 – 0,965
PVC	1,35 – 1,45
Polipropileno	0,900 – 0,915

Atividades
OBS: Anotar o número do kit de peças

- Medir as massas e dimensões dos outros objetos, utilizando a balança digital e a régua.
- Repetir as mesmas medidas utilizando a balança analítica e o paquímetro
- Obtenha as densidades e incertezas dos objetos nos seguintes casos:
  - Balança digital + régua
  - Balança digital + paquímetro
- Compare os seus resultados com a tabela para densidade de vários plásticos. De que material é feito os seus objetos? Existe alguma ambiguidade? Seria possível concluir a mesma coisa de todos as combinações descritas acima?