Física Experimental III

Experimento II

Movimento de partículas carregadas em campos elétrico e magnético

Mais um pouco de estatística

Ajustes de funções e o método dos mínimos quadrados

Método da máxima verossimilhança

- Podemos definir uma função batizada de verossimilhança como sendo:

$$L = \prod_i H(y_i, \mu_i) = \prod_i H(y_i, f(x_i, \vec{a}))$$

- Vamos definir

$$\xi = -\ln L$$

- Note que mudei o sinal, vai ficar óbvio porque

Método da máxima verossimilhança

- Maximizar a verossimilhança significa minimizar a grandeza

$$\xi = -\ln L = -\sum_i \ln\left(H(y_i, f(x_i, \vec{a}))\right)$$

- E isto pode ser feito resolvendo um sistema de equações tal que:

$$\frac{\partial \xi}{\partial a_j} = 0$$

O Método dos mínimos quadrados

- No caso de as medidas y_i terem distribuições gaussianas temos que (note a inversão de sinal)

$$\xi = const + \frac{1}{2} X^2$$

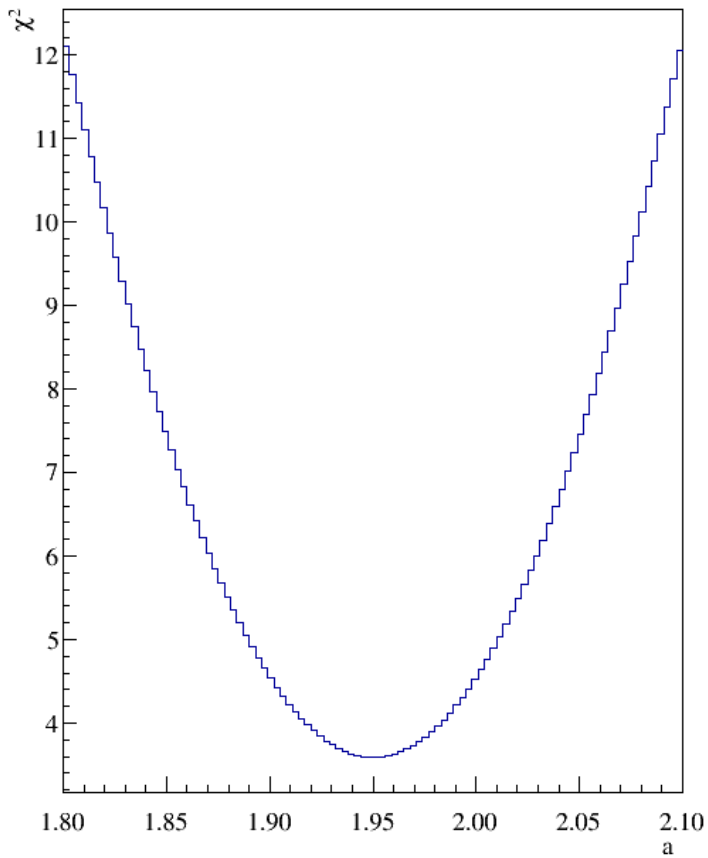
- E minimizar esta grandeza é o mesmo que minimizar o X^2, que é feito através da resolução de um sistema de equações tal que:

$$\frac{dX^2}{da_j} = 0$$

Neste caso

- Ajustar uma função de pontos gaussianos significa encontrar o mínimo global do X^2 para os parâmetros

- E as incertezas dos parâmetros? De onde elas vêem?



Incertezas nos parâmetros ajustados

- Vamos iniciar com o método da máxima verossimilhança. Vamos expandir ξ em uma série de Taylor em torno do mínimo ajustado.
  - Vamos admitir que as incertezas nos parâmetros são pequenas e que podemos truncar esta expansão nos primeiros termos

$$\xi = -\ln L = -\sum_i \ln\left(H(y_i, f(x_i, \vec{a}))\right)$$

$$\xi = \xi_0 + \underbrace{\sum_j \frac{\partial \xi}{\partial a_j}\left(a_j - \bar{a}_j\right)}_{0 \text{ (estou no mínimo)}} + \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial^2 \xi}{\partial a_j^2}\left(a_j - \bar{a}_j\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_j \sum_{k \neq j} \frac{\partial^2 \xi}{\partial a_j \partial a_k}\left(a_j - \bar{a}_j\right)\left(a_k - \bar{a}_k\right) + \ldots$$

  - O termo ξ_0 é o valor de ξ calculado no mínimo

Incertezas nos parâmetros ajustados

- Podemos então calcular a função verossimilhança

$$L = e^{-\xi}$$

- Que resulta em

$$L = e^{-\xi_0} \times e^{-\frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial^2 \xi}{\partial a_j^2}\left(a_j - \bar{a}_j\right)^2} \times e^{-\frac{1}{2}\sum_j \sum_{k \neq j} \frac{\partial^2 \xi}{\partial a_j \partial a_k}\left(a_j - \bar{a}_j\right)\left(a_k - \bar{a}_k\right)} \times \ldots$$

Incertezas nos parâmetros ajustados

- Se ξ for suficientemente parabólica em torno do mínimo os termos de ordem maiores são praticamente nulos
  - Exponencial destes termos ~ 1

$$L \sim e^{-\xi_0} \times \underbrace{e^{-\frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial^2 \xi}{\partial a_j^2}\left(a_j - \bar{a}_j\right)^2}}_{\text{Produto de gaussianas}} \times \underbrace{e^{-\frac{1}{2}\sum_j \sum_{k \neq j} \frac{\partial^2 \xi}{\partial a_j \partial a_k}\left(a_j - \bar{a}_j\right)\left(a_k - \bar{a}_k\right)}}_{\text{Termos de covariância entre parâmetros}}$$

- A função verossimilhança se assemelha a um produto de distribuições de probabilidade gaussianas com covariância

Incertezas nos parâmetros ajustados

- Por comparação

$$L \sim e^{-\xi_0} \times \underbrace{e^{-\frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial^2 \xi}{\partial a_j^2}\left(a_j - \bar{a}_j\right)^2}}_{\text{Produto de gaussianas}} \times \underbrace{e^{-\frac{1}{2}\sum_j \sum_{k \neq j} \frac{\partial^2 \xi}{\partial a_j \partial a_k}\left(a_j - \bar{a}_j\right)\left(a_k - \bar{a}_k\right)}}_{\text{Termos de covariância entre parâmetros}}$$

$$H(y,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- O que faz com que:

$$\sigma_{a_j}^2 = \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial a_j^2}\right)^{-1}$$

O Método dos mínimos quadrados

- No método dos mínimos quadrados, sabemos que

$$\xi = const + \frac{1}{2} X^2$$

- De tal modo que:

$$\sigma_{a_j}^2 = \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial a_j^2} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 X^2}{\partial a_j^2} \right)^{-1}$$

Vamos olhar a curva de X^2

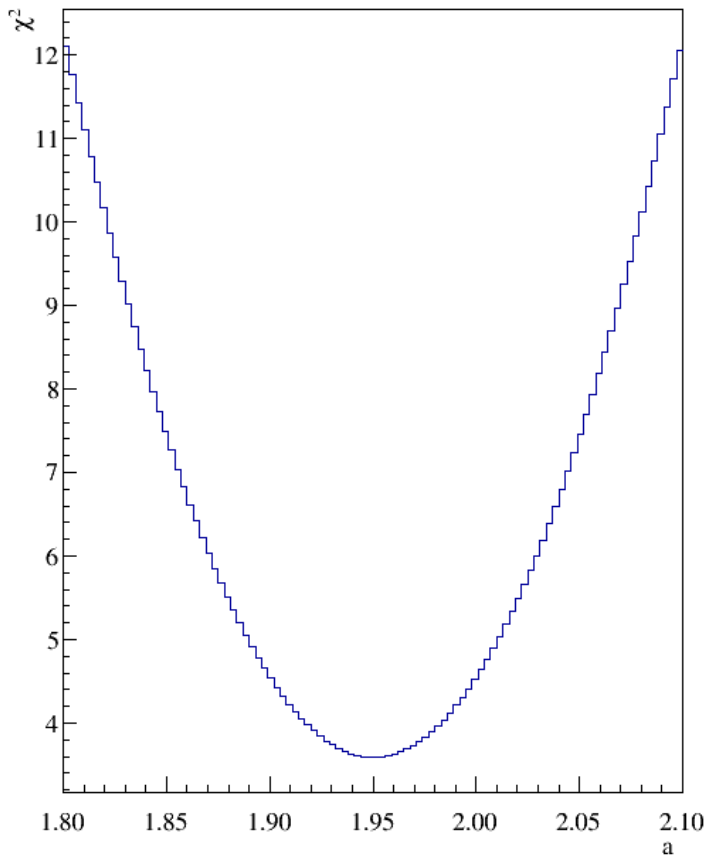
- Expandir em Taylor

$$X^2 = X^2_{\min} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 X^2}{\partial a^2}(a-\bar{a})^2 + \ldots$$

$$= X^2_{\min} + \frac{1}{\sigma_a^2}(a-\bar{a})^2 + \ldots$$

- Ou seja

$$\Delta X^2 = X^2 - X^2_{\min} \sim \frac{1}{\sigma_a^2}(a-\bar{a})^2$$



Vamos olhar a curva de X^2

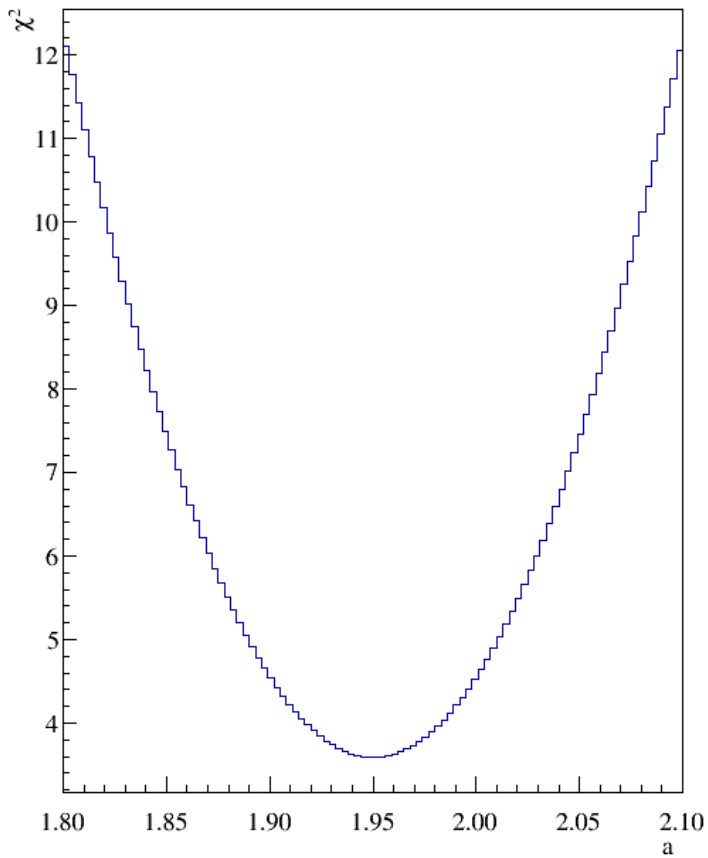
- De modo que

$$\Delta X^2 = X^2 - X^2_{\min} \sim \frac{1}{\sigma_a^2}(a-\bar{a})^2$$

- Se

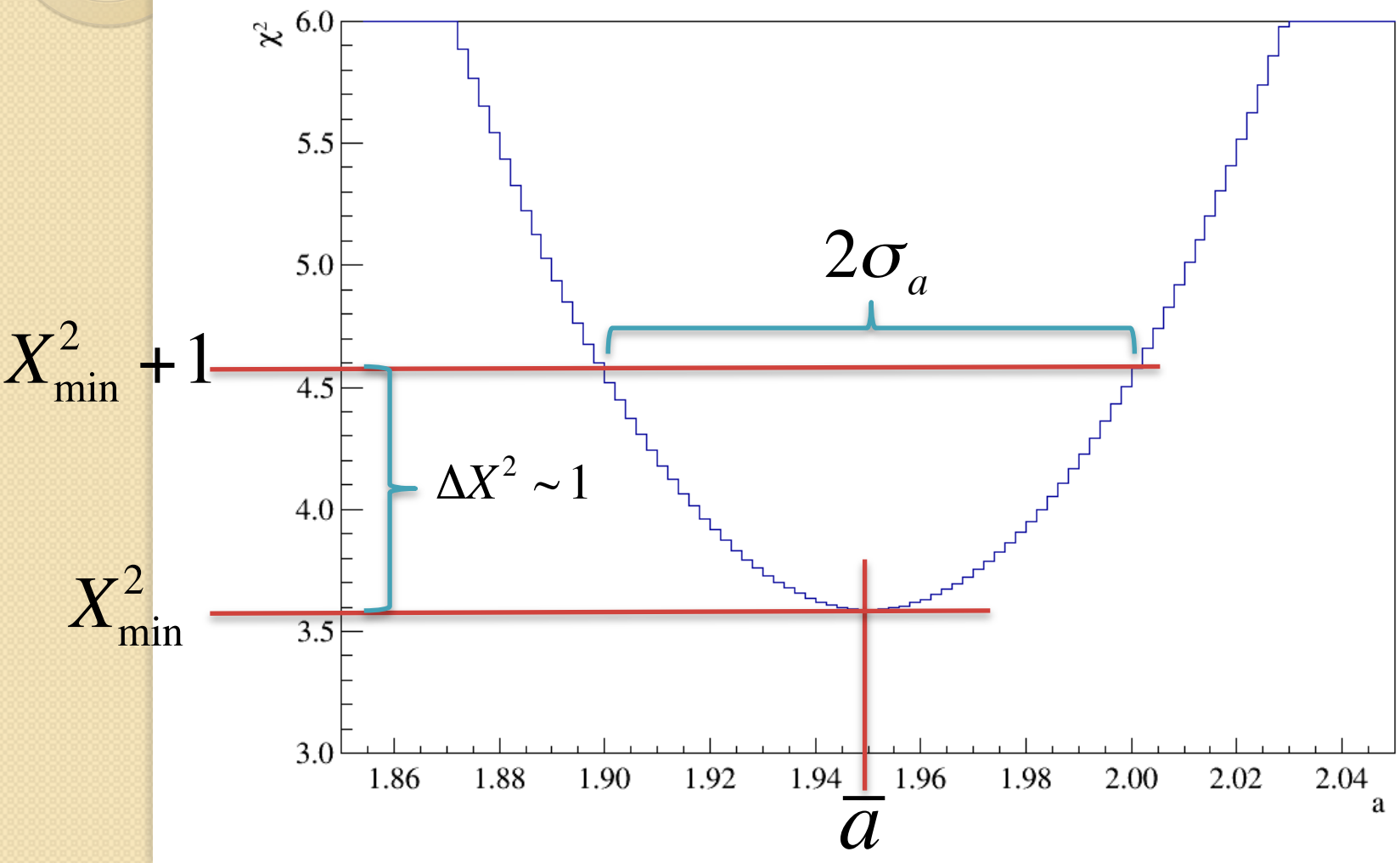
$$(a-\bar{a})^2 = \sigma_a^2 \rightarrow \Delta X^2 \sim 1$$

- Posso graficamente estimar a incerteza em a.



Incerteza de parâmetros do MMQ graficamente

$$(a-\bar{a})^2 = \sigma_a^2 \rightarrow \Delta X^2 \sim 1$$



Algumas considerações

- Nós supomos que a grandeza ξ seja suficientemente parabólica em torno do seu mínimo
  - Consequentemente, também o X^2 quando o MMQ se aplica.
  - Isto nem sempre é verdade mas em geral dá uma boa "estimativa" das incertezas nos parâmetros ajustados
    - Para fazer direito utiliza-se métodos de Monte Carlo

- Note que estamos olhando variação no X^2 e não no X^2_{red}.
  - Tem uma componente de raiz do número de graus de liberdade para considerar
    - CUIDADO QUE O $X^2_{red} + 1$ fica mais distante do mínimo do que o X^2 o que torna mais necessário verificar se a curva é realmente uma parábola.

Experiência II

Estudo de uma partícula em um campo eletromagnético

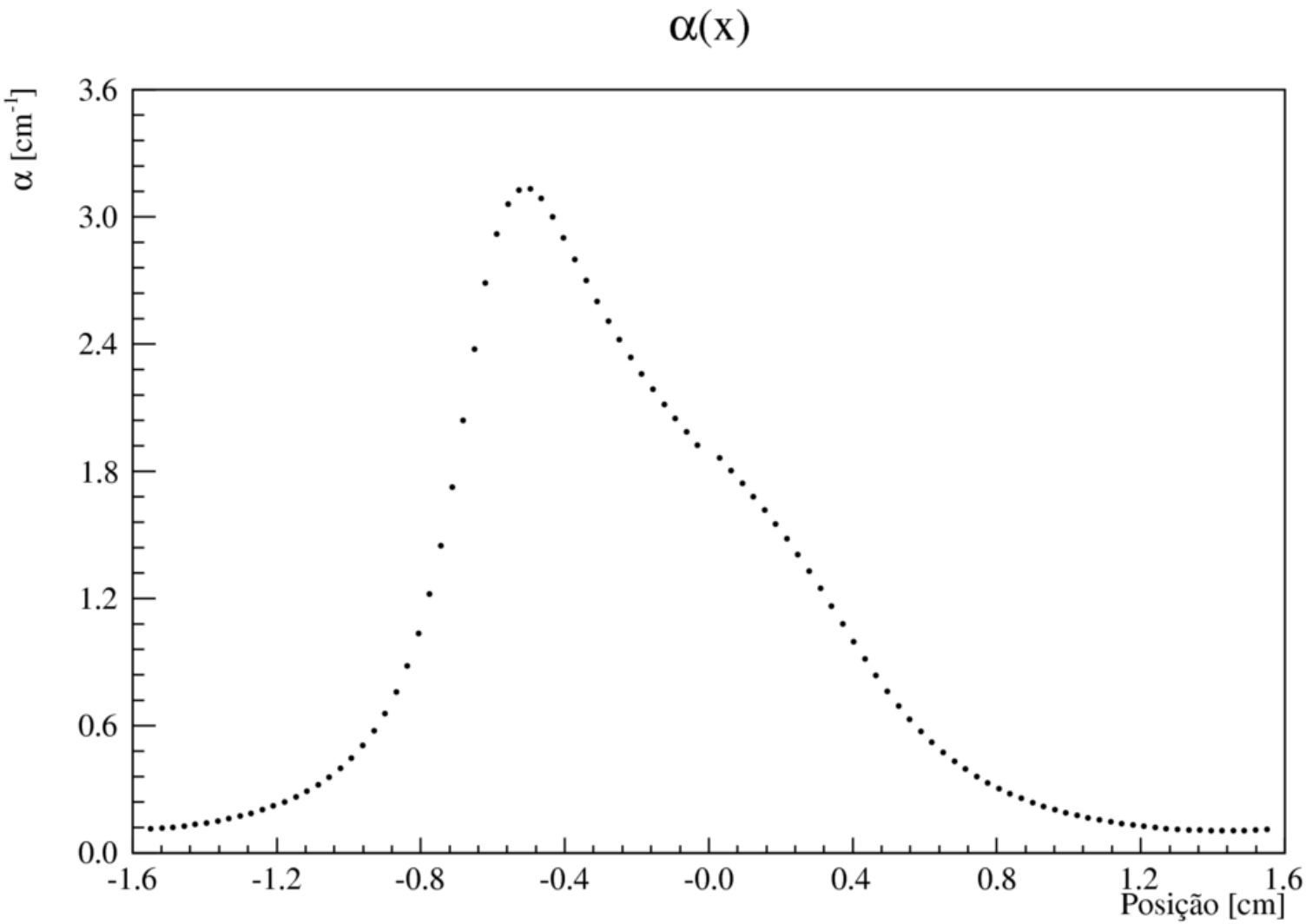
Construção de um acelerador de partículas

Mapeamento dos campos

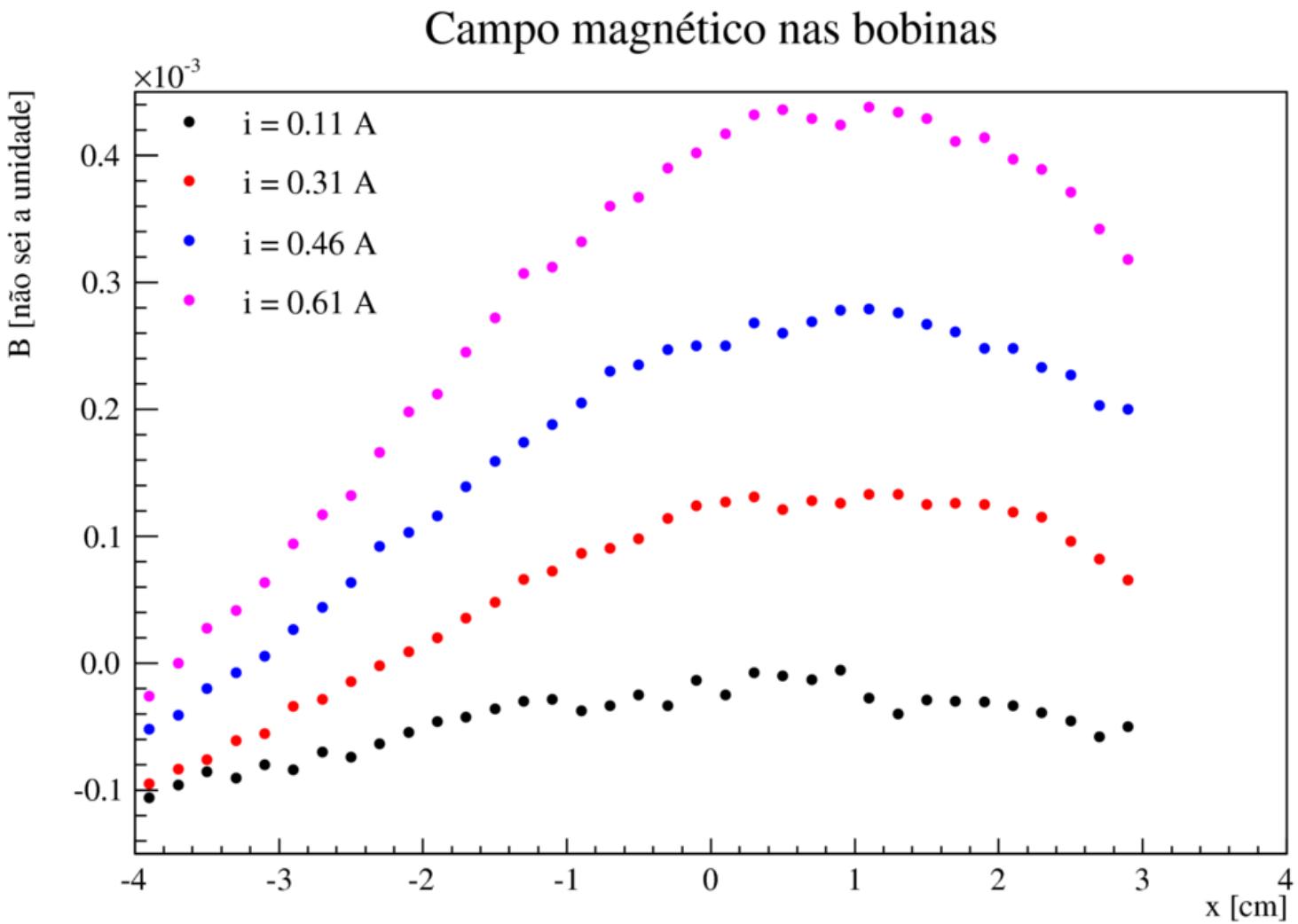
- Semana passada tinhamos como objetivo verificar quão distantes os campos reais estavam dos campos uniformes e ideais que supomos na construção dos modelos para os deslocamento das partículas.

- Esta semana vamos explorar como estes campos atuam nas partículas através da simulação realista das suas trajetórias

O campo elétrico → α(x)

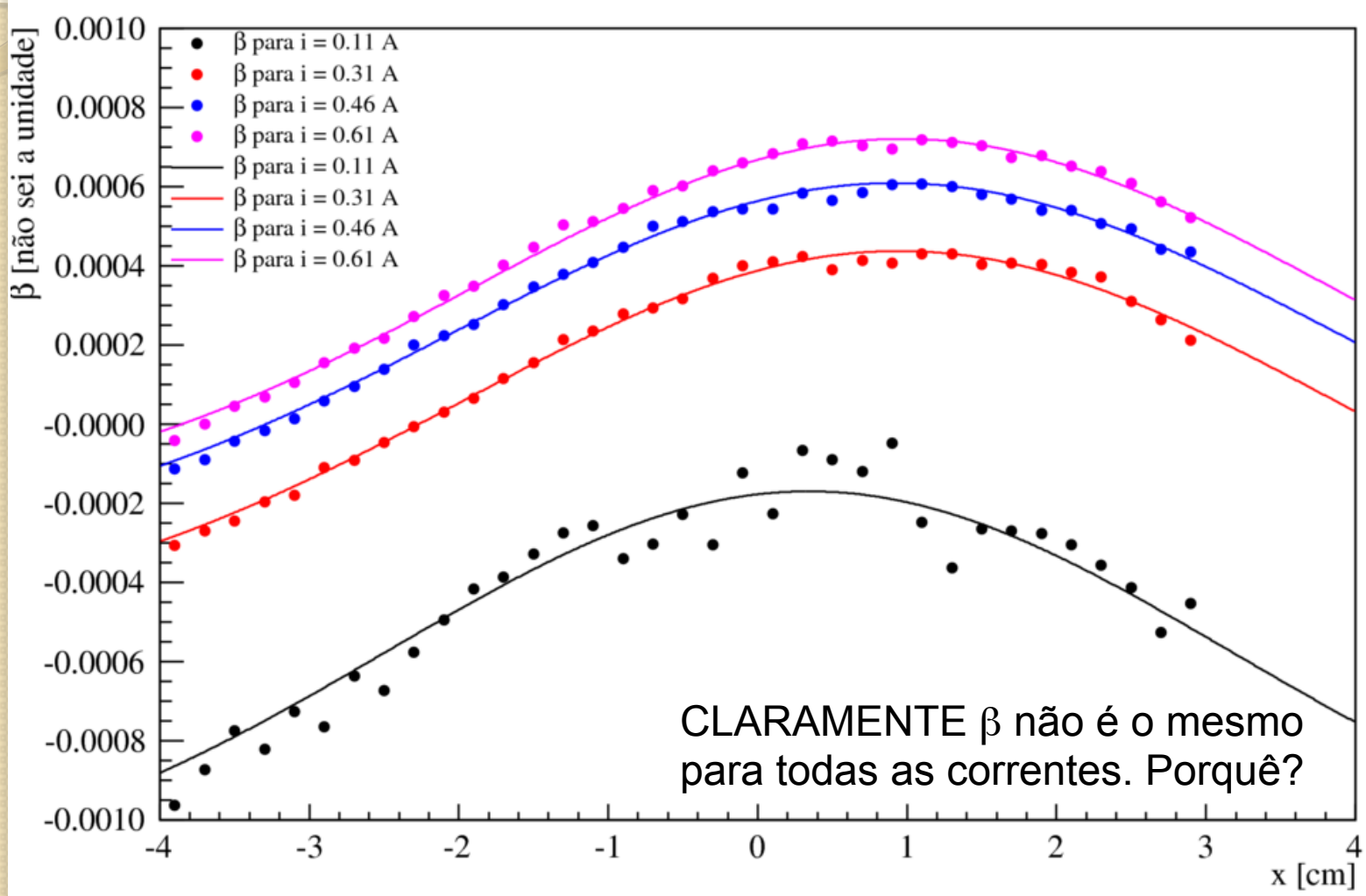


O campo magnético → β(x)

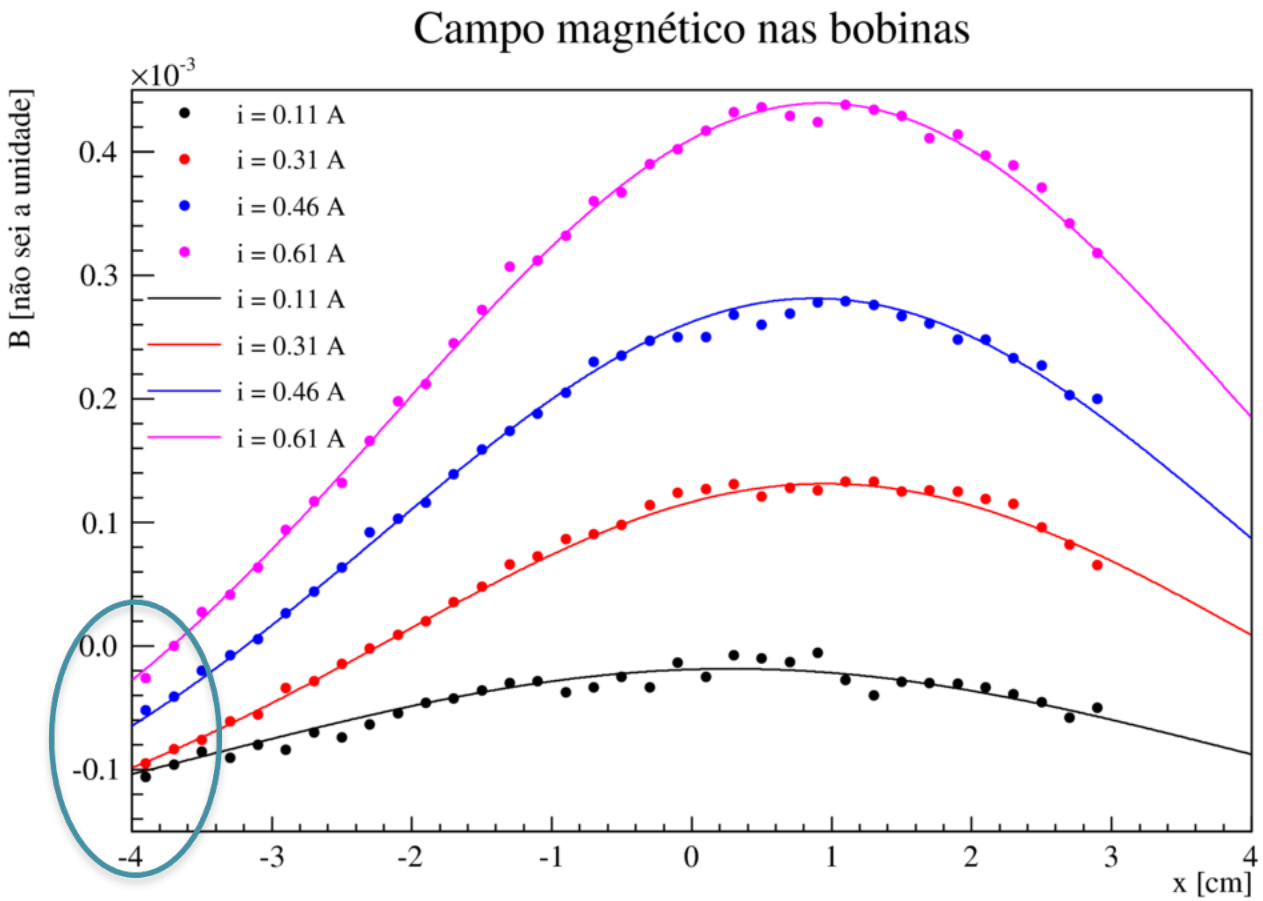


Este grupo não forneceu as incertezas para fazer uma análise mais cuidadosa

O campo magnético → β(x)



Vamos voltar aos campos e fazer um ajuste (gaussiana + constante)



$$B_0^{i=0.11A} = -9.8 \times 10^{-5}$$

$$B_0^{i=0.31A} = -18 \times 10^{-4}$$

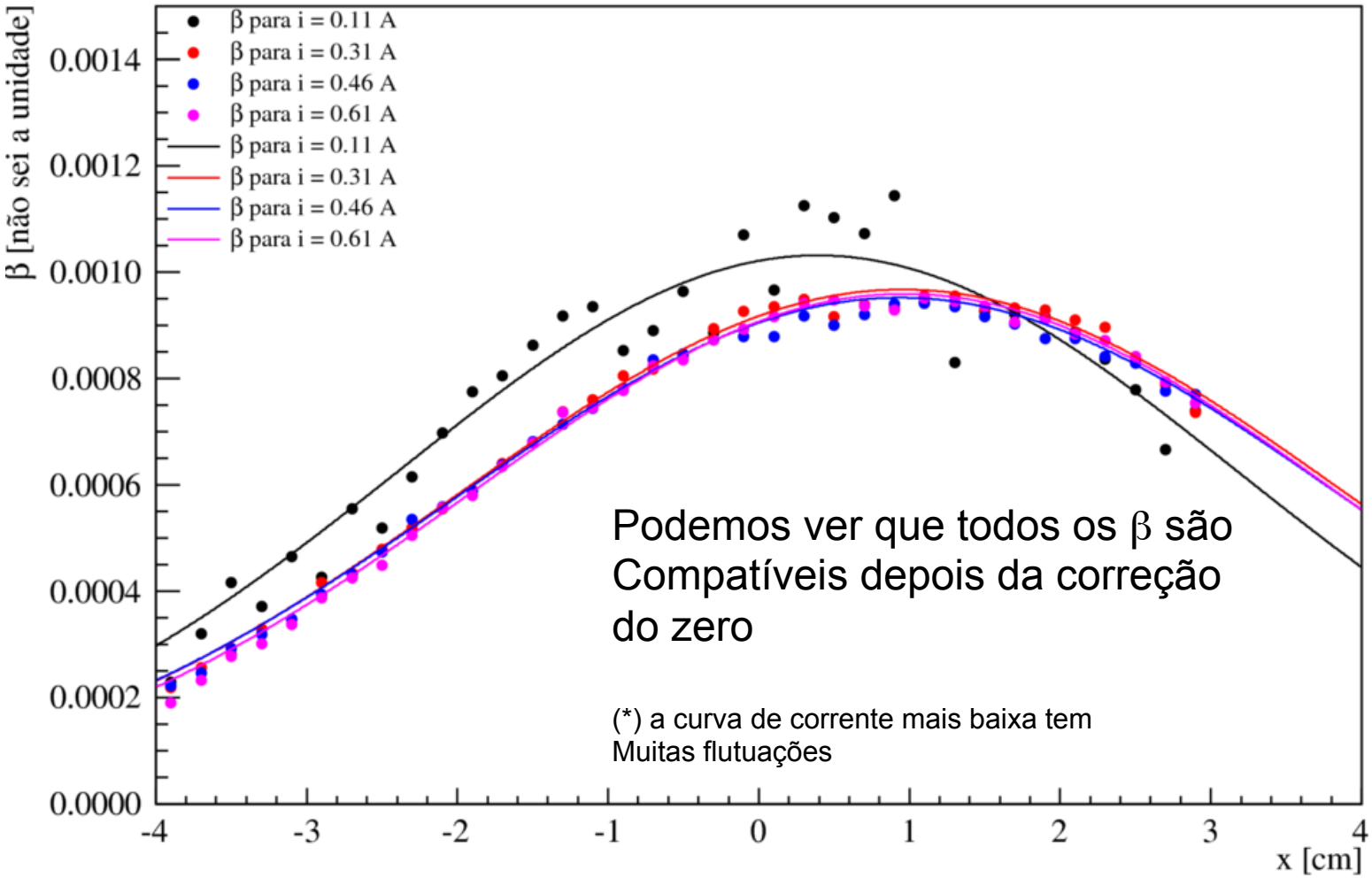
$$B_0^{i=0.46A} = -20 \times 10^{-4}$$

$$B_0^{i=0.61A} = -20 \times 10^{-4}$$

$$B = B_0 + B_{\max} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2}$$

Claramente o sensor não estava adequadamente zerado

Valores de β com o zero corrigido



Podemos ver que todos os β são Compatíveis depois da correção do zero

(*) a curva de corrente mais baixa tem Muitas flutuações

Calculando trajetórias de partículas no TRC

- Qual é a força que atua em uma partícula que está imersa em um campo eletromagnético?

$$\vec{F} = \vec{F}_{Elétrica} + \vec{F}_{Magnética}$$

- Se o campo elétrico e magnético são conhecidos

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Calculando trajetórias de partículas no TRC

- A trajetória de uma partícula qualquer pode ser descrita resolvendo-se as equações de movimento

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

- Ou seja, no campo EM:

$$m\frac{d}{dt}\vec{v} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

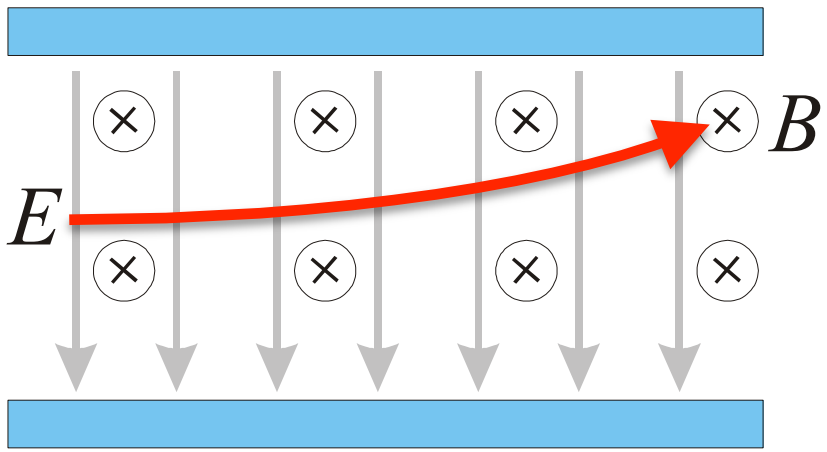
Calculando trajetórias de partículas no TRC

- O filtro de Wien consiste de uma configuração de campo elétrico e magnético cruzados (perpendiculares) e perpendiculares à velocidade ***inicial*** da partícula incidente

$$\vec{v}_0 = v_0\hat{i} \qquad \vec{E} = E\hat{k} \qquad \vec{B} = -B\hat{j}$$

- Porém, em uma posição qualquer, depois de as forças atuarem, a velocidade pode ter componentes em outras direções e pode ser escrita como:

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$



Equações de movimento

- Força resultante

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) = q\left(v_z B\hat{i} + (E - v_x B)\hat{k}\right)$$

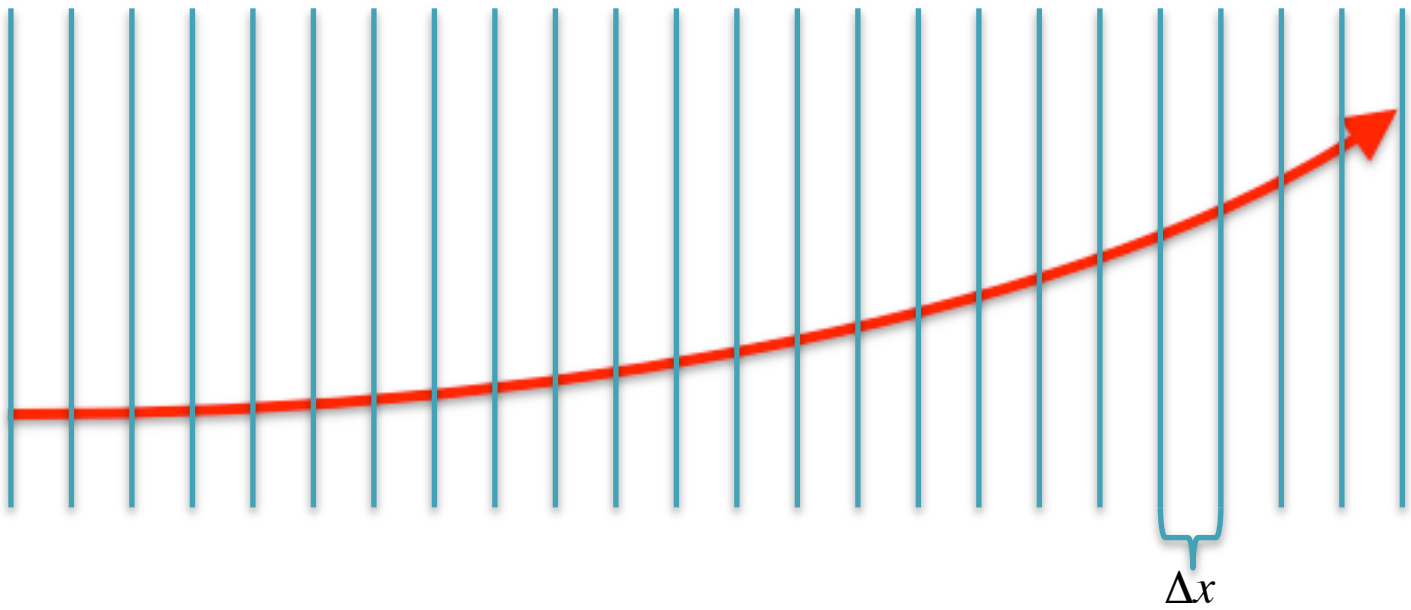
- Equações de movimento

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{q}{m} B v_z \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{q}{m}(E - B v_x) \end{aligned}\right\} \text{Equações acopladas}$$

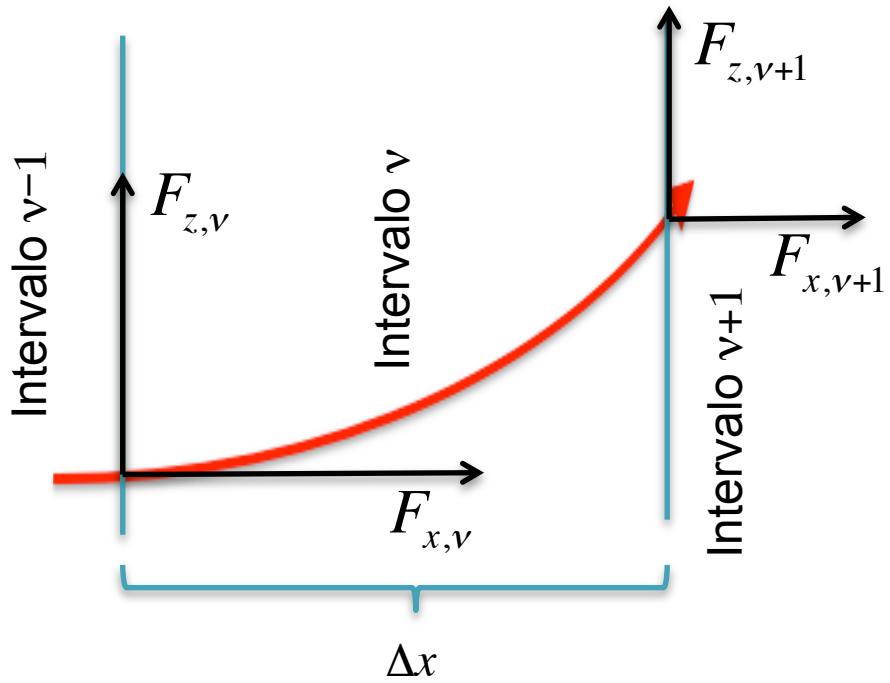
Resolvendo numericamente as equações

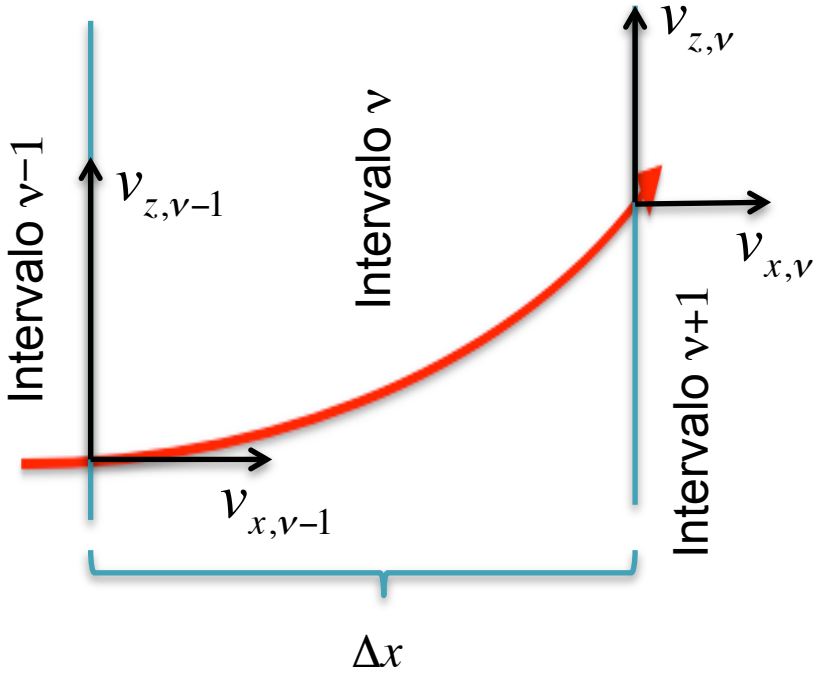
- Vamos dividir a trajetória da partícula em intervalod Δx pequenos o suficiente para supor que a força é aproximadamente constante neste intervalo
  - Isto desacopla as equações e os movimentos ficam com aceleração constante em cada intervalo



Resolvendo numericamente as equações

- Em cada intervalo Δx calculamos a força no início do intervalo, supomos ela constante e calculamos as componentes da velocidade e posição no final do intervalo





Então

- Cálculo das forças no intervalo

$$\begin{cases} F_{x,\nu} = qB_\nu v_{z,\nu-1} \\ F_{z,\nu} = q(E_\nu - B_\nu v_{x,\nu-1}) \\ a_{x,\nu} = \dfrac{1}{m} F_{x,\nu} \\ a_{z,\nu} = \dfrac{1}{m} F_{z,\nu} \end{cases}$$

- Quais são os campos em cada intervalo

$$\begin{cases} E_\nu = \alpha(x_\nu) V_P \\ B_\nu = \beta(x_\nu) i \end{cases}$$

Então

- Velocidades no final do intervalo supondo MUA no intervalo

$$\begin{cases} v_{x,\nu} = \sqrt{v_{x,\nu-1}^2 + 2a_{x,\nu}\Delta x} \\ \Delta t_\nu = \dfrac{\Delta x}{\langle v \rangle_\nu} = \dfrac{2\Delta x}{v_{x,\nu} + v_{x,\nu-1}} \\ v_{z,\nu} = v_{z,\nu-1} + a_{z,\nu}\Delta t_\nu \end{cases}$$

- Posição z em cada intervalo (porque a posição x nós sabemos)

$$\left\{ z_\nu = z_{\nu-1} + v_{z,\nu-1}\Delta t_\nu + \frac{1}{2}a_{z,\nu}\Delta t_\nu^2 \right.$$

Implementação no Excel

planilha no site para baixar e usar

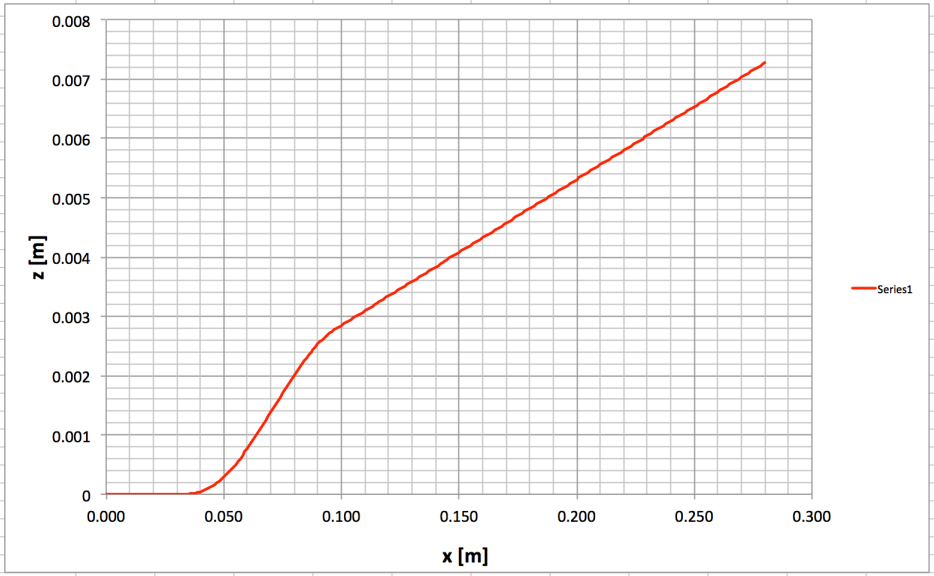
Cálculo de trajetória de uma partícula. Para desligar o campo elétrico faça VP = 0. Para deligar o campo magnético, faça I = 0

VP (V) =	4.55	me (kg) =	9.11E-31	VAC (V) =	1000	dx (m) =	0.001
I (A) =	0.2	q (C) =	1.60E-19	vx0 (m/s) =	1.87E+07		

Só altere VP, I e VA

Somente altere as colunas alfa(x) e beta(x) com os parâmetros obtidos pelo seu grupo. As demais colunas são calculadas automaticamente

x (m)	alfa(x) (1/m)	beta(x) (T/A)	E (V/m)	B (T)	Fx (N)	Fz (N)	ax (m/s2)	az (m/s2)	vx (m/s)	Δt (s)	vz (m/s)	z (m)	
0.000	0	0	0	0	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.87E+07	5.34E-11	0	0	Não altere esta linha. São as condições iniciais
0.033	0	0	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.87E+07	5.34E-11	0.00E+00	0.00E+00	
0.034	0	0	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.87E+07	5.34E-11	0.00E+00	0.00E+00	
0.035	1000	0	4.55E+03	0.00E+00	0.00E+00	7.28E-16	0.00E+00	7.99E+14	1.87E+07	5.34E-11	4.26E+04	1.14E-06	
0.036	1000	0	4.55E+03	0.00E+00	0.00E+00	7.28E-16	0.00E+00	7.99E+14	1.87E+07	5.34E-11	8.53E+04	4.55E-06	
0.037	1000	0	4.55E+03	0.00E+00	0.00E+00	7.28E-16	0.00E+00	7.99E+14	1.87E+07	5.34E-11	1.28E+05	1.02E-05	
0.038	1000	0	4.55E+03	0.00E+00	0.00E+00	7.28E-16	0.00E+00	7.99E+14	1.87E+07	5.34E-11	1.71E+05	1.82E-05	
0.039	1000	0	4.55E+03	0.00E+00	0.00E+00	7.28E-16	0.00E+00	7.99E+14	1.87E+07	5.34E-11	2.13E+05	2.84E-05	
0.040	1000	0	4.55E+03	0.00E+00	0.00E+00	7.28E-16	0.00E+00	7.99E+14	1.87E+07	5.34E-11	2.56E+05	4.10E-05	
0.041	1000	0	4.55E+03	0.00E+00	0.00E+00	7.28E-16	0.00E+00	7.99E+14	1.87E+07	5.34E-11	2.98E+05	5.57E-05	
0.042	1000	0	4.55E+03	0.00E+00	0.00E+00	7.28E-16	0.00E+00	7.99E+14	1.87E+07	5.34E-11	3.41E+05	7.28E-05	
0.043	1000	0	4.55E+03	0.00E+00	0.00E+00	7.28E-16	0.00E+00	7.99E+14	1.87E+07	5.34E-11	3.84E+05	9.21E-05	
0.044	1000	0	4.55E+03	0.00E+00	0.00E+00	7.28E-16	0.00E+00	7.99E+14	1.87E+07	5.34E-11	4.26E+05	1.14E-04	
0.045	1000	0	4.55E+03	0.00E+00	0.00E+00	7.28E-16	0.00E+00	7.99E+14	1.87E+07	5.34E-11	4.69E+05	1.38E-04	
0.046	1000	0	4.55E+03	0.00E+00	0.00E+00	7.28E-16	0.00E+00	7.99E+14	1.87E+07	5.34E-11	5.12E+05	1.64E-04	
0.047	1000	0	4.55E+03	0.00E+00	0.00E+00	7.28E-16	0.00E+00	7.99E+14	1.87E+07	5.34E-11	5.54E+05	1.92E-04	
0.048	1000	0	4.55E+03	0.00E+00	0.00E+00	7.28E-16	0.00E+00	7.99E+14	1.87E+07	5.34E-11	5.97E+05	2.23E-04	
0.049	1000	0	4.55E+03	0.00E+00	0.00E+00	7.28E-16	0.00E+00	7.99E+14	1.87E+07	5.34E-11	6.40E+05	2.56E-04	
0.050	1000	0	4.55E+03	0.00E+00	0.00E+00	7.28E-16	0.00E+00	7.99E+14	1.87E+07	5.34E-11	6.82E+05	2.91E-04	
0.051	1000	0	4.55E+03	0.00E+00	0.00E+00	7.28E-16	0.00E+00	7.99E+14	1.87E+07	5.34E-11	7.25E+05	3.29E-04	
0.052	1000	0	4.55E+03	0.00E+00	0.00E+00	7.28E-16	0.00E+00	7.99E+14	1.87E+07	5.34E-11	7.67E+05	3.69E-04	
0.053	1000	0	4.55E+03	0.00E+00	0.00E+00	7.28E-16	0.00E+00	7.99E+14	1.87E+07	5.34E-11	8.10E+05	4.11E-04	
0.054	1000	0	4.55E+03	0.00E+00	0.00E+00	7.28E-16	0.00E+00	7.99E+14	1.87E+07	5.34E-11	8.53E+05	4.55E-04	
0.055	1000	0	4.55E+03	0.00E+00	0.00E+00	7.28E-16	0.00E+00	7.99E+14	1.87E+07	5.34E-11	8.95E+05	5.02E-04	
0.056	1000	0	4.55E+03	0.00E+00	0.00E+00	7.28E-16	0.00E+00	7.99E+14	1.87E+07	5.34E-11	9.38E+05	5.51E-04	
0.057	1000	0	4.55E+03	0.00E+00	0.00E+00	7.28E-16	0.00E+00	7.99E+14	1.87E+07	5.34E-11	9.81E+05	6.02E-04	
0.058	1000	0	4.55E+03	0.00E+00	0.00E+00	7.28E-16	0.00E+00	7.99E+14	1.87E+07	5.34E-11	1.02E+06	6.55E-04	
0.059	1000	0	4.55E+03	0.00E+00	0.00E+00	7.28E-16	0.00E+00	7.99E+14	1.87E+07	5.34E-11	1.07E+06	7.11E-04	
0.060	1000	0	4.55E+03	0.00E+00	0.00E+00	7.28E-16	0.00E+00	7.99E+14	1.87E+07	5.34E-11	1.11E+06	7.69E-04	
0.061	1000	0.001	4.55E+03	2.00E-04	3.55E-17	1.28E-16	3.89E+13	1.41E+14	1.87E+07	5.34E-11	1.12E+06	8.28E-04	
0.062	1000	0.001	4.55E+03	2.00E-04	3.57E-17	1.28E-16	3.92E+13	1.41E+14	1.87E+07	5.33E-11	1.12E+06	8.88E-04	
0.063	1000	0.001	4.55E+03	2.00E-04	3.60E-17	1.28E-16	3.95E+13	1.41E+14	1.87E+07	5.33E-11	1.13E+06	9.48E-04	
0.064	1000	0.001	4.55E+03	2.00E-04	3.62E-17	1.28E-16	3.97E+13	1.41E+14	1.88E+07	5.33E-11	1.14E+06	1.01E-03	
0.065	1000	0.001	4.55E+03	2.00E-04	3.64E-17	1.28E-16	4.00E+13	1.40E+14	1.88E+07	5.33E-11	1.15E+06	1.07E-03	
0.066	1000	0.001	4.55E+03	2.00E-04	3.67E-17	1.28E-16	4.03E+13	1.40E+14	1.88E+07	5.33E-11	1.15E+06	1.13E-03	
0.067	1000	0.001	4.55E+03	2.00E-04	3.69E-17	1.28E-16	4.05E+13	1.40E+14	1.88E+07	5.33E-11	1.16E+06	1.19E-03	



Atividades da semana

- Não temos nenhuma atividade de laboratório
  - Aproveitem para refazer e completar medidas das semanas anteriores
- Simulações de trajetórias
  - Quão bons são os modelos ideais das primeiras semanas?
  - Como são as trajetórias e deslocamentos considerando os campos reais que agem sobre as partículas aceleradas no TRC

Atividades da semana

- Baixe a planilha do site
  - Coloque as tabelas de $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ simuladas ou medidas nas semanas anteriores
    - Cuidado com o posicionamento destas tabelas no eixo-x do TRC

- Faça as simulações, mudando a tensão entre as placas e a corrente nas bobinas e responda às perguntas no site