Aula 13 – Física Experimental III

- Experimento III
  - Circuitos de corrente alternada

Objetivos do experimento

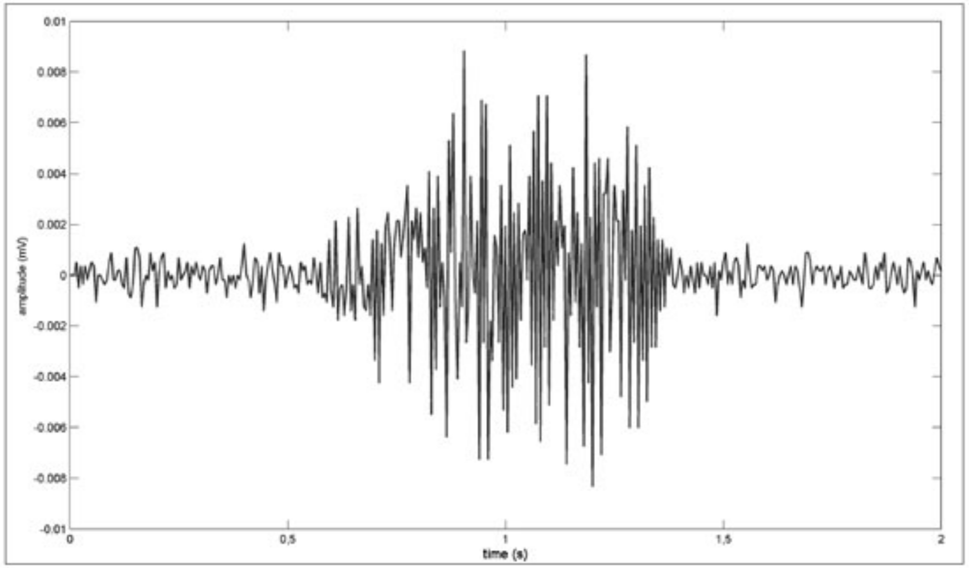
- Estudar circuitos elétricos em corrente alternada
  - Características de elementos de circuitos nestas condições
- Estudar algumas aplicações
  - Filtros de sinal
- Decomposição em harmônicos
  - Séries de Fourier

Filtros

- O que é um filtro?
  - Dispositivo que modifica uma tensão de entrada de modo a fornecer uma tensão de saída de acordo com o especificado pelo usuário.

Um sinal elétrico genérico

- Vamos supor que a tensão elétrica de entrada em um filtro tenha uma dependência qualquer no tempo



- Como saber o que acontece com este sinal ao passar por um filtro?

Séries de Fourier

- Joseph Fourier, 1807
  - Resolução das equações termodinâmicas em uma placa aquecida (condução de calor)
  - Referees: Lagrange, Laplace, Malus e Legendre
    - Falta de "rigor matemático"

- Qualquer função periódica e integrável no seu período pode ser escrita como uma soma infinita de senos

Séries de Fourier

- Definição: Uma função $f(x)$, de período T, portanto:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

- Pode ser escrita como

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(n\omega x + \phi_n\right)$$

- Onde os coeficientes A_n e ϕ_n são específicos para a função $f(x)$.

Séries de Fourier

- Usando a relação:

$$\sin(a+b) = \sin(b)\cos(a) + \cos(b)\sin(a)$$

- Podemos escrever

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\cos(\phi_n)\sin(n\omega x) + \sin(\phi_n)\cos(n\omega x)\right)$$

- Ou ainda

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$$

$$a_n = A_n \sin(\phi_n) \quad \text{e} \quad b_n = A_n \cos(\phi_n)$$

$$\phi_n = \arctan\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

Séries de Fourier

- Atualmente é mais comum escrever a série de Fourier em termos complexos, usando a relação

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j\sin(\alpha)$$

- Podemos escrever (notem os limites de n)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega x}$$

- E as constantes estão relacionadas entre si por:

$$a_n = c_n + c_{-n}$$
$$b_n = j(c_n - c_{-n})$$

Coeficientes da série

- Os coeficientes da série de Fourier podem ser calculados através de

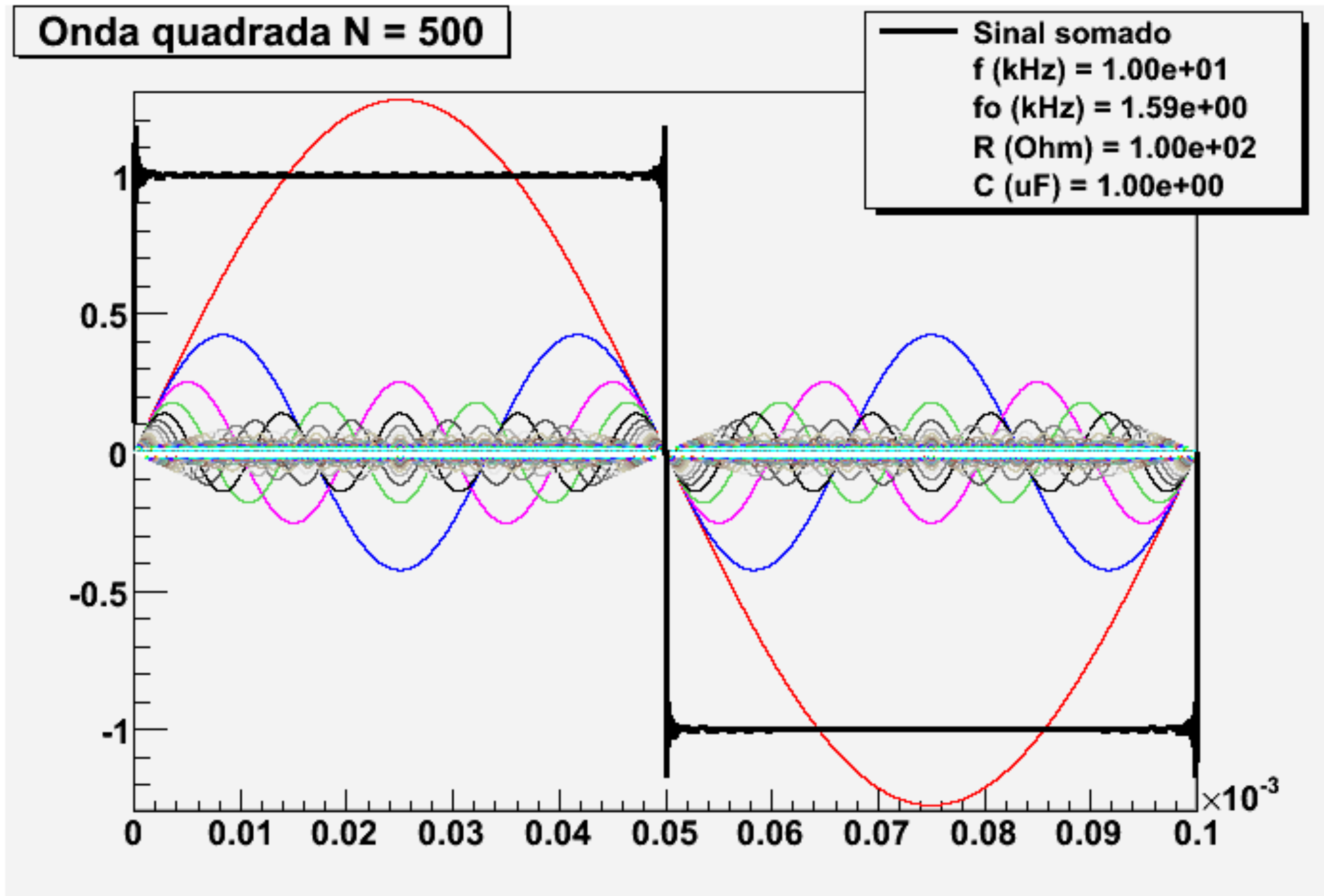
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)\,dx$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-jn\omega x}\,dx$$

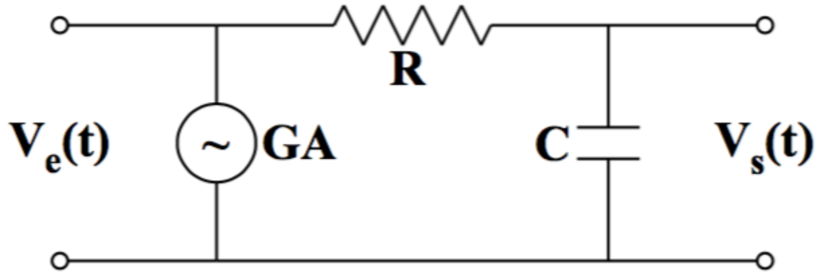
Exemplo: onda quadrada

$$V(t) = V_0\left[\frac{4}{\pi}\sin(\omega t) + \frac{4}{3\pi}\sin(3\omega t) + \frac{4}{5\pi}\sin(5\omega t) + \ldots\right]$$



Como isto resolve o caso de uma tensão genérica?

- Vamos olhar o filtro RC ao lado



- Para uma tensão de entrada não harmônica, podemos escrevê-la como:

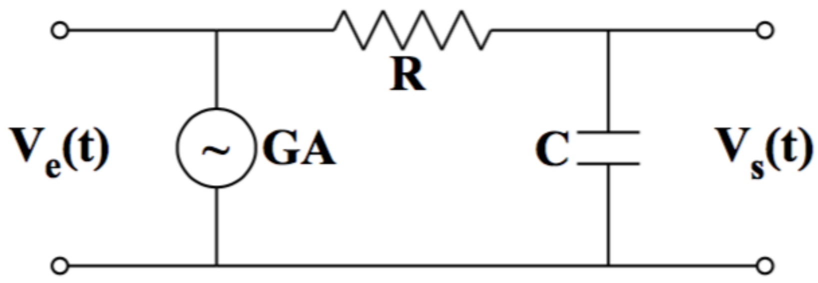
$$V_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{c}_n e^{j\omega_n t}$$

$$\text{com} \quad \omega_n = n\omega$$

- Vamos resolver as equações diferenciais para este circuito e calcular a tensão de saída

Como isto resolve o caso de uma tensão genérica?

- Das Leis de Kirchhoff



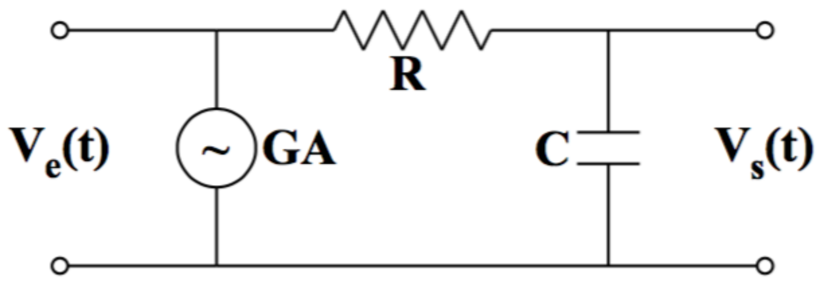
$$V_e(t) = V_R(t) + V_C(t)$$

$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \Rightarrow i(t) = C\frac{d}{dt}V_C(t)$$

$$V_e(t) = RC\frac{d}{dt}V_C(t) + V_C(t)$$

Como isto resolve o caso de uma tensão genérica?

- Escrevendo



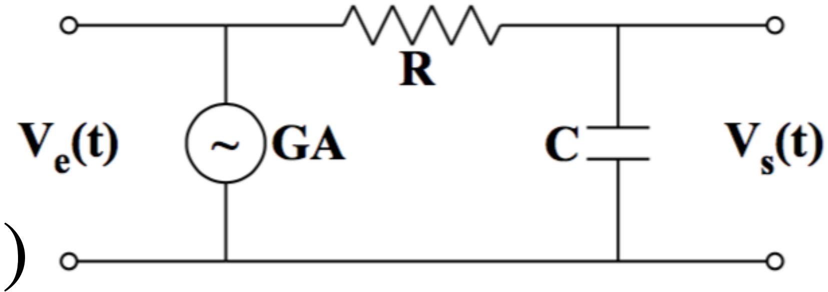
$$V_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{c}_n e^{j\omega_n t}$$

$$V_C(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{b}_n e^{j\omega_n t}$$

$$\frac{d}{dt} V_C(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} j\omega_n \hat{b}_n e^{j\omega_n t}$$

Como isto resolve o caso de uma tensão genérica?

- Fazemos que:



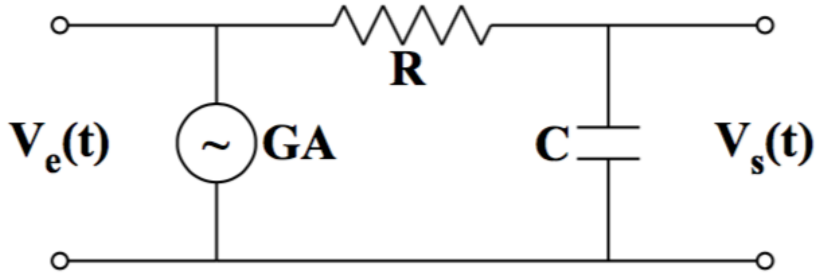
$$V_e(t) = RC\frac{d}{dt}V_C(t) + V_C(t)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{c}_n e^{j\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(RCj\omega_n + 1\right)\hat{b}_n e^{j\omega_n t}$$

$$\hat{c}_n = \left(RCj\omega_n + 1\right)\hat{b}_n \Rightarrow \hat{b}_n = \frac{1}{1 + j\omega_n RC}\hat{c}_n$$

Como isto resolve o caso de uma tensão genérica?

- Lembrando do filtro RC para tensões harmônicas



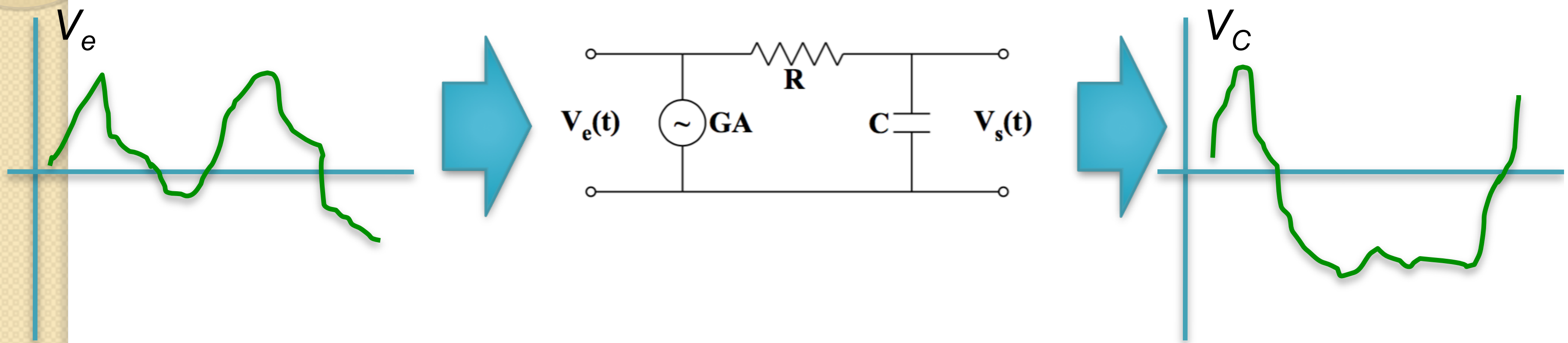
$$\hat{V}_C = \frac{1}{1 + j\omega RC}\hat{V}_e$$

- Comparando à

$$\hat{b}_n = \frac{1}{1 + j\omega_n RC}\hat{c}_n$$

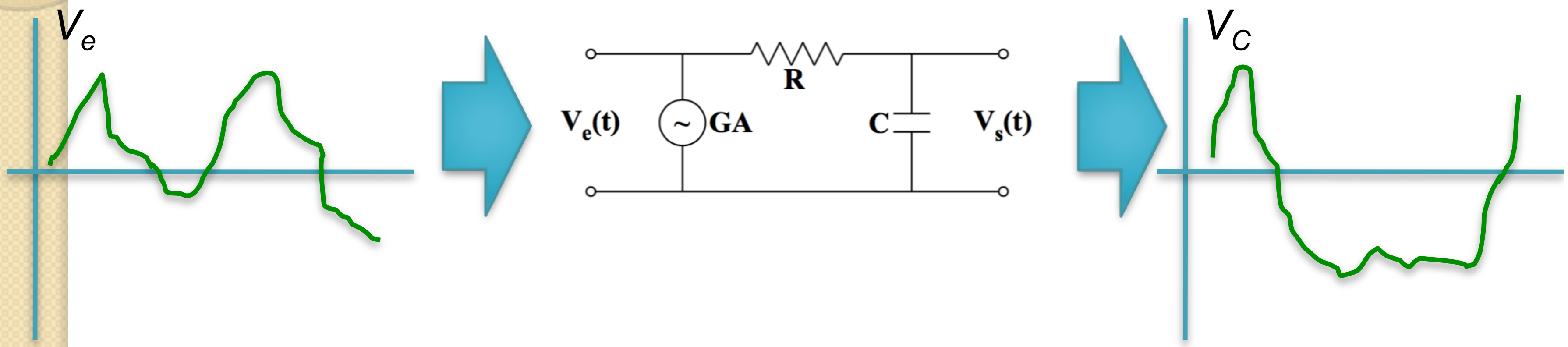
O estudo de um sinal não harmônico em um circuito regido por uma E.D. linear pode ser feito decompondo o sinal nas suas frequências harmônicas e estudando o comportamento deste circuito para cada uma destas componentes!

Impacto de um sinal não harmônico em um circuito



- Cada componente é modificada de forma diferente por terem frequências diferentes
  - As mudanças ocorrem em aplitude e em fase
  - O sinal na saída não tem a mesma forma do sinal original

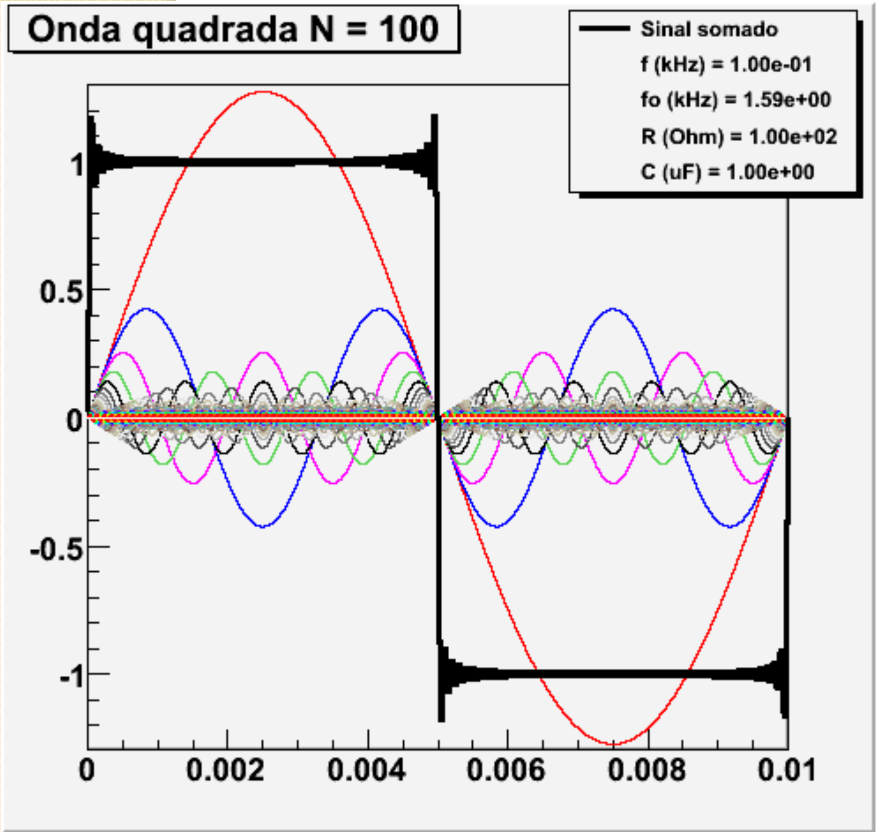
Impacto de um sinal não harmônico em um circuito

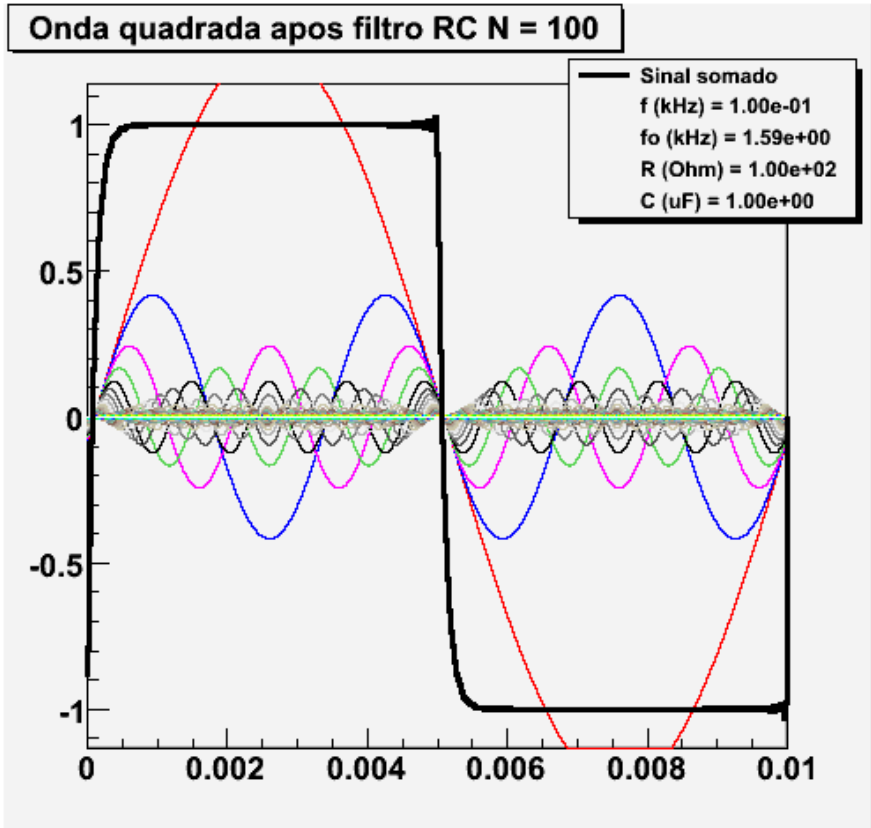


$$V_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{c}_n e^{j\omega_n t} \rightarrow V_C(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\hat{G}_n \hat{c}_n\right) e^{j\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(G_n \hat{c}_n\right) e^{j(\omega_n t + \phi_n)}$$

Filtro RC com $f_c = 1.5\ kHz$

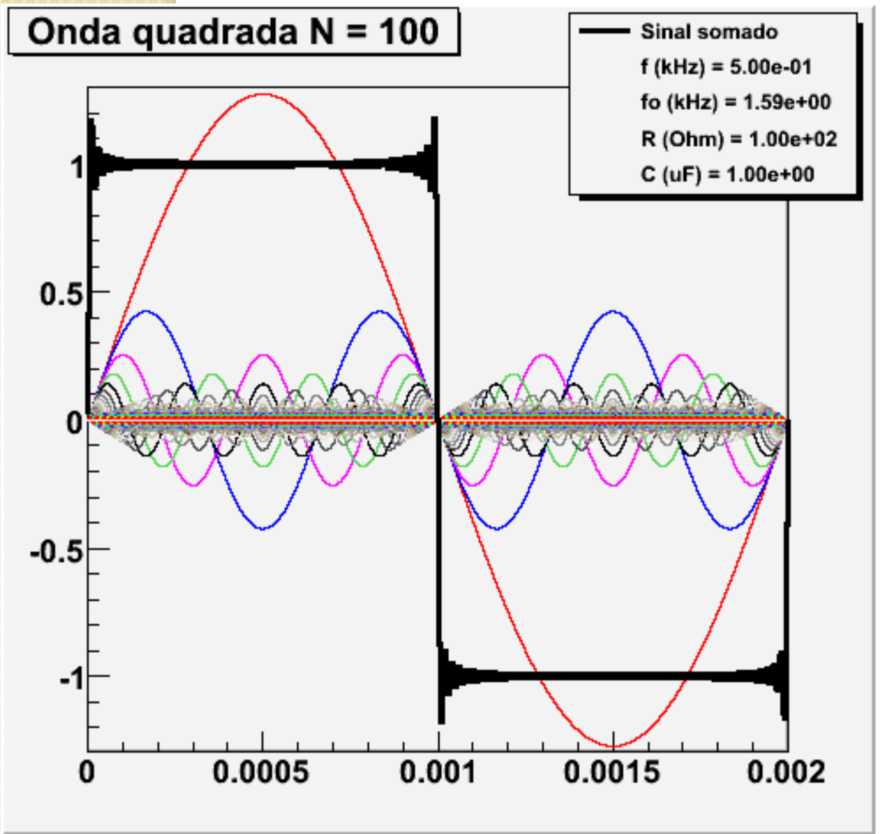
$$f_{sinal} = 100\ \text{Hz}$$

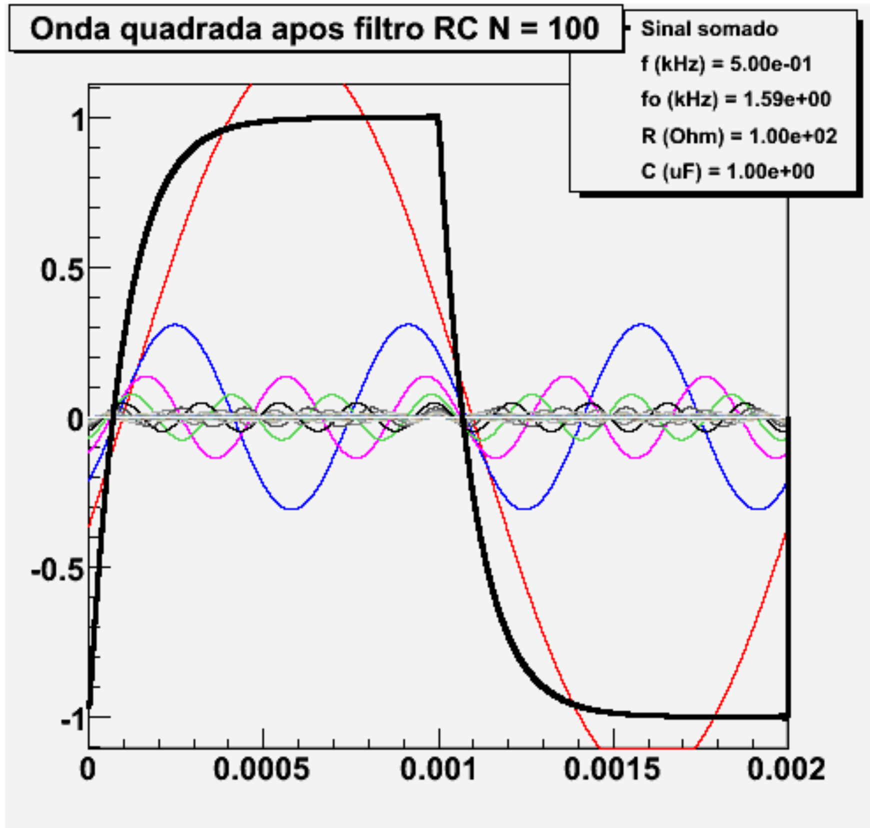




Filtro RC com $f_c = 1.5\ kHz$

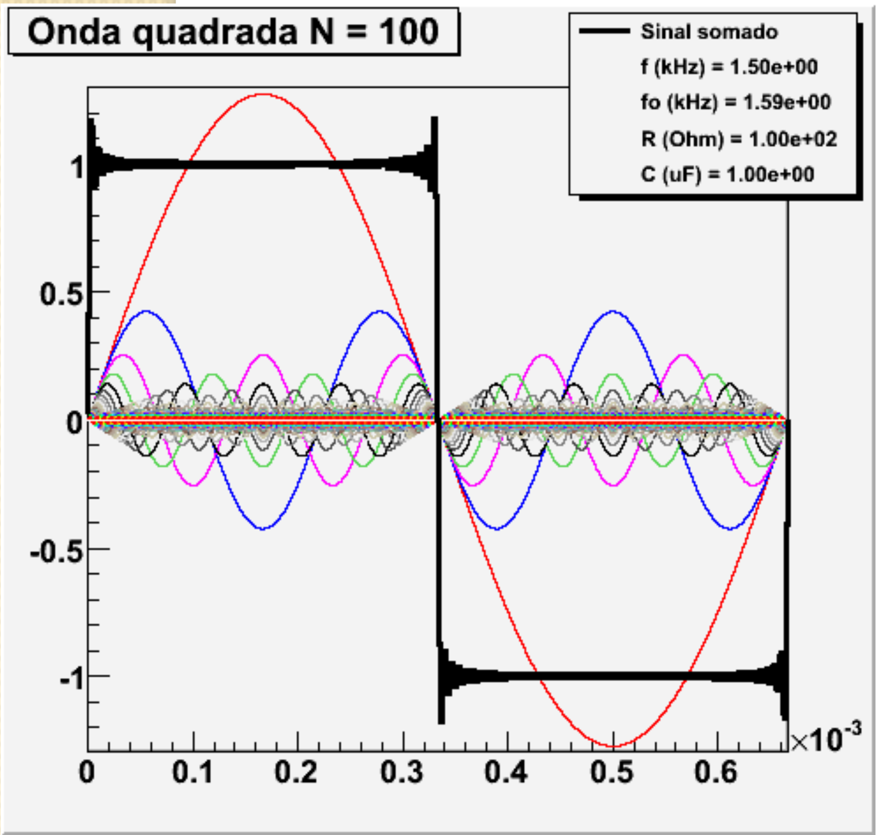
$$f_{sinal} = 500\ \text{Hz}$$

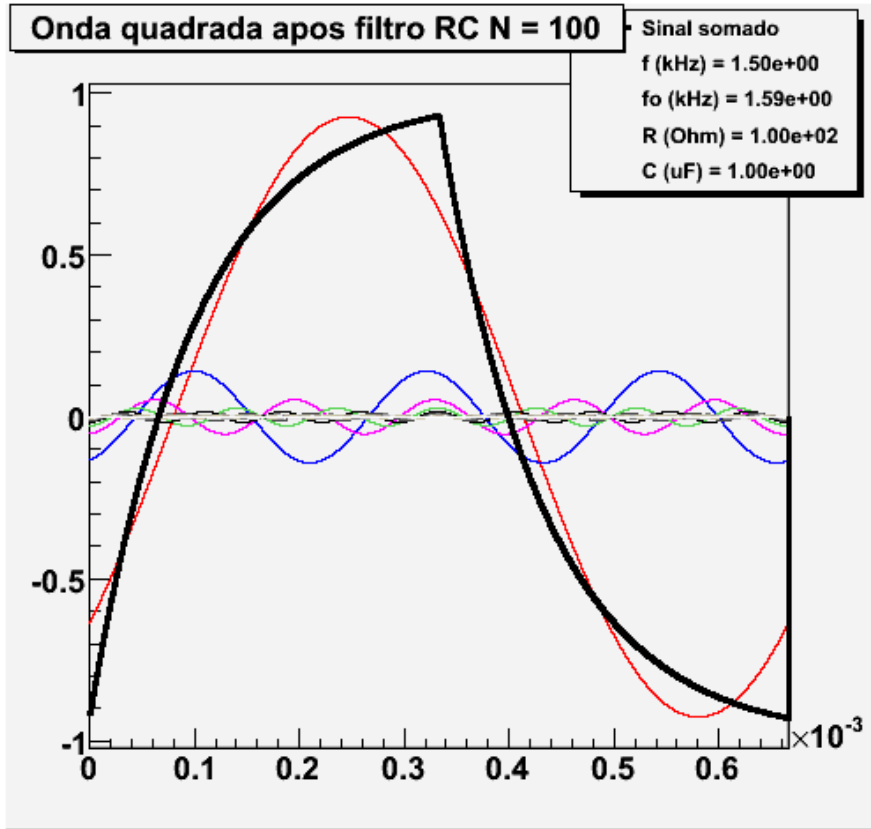




Filtro RC com $f_c = 1.5\ kHz$

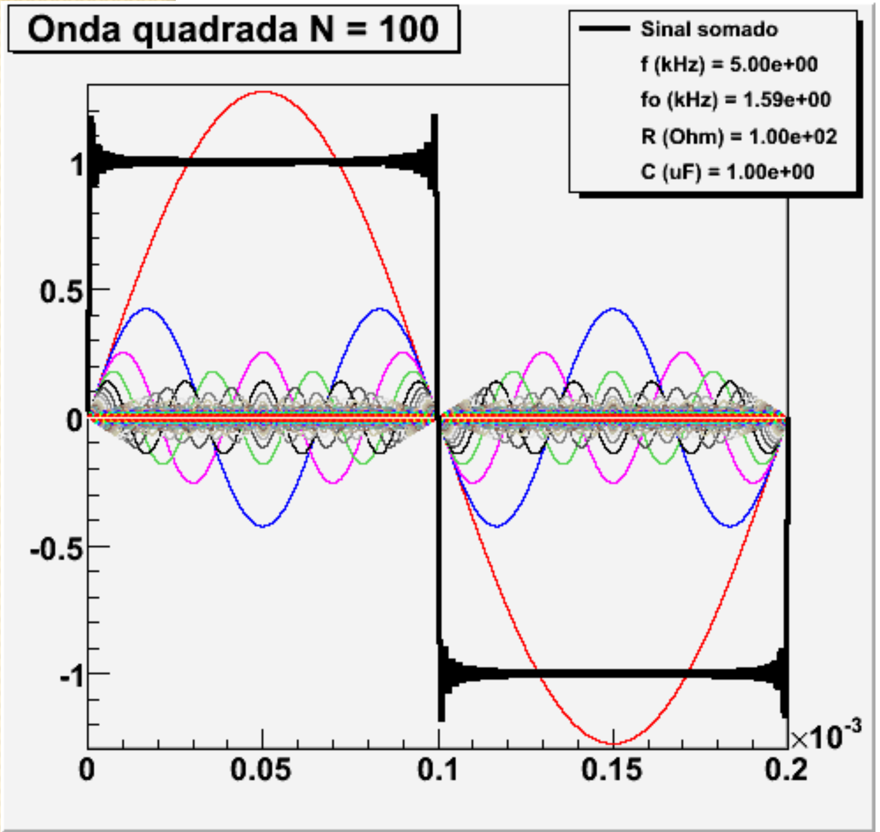
$$f_{sinal} = 1500\ \text{Hz}$$

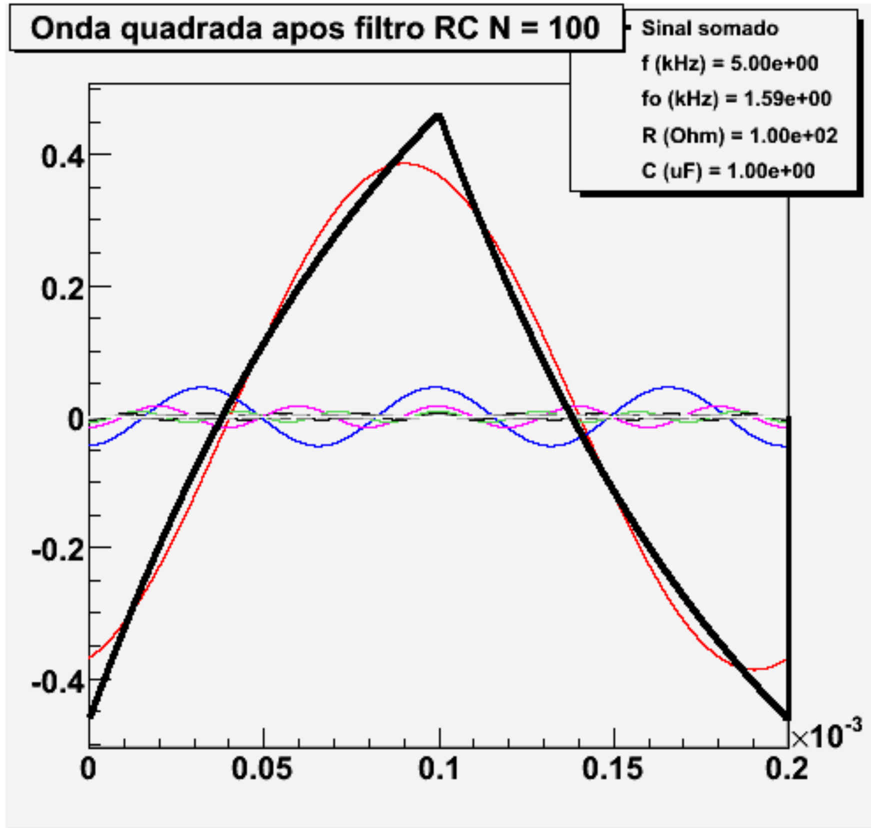




Filtro RC com $f_c = 1.5\ kHz$

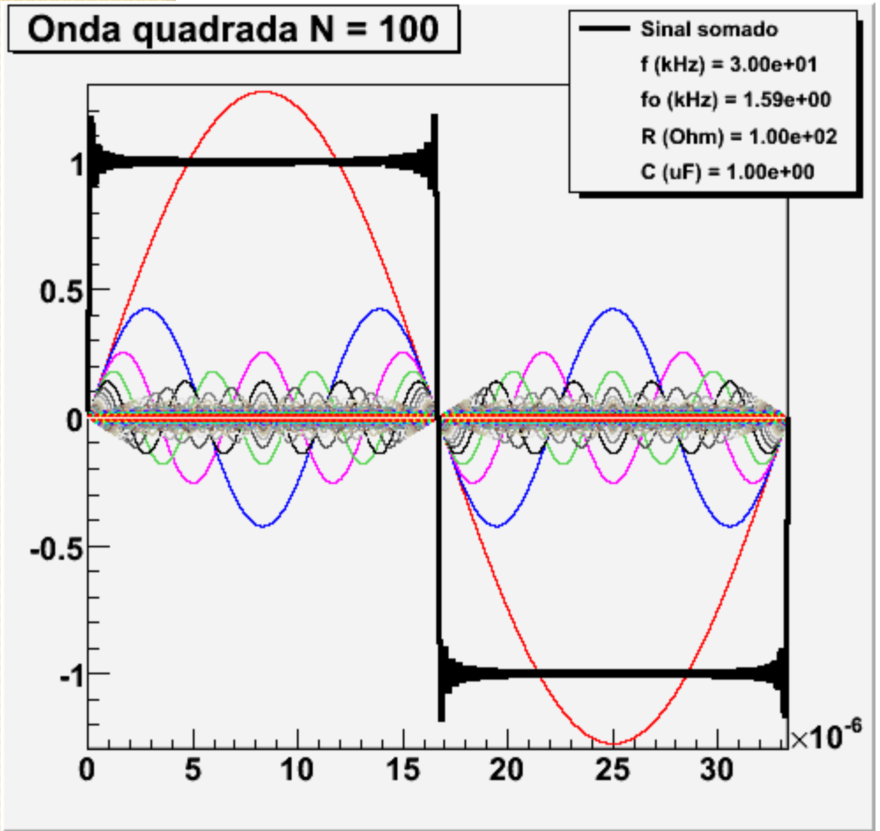
$$f_{sinal} = 5\ \text{kHz}$$

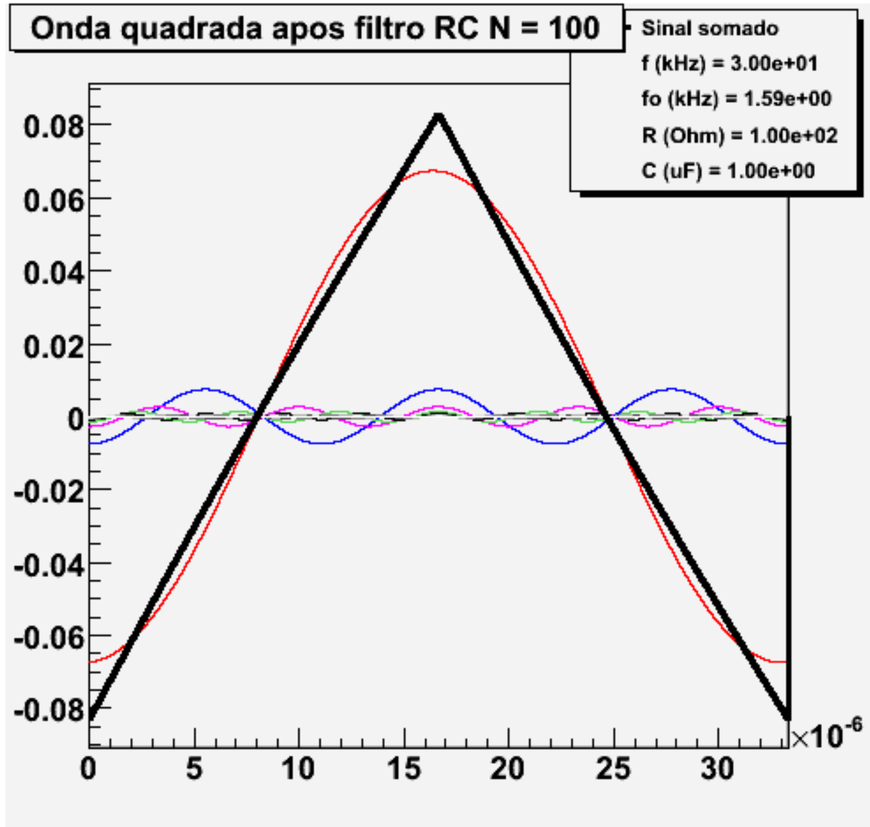




Filtro RC com $f_c = 1.5\ kHz$

$$f_{sinal} = 30\ \text{kHz}$$





Objetivos da semana

- Simular uma onda quadrada passando por um filtro RC passa baixa
  - Utilize uma série de Fourier com no mínimo 100 termos
  - Gerar ondas quadradas com pelo menos três frequências distintas (ver site para quais frequências)
- Simular o efeito do filtro RC com fc = 500 Hz
  - Utilizando as expressões de ganho e fase para este filtro, gerar o sinal de saída do filtro para as ondas simuladas acima
- Fazer os gráficos dos sinais de entrada e sinais de saída em função do tempo e discutir os resultados

Observações

- O trabalho desta semana é apenas computacional
  - Dá para fazer no Excel ou um programa simples
- Não teremos atividade de laboratório planejada
  - Contudo, o Lab estará disponível na quarta e na segunda-feira para:
    - Refazer medidas deste experimento
    - Para o projeto da disciplina
    - APROVEITEM!