Um pouco de estatística…

Caixa de Galton

Uma pergunta recorrente

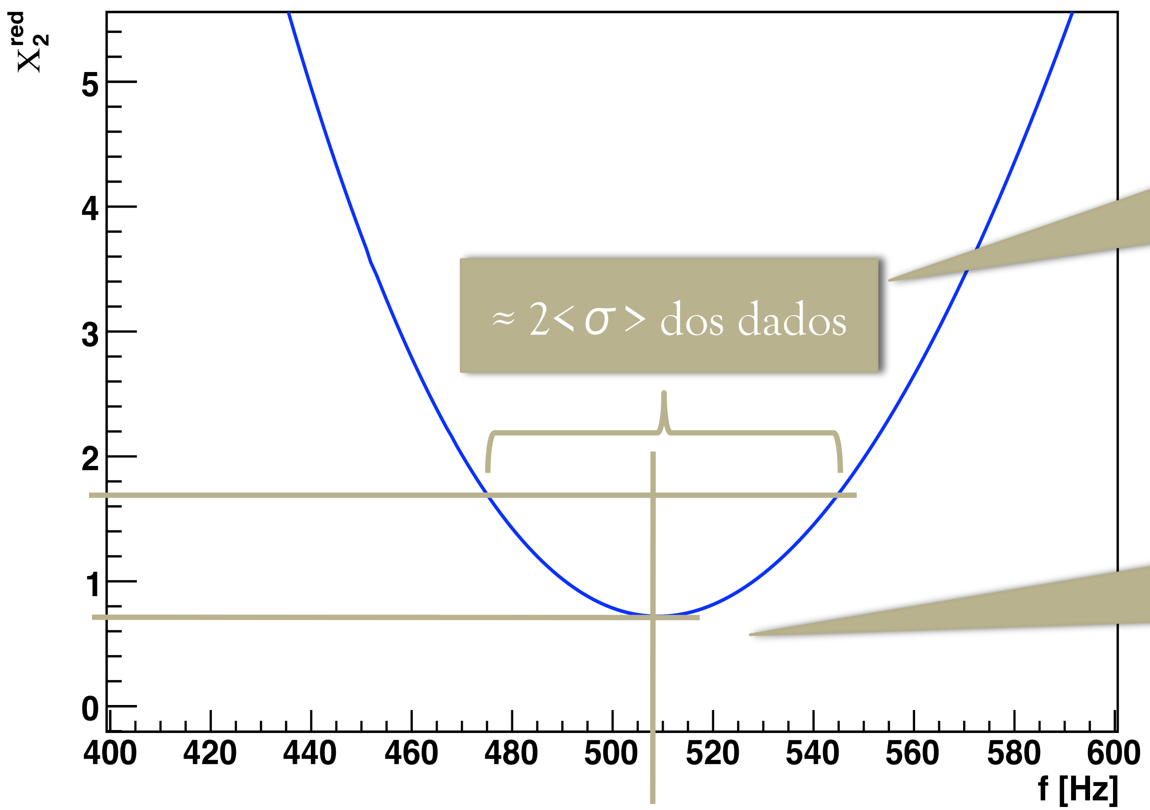
- Quando eu sei se o chi^2 de um ajuste é bom ou ruim?

  - $Chi^2_{red} \sim 1$
    - Ordem de grandeza apenas ou tem algum intervalo numérico definido?

  - E se o chi^2 for muito grande ou muito pequeno?

FAZENDO UM AJUSTE DE DADOS

$$X^2_{red} = \frac{1}{N-n}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{y_i - f(x_i)}{\sigma_i}\right)^2$$



A incerteza do parâmetro ajustado é, aproximadamente, $\sigma/\sqrt{N}$

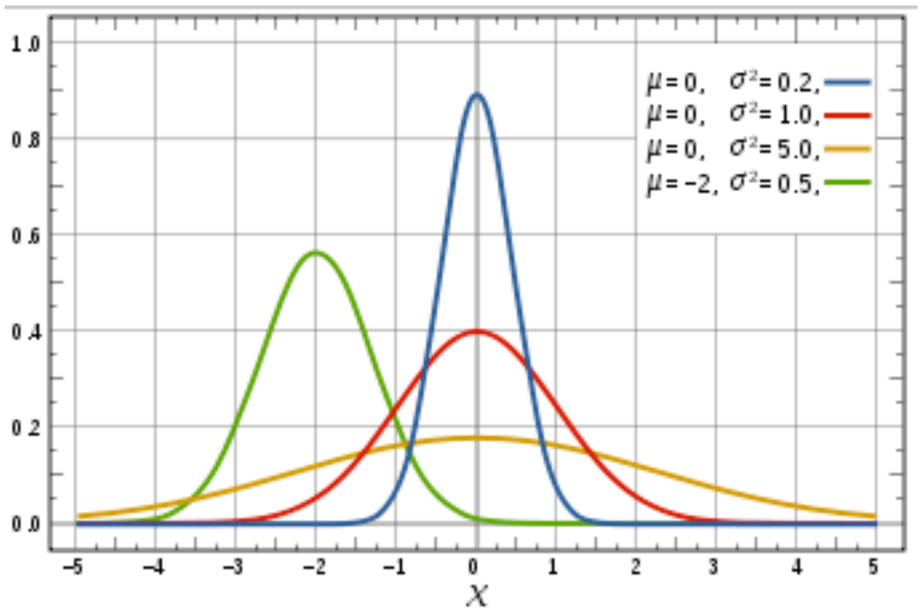
$$f = 508 \pm 11\ Hz$$

Quando um ajuste é bom? Como eu posso usar o X^2 como teste de qualidade?

Funções de densidade de probabilidade (F.D.P.)

- A F.D.P. mais conhecida é a distribuição normal, ou gaussiana.

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



F.D.P. de X^2.

- Vamos realizar um experimento virtual, no qual iremos simular a obtenção da amostra $X_{ndf} = \{x_i\}$.

- A partir dessa amostra vamos calcular a variável de interesse (no nosso caso, o Chi^2)

- Vamos repetir esse experimento virtual um número muito grande de vezes de modo a obter as F.D.P. das variáveis estudadas.

Para simplificar o problema

- Ao invés de usar a amostra X, vamos fazer uma mudança de variável tal que

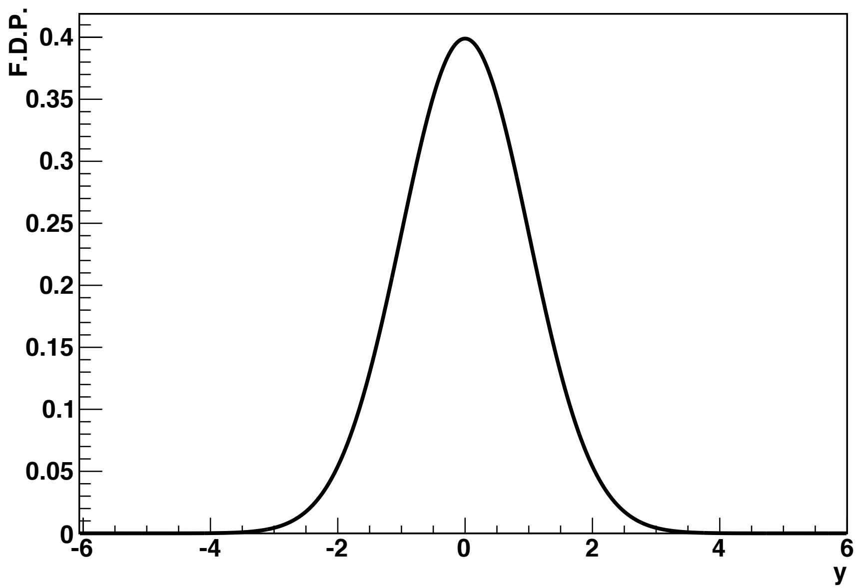
$$Y = \{y_i\} \rightarrow y_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma_\mu}$$

- Ou seja, vamos estudar uma amostra de valor verdadeiro 0 e variância 1.
  - .Para F.D.P. com médias e variâncias diferentes, basta uma mudança de escala.

F.D.P. de *y*.

- Y segue uma distribuição normal de valor verdadeiro 0 e variância 1, ou seja:

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$$



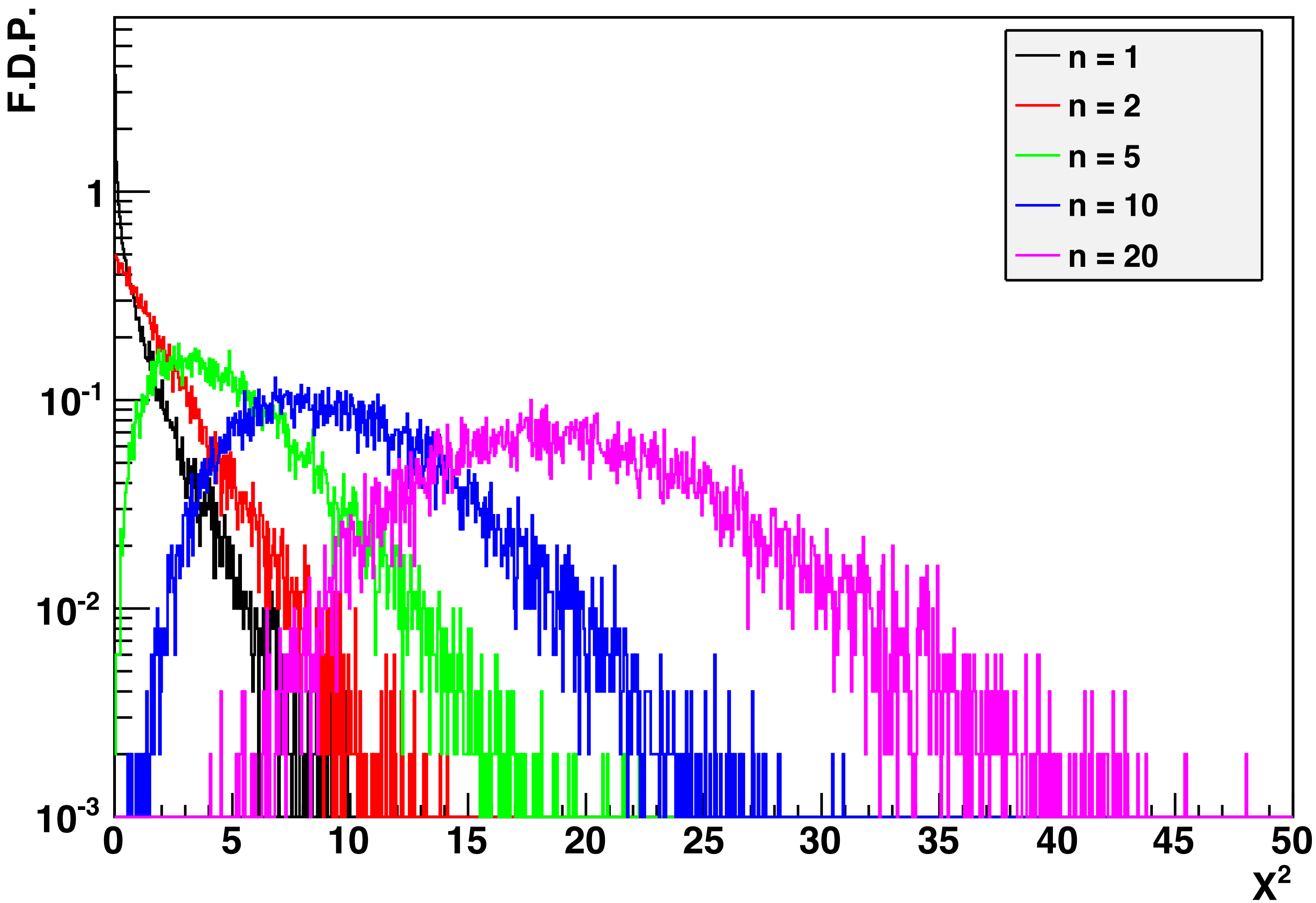
F.D.P. de X^2.

- A função X^2 é definida como:

$$X^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma_\mu} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

- A F.D.P. é obtida calculando o valor de X^2 para cada conjunto de dados simulado

F.D.P. de X^2.



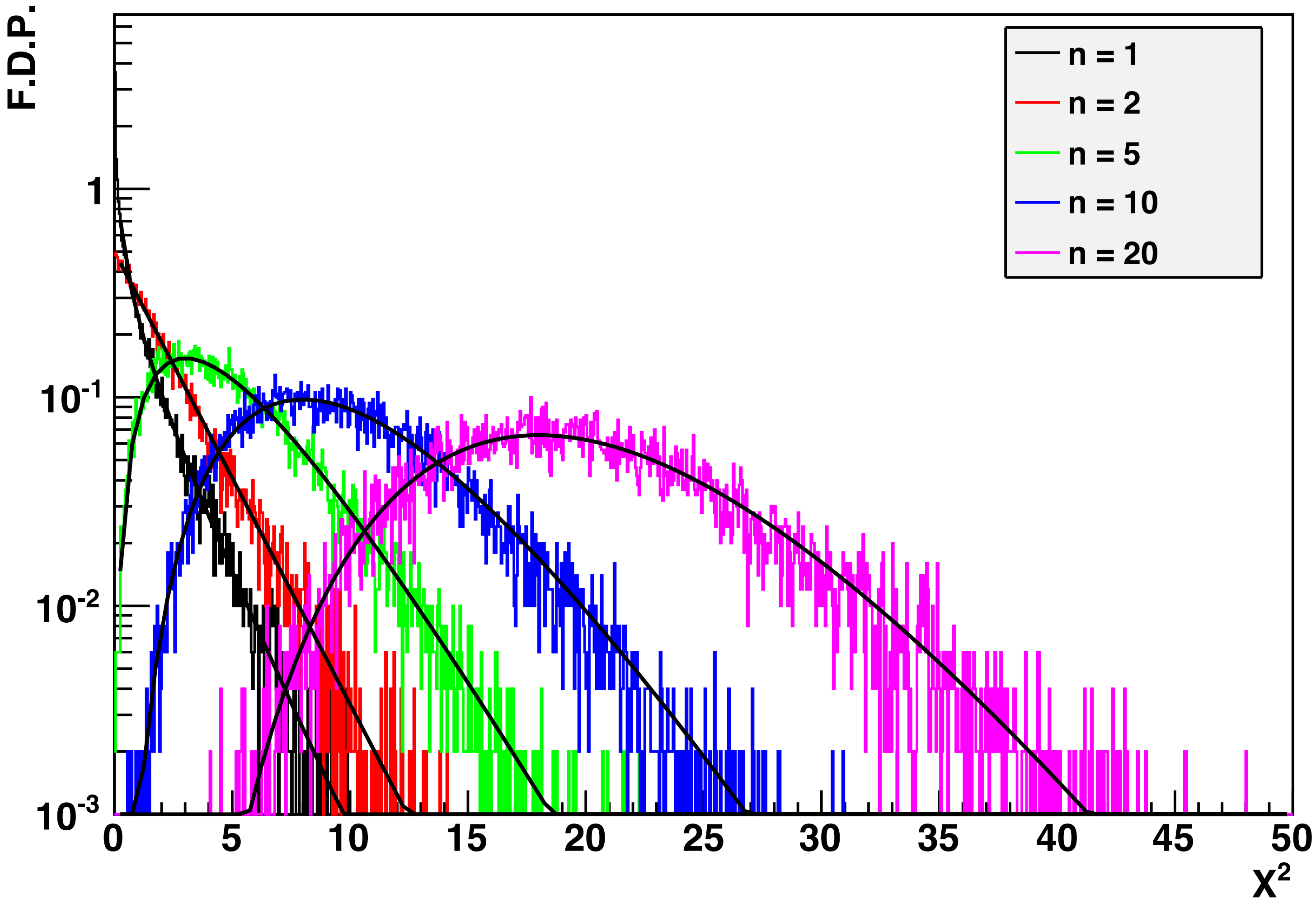
F.D.P. de X^2.

- A F.D.P. não segue mais uma distribuição normal:

$$p(\zeta) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\zeta^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{\zeta}{2}}$$

- Onde Γ é a função gama, n é o número de graus de liberdade e ζ, o valor de X^2.

F.D.P. de X^2.



F.D.P. de X^2_{red} e σ.

- A função X^2_{red} é definida como:

$$X^2_{red} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma_\mu}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

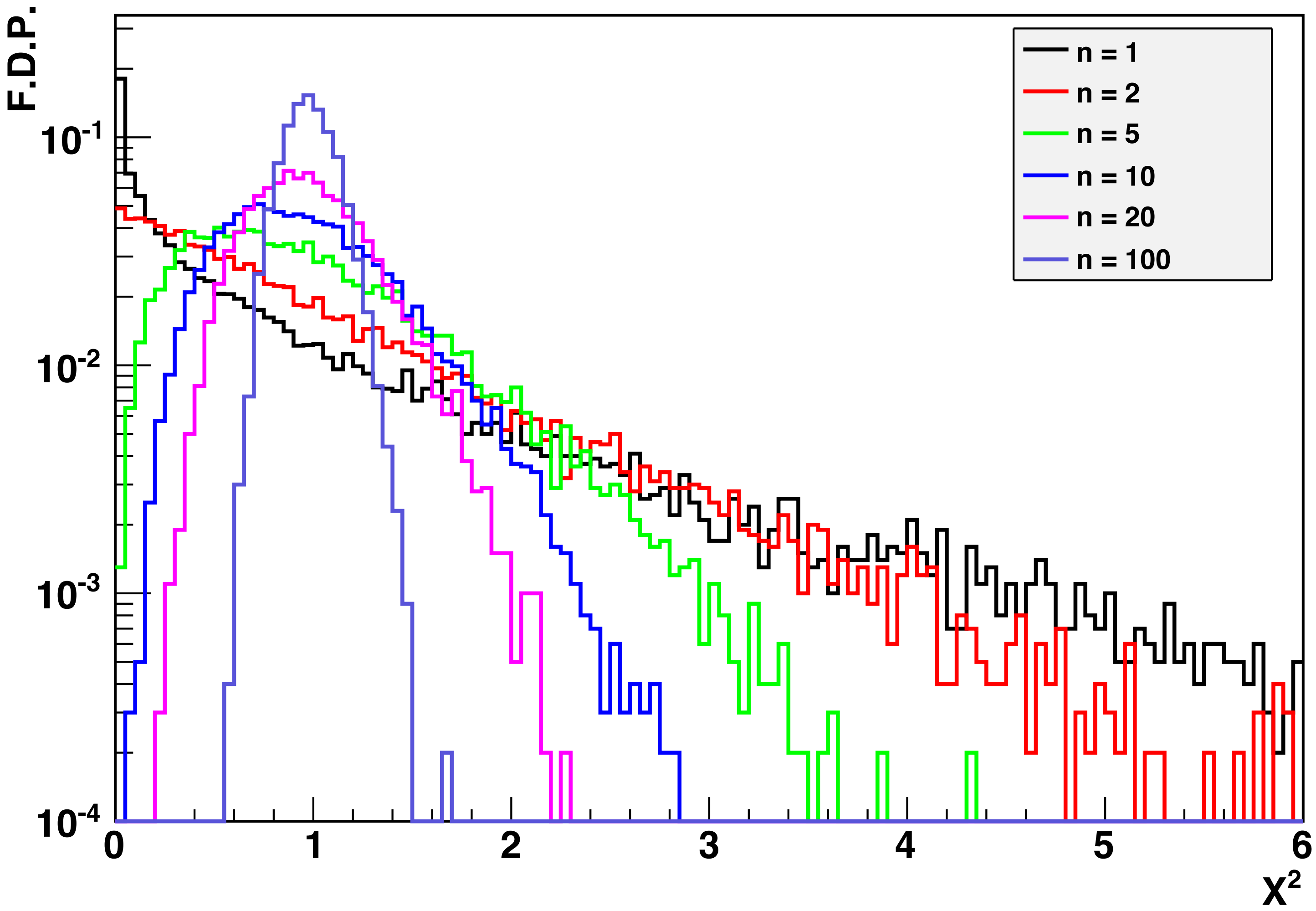
- Por outro lado, a variância de um conjunto de medidas é:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \mu\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

- Ou seja, essas grandezas são muito similares e seguem a mesma F.D.P.

F.D.P. de X^2_{red} e σ.

Note que quanto maior o número de graus de liberdade, mais estreita é a distribuição.



F.D.P. de X^2_{red} e σ.

- X^2_{red} e σ são importantes em testes de significância.
  - A função X^2_{red} é calculada quando se faz um ajuste de curvas. Como avaliar se o ajuste é bom?
  - Em uma medida estatística, como saber se a variância que estou obtendo é representativa?

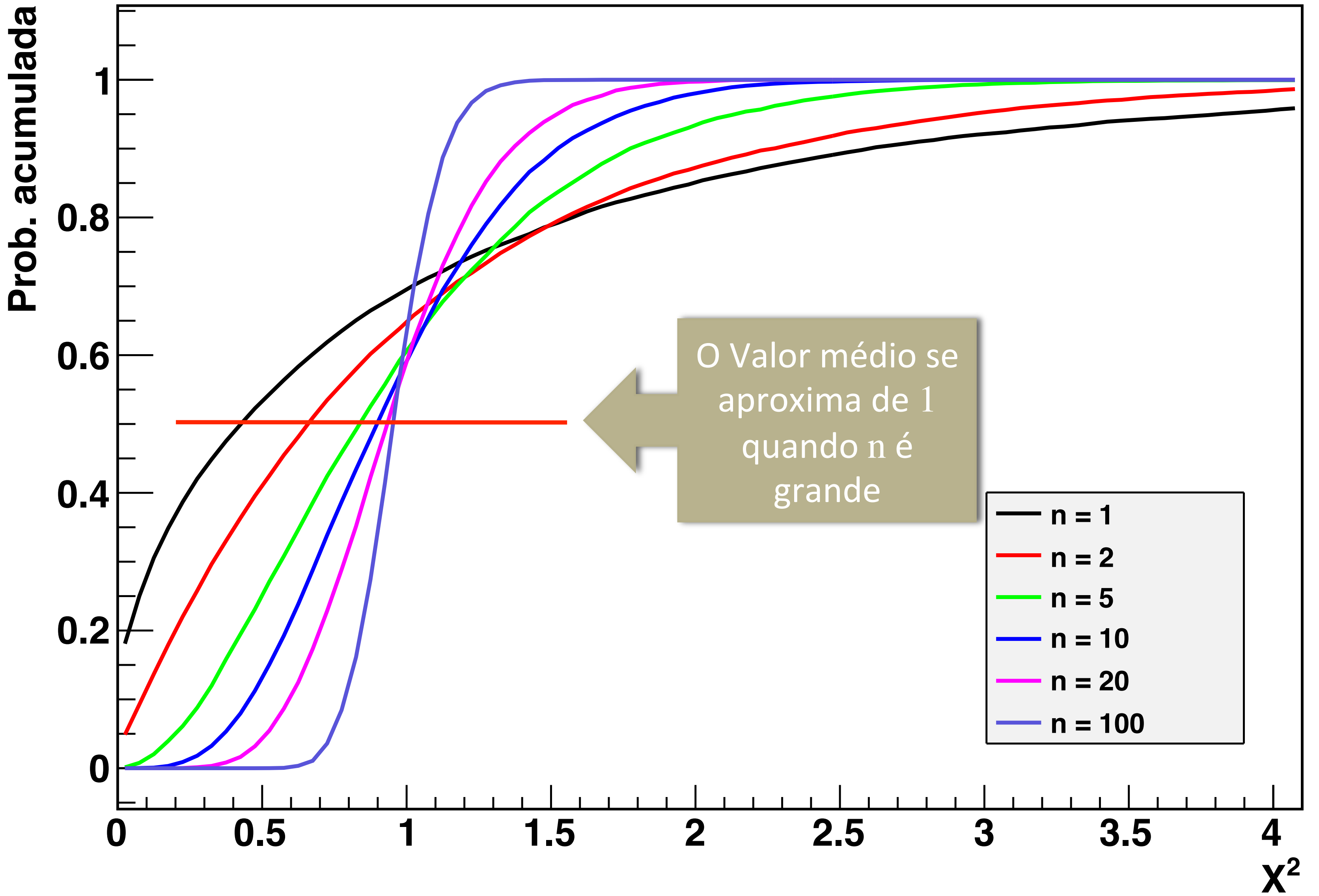
Probabilidade acumulada

- Podemos definir como probabilidade acumulada a grandeza:

$$P(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt \rightarrow \begin{cases} \text{Probabilidade da variável } t \\ \text{assumir um valor menor ou} \\ \text{igual a } x. \end{cases}$$

- Essa grandeza é particularmente útil para definir intervalos de confiança
  - Ex: qual o intervalo de 95% de confiança para a distribuição de $X^2{}_{red}$ de um ajuste com 5 graus de liberdade?

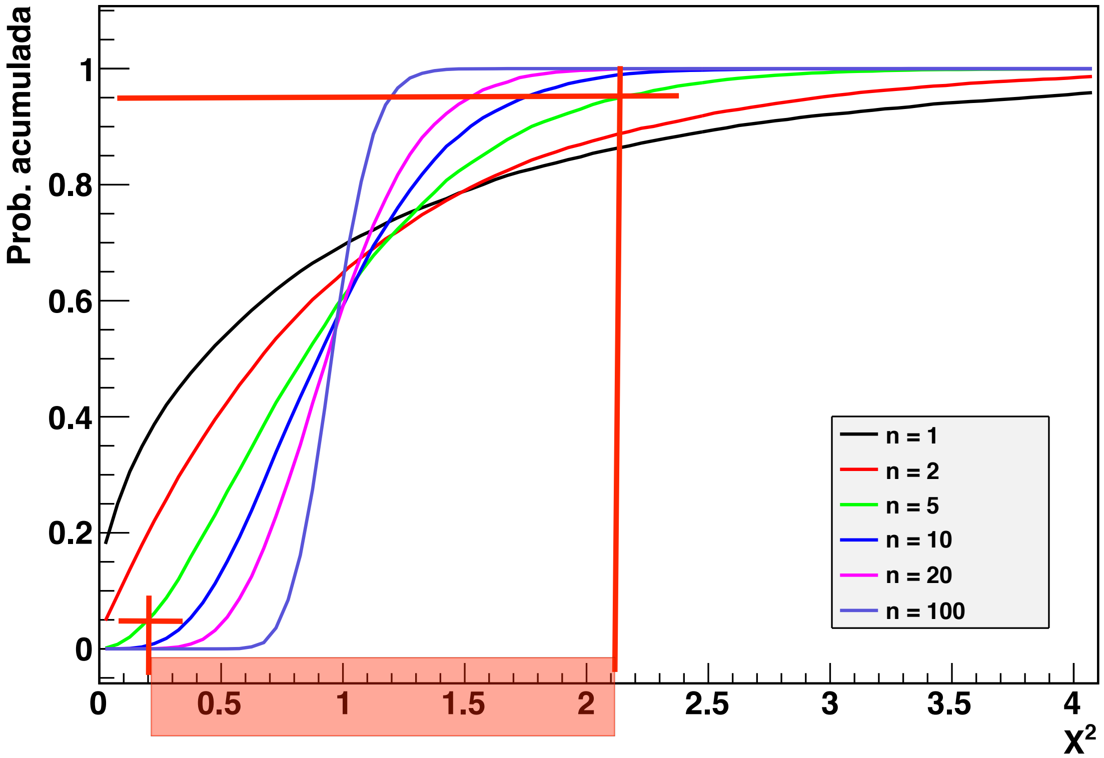
Probabilidade acumulada de X^2_{red} (ou σ)



Probabilidade acumulada de X^2_{red} (ou σ)

- Se eu faço um ajuste de **5 graus de liberdade**, qual o intervalo esperado de X^2_{red} com 90% de confiança?

$$0{,}2 < X^2_{red} < 2{,}1$$



Moral da história

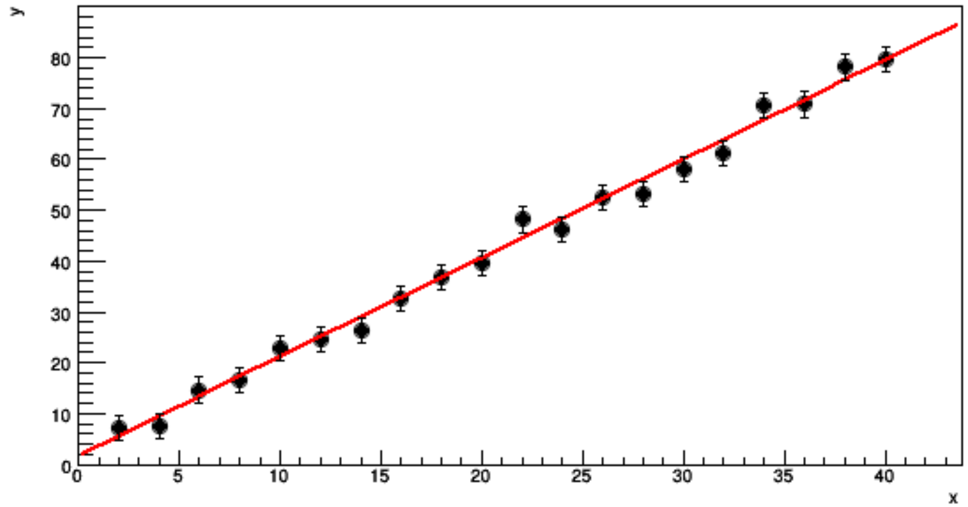
- Testes de chi-quadrado e análise de resíduos (análise mesmo, não apenas fazer um gráfico) constituem ferramentas poderosas na validação de resultados experimentais.

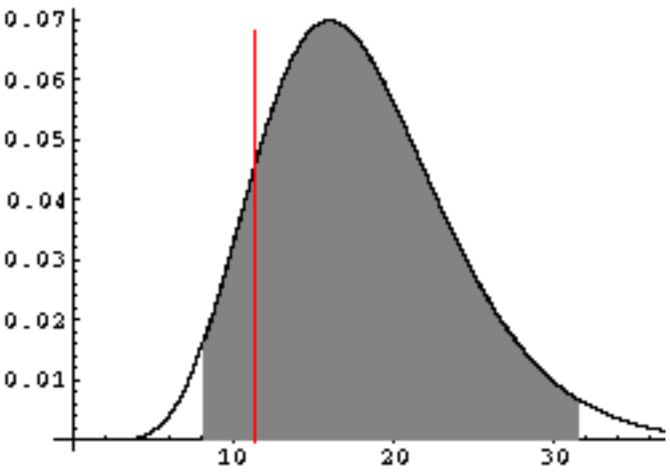
- Chi-2 confidence interval calculator
  - http://www.hostsrv.com/webmaa/app1/MSP/webm1010/chi2

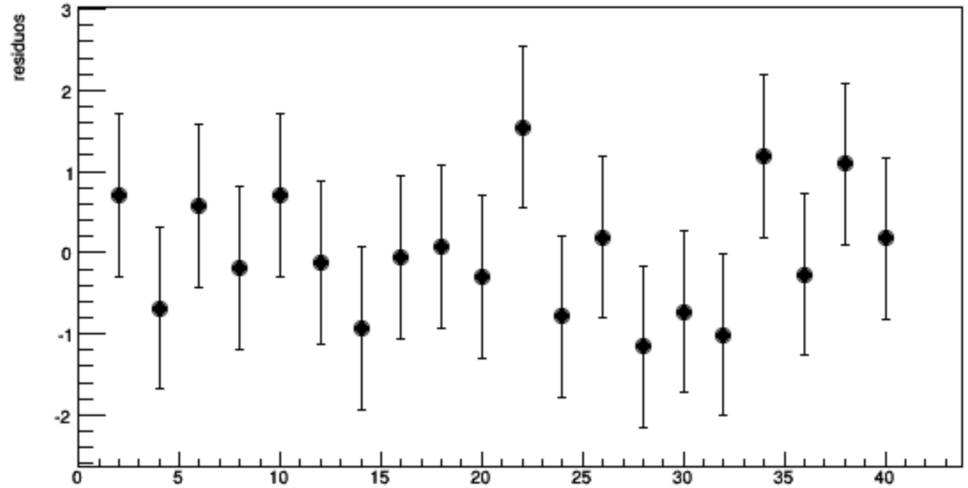
- E se o valor de chi2 estiver fora do intervalo de significância?
  - Em geral:
    - Incertezas super/subestimadas
    - Modelo teórico não se aplica aos dados

Ex: Um bom ajuste

- Chi2 = 11.45
- NDf = 18
- 95% CL = 8.2 < chi2 < 32

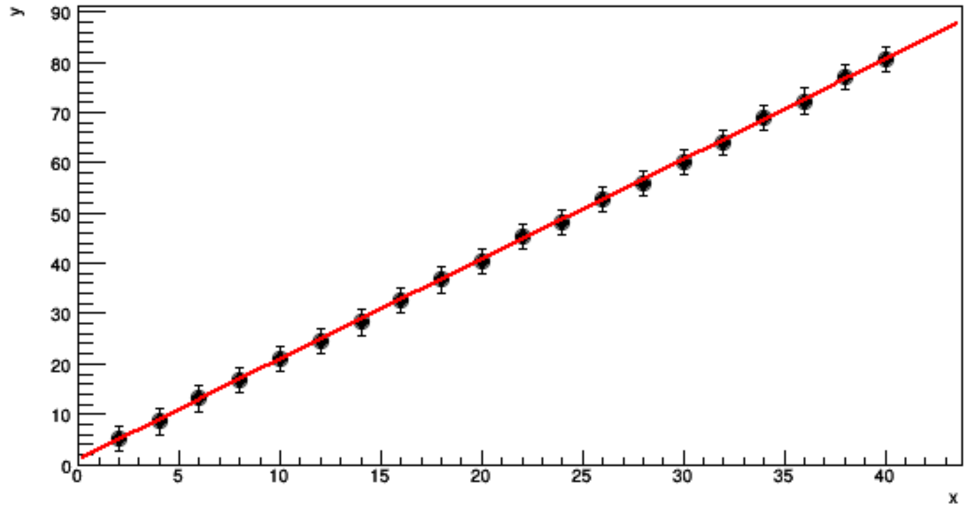


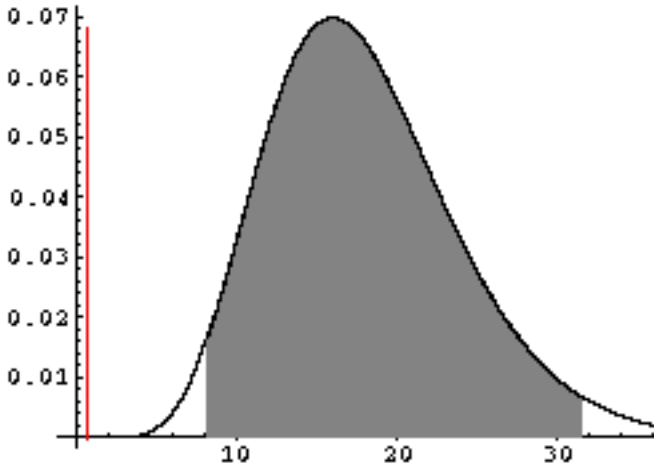


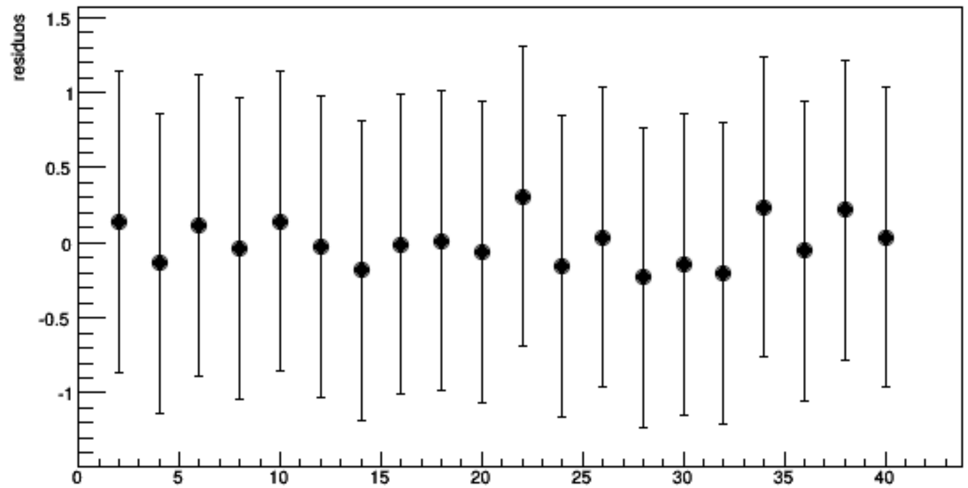


Ex: Incertezas superestimadas

- Chi2 = 0.45
- NDf = 18
- 95% CL = 8.2 < chi2 < 32

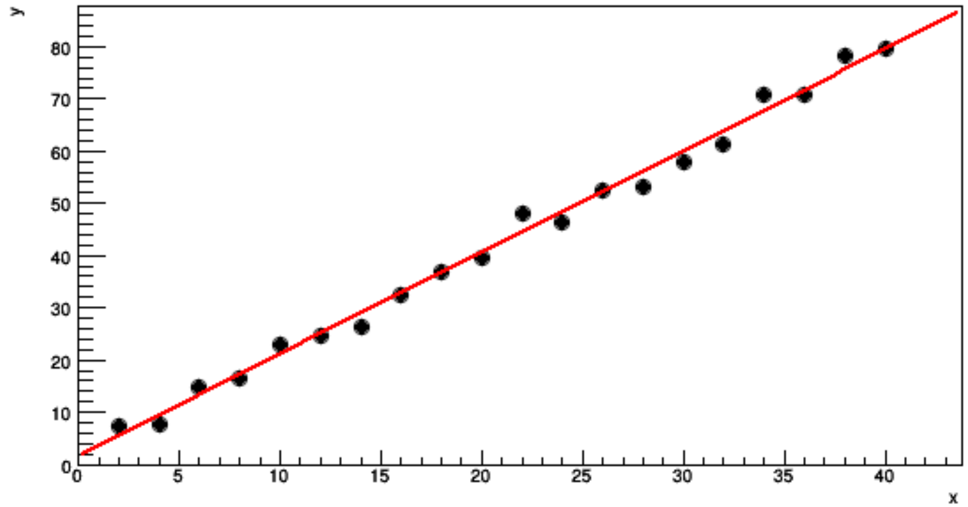


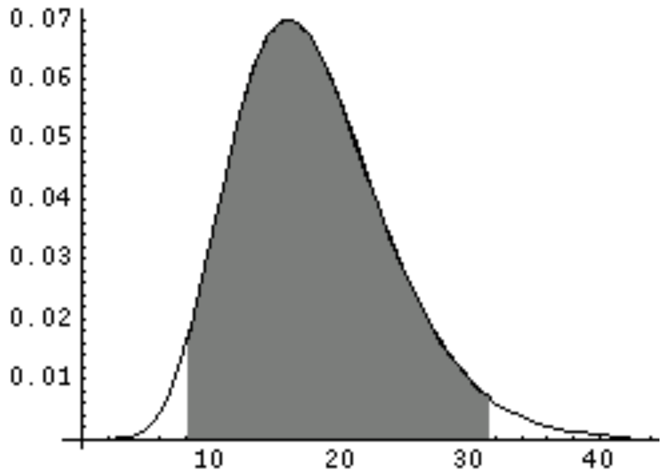


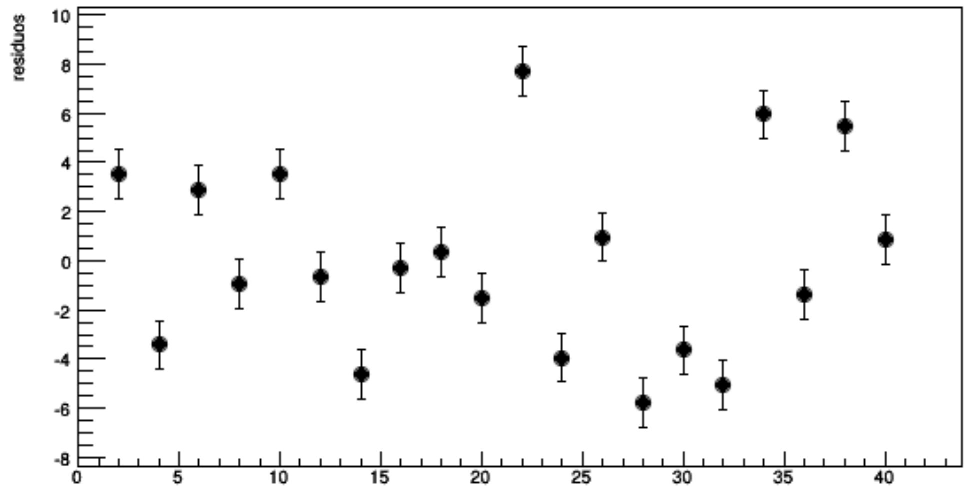


Ex: Incertezas subestimadas

- Chi2 = 286
- NDf = 18
- 95% CL = 8.2 < chi2 < 32

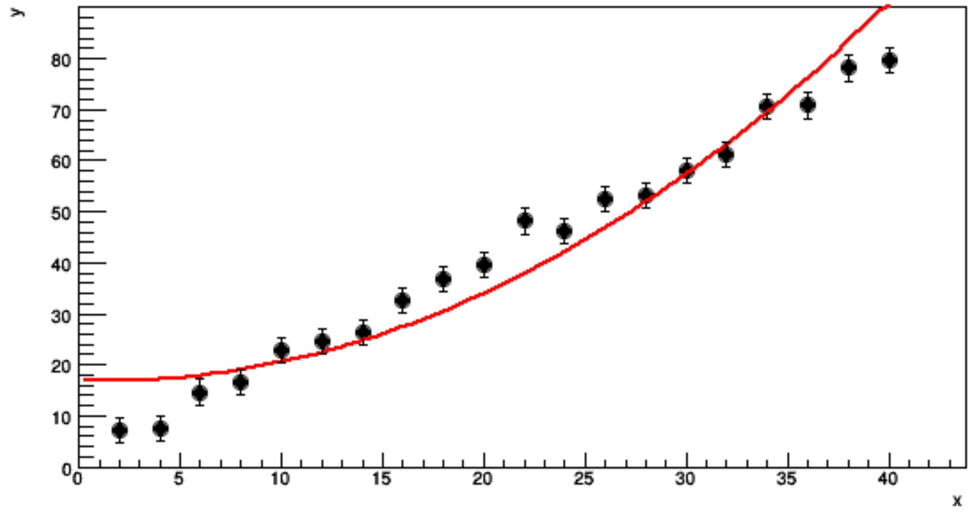


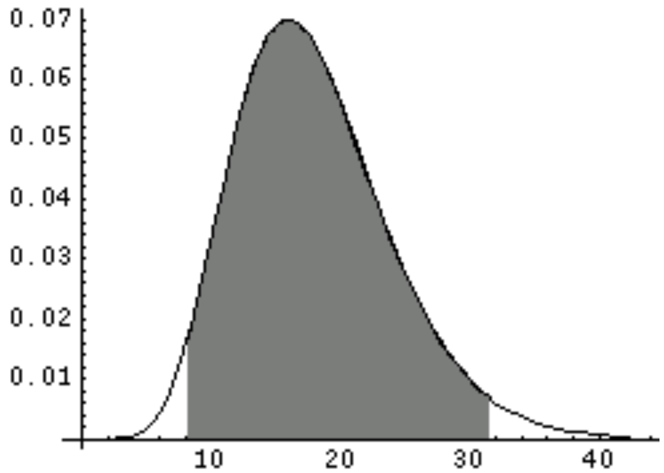


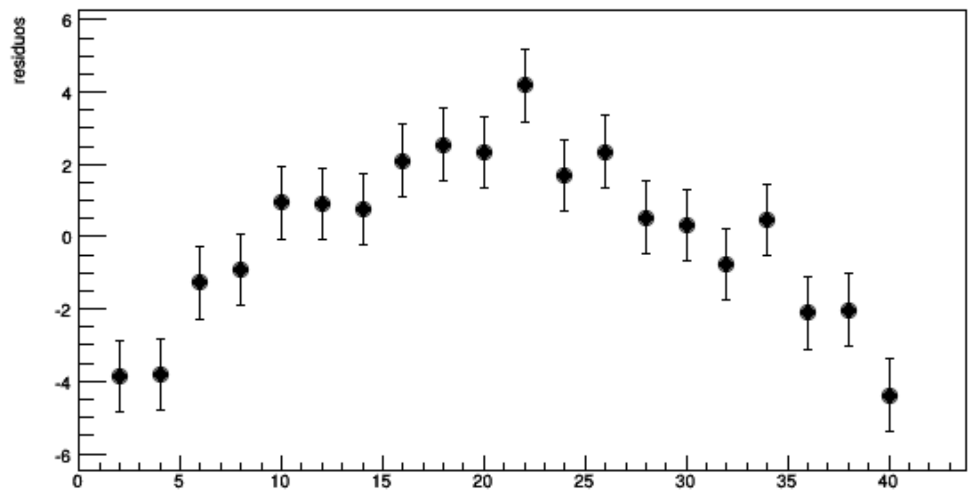


Ex: Função incorreta

- Chi2 = 105
- NDf = 18
- 95% CL = 8.2 < chi2 < 32








Experimento 3
Ótica ondulatória

Experiência III – Ótica ondulatória

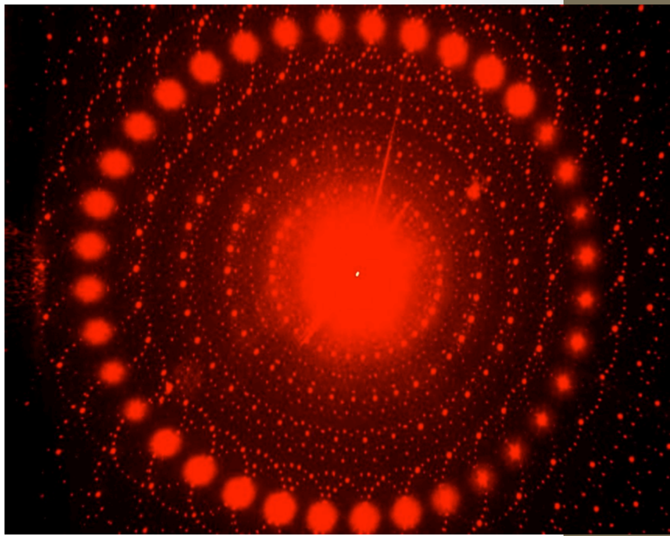
- Objetivos – Estudar fenômenos ondulatórios da luz
  - A luz como uma onda
    - Interferência e difração
  - Que tipo de onda
    - Polarização

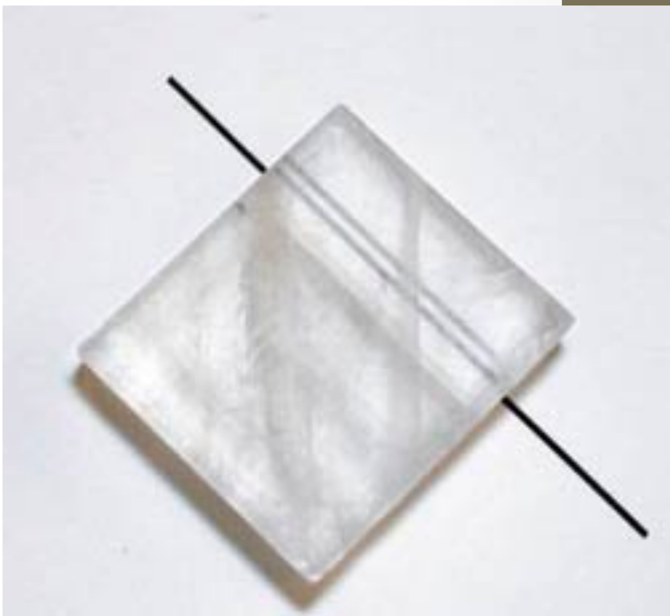
A natureza da Luz

- O estudo de trajetórias de raios luminosos, em geral, é bem descrita pela ótica geométrica
  - Lentes, espelhos, etc.
- Por conta disto, durante muito tempo, a teoria para a luz de Newton foi bem aceita
- Porém, as experiências de Young e Fresnel no início dos anos de 1800 revelaram os efeitos de interferência e difração da luz

A natureza da Luz

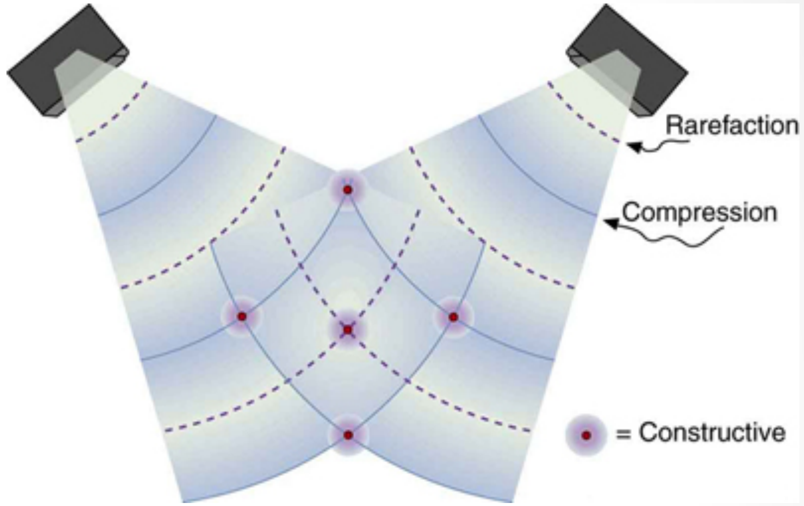
- Interferência e difração
  - A luz se comporta como uma onda
- Que tipo de onda?
  - A observação de fenômenos de polarização indicam que a luz é uma onda transversal
    - Erasmus Bartholin, 1669 – Calcita
    - Thomas Young & Augustin-Jean Fresnel – duas componentes com diferentes velocidades
  - Os estudos de Maxwell (1864)
    - A luz é uma onda eletromagnética

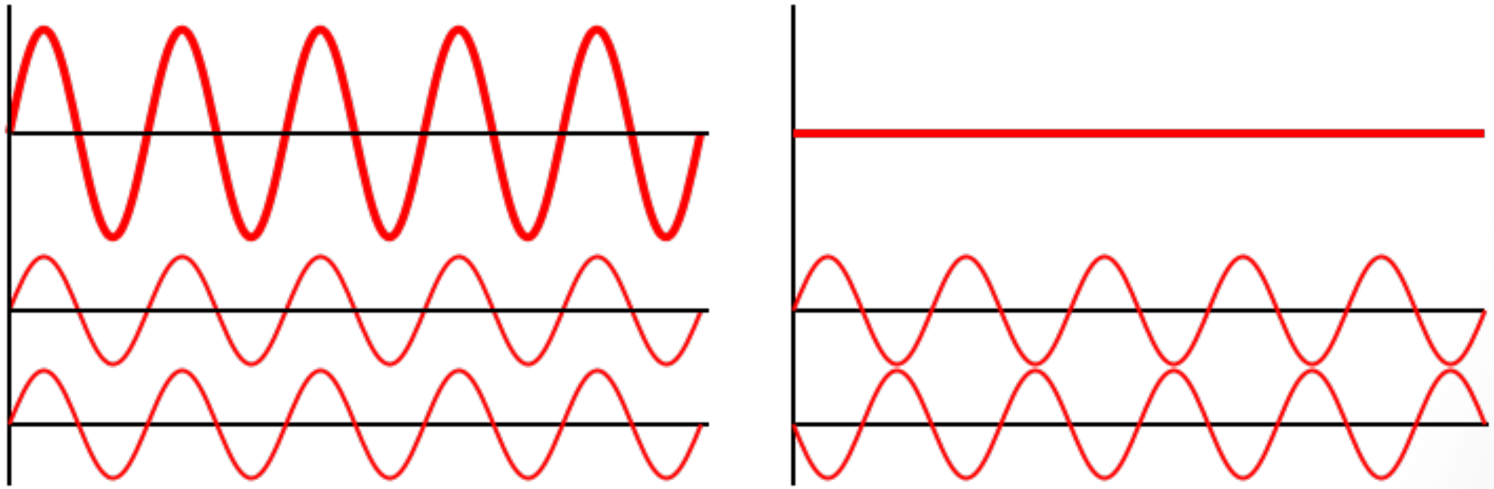




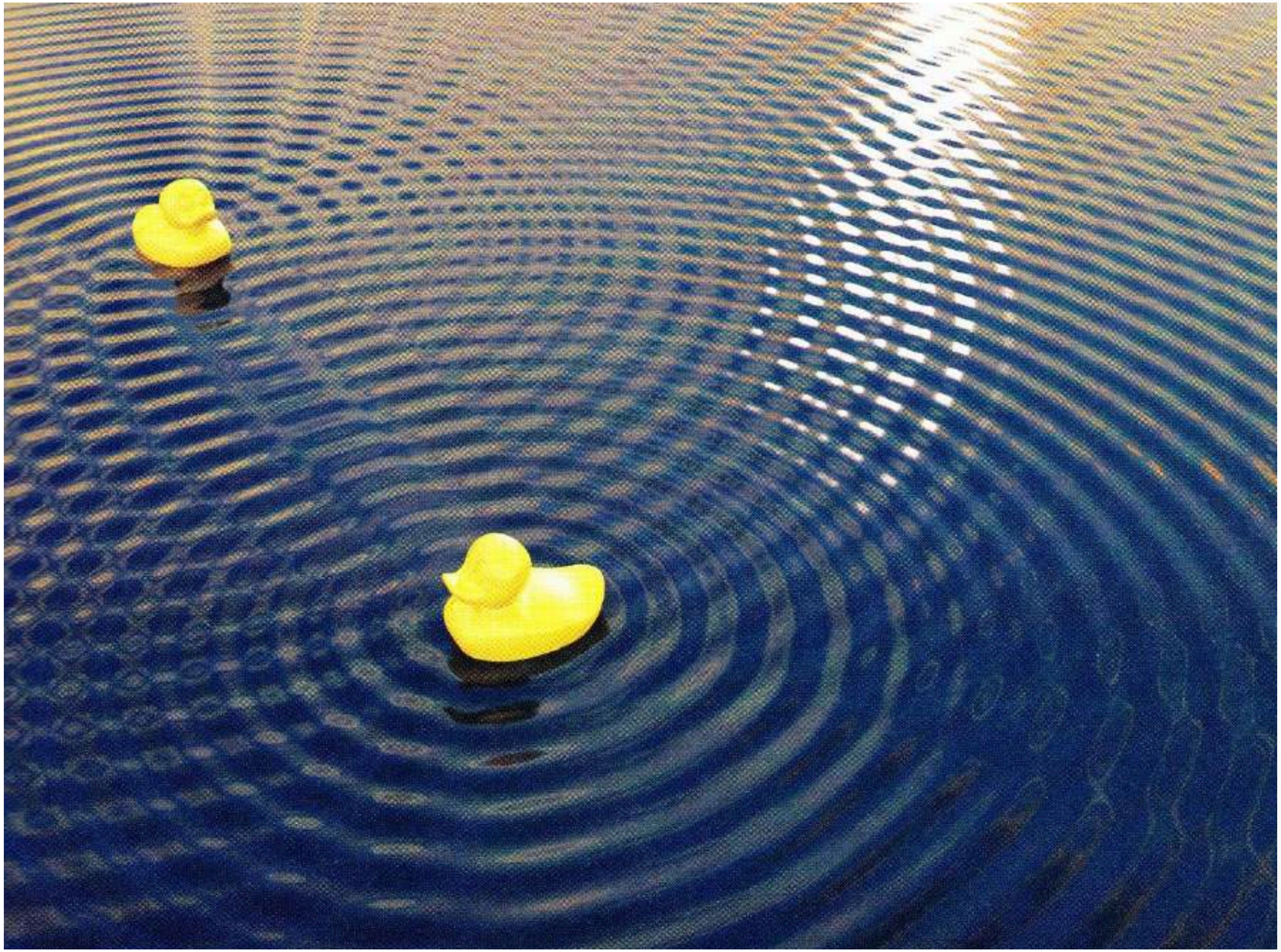
Interferência

- O princípio de superposição de ondas
  - Amplitudes se somam ponto a ponto
    - Interferência
- Interferência construtiva ou destrutiva



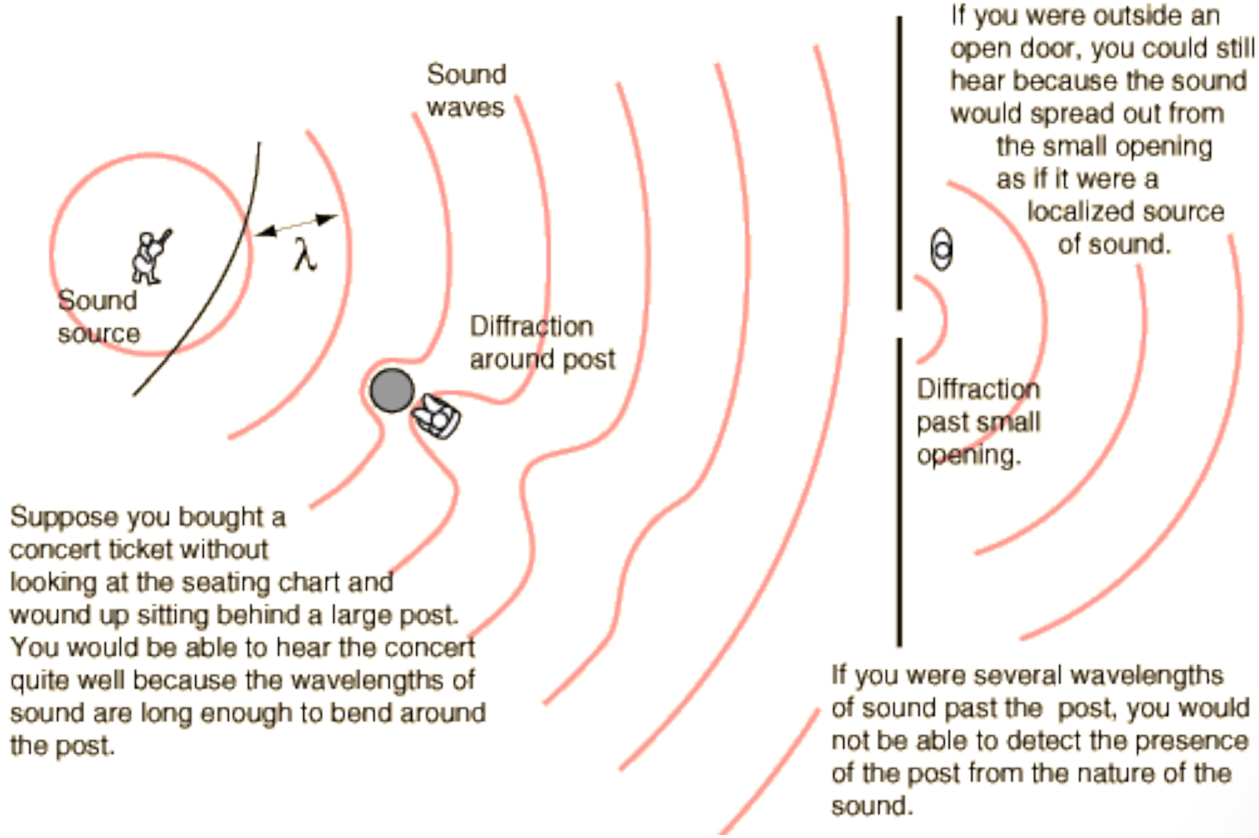


Interferência



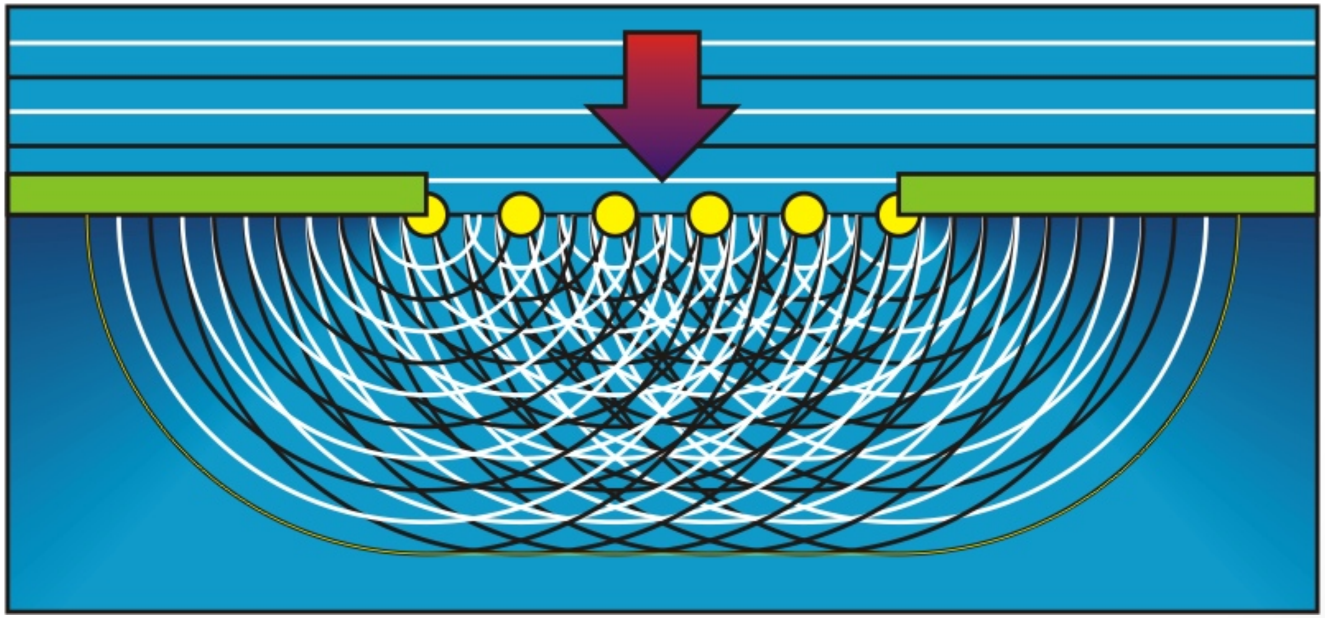
Difração: o que é?

- Como um espectador, atrás de uma porta, por exemplo, é capaz de ouvir um som mas não é capaz de enxergar a pessoa falando?

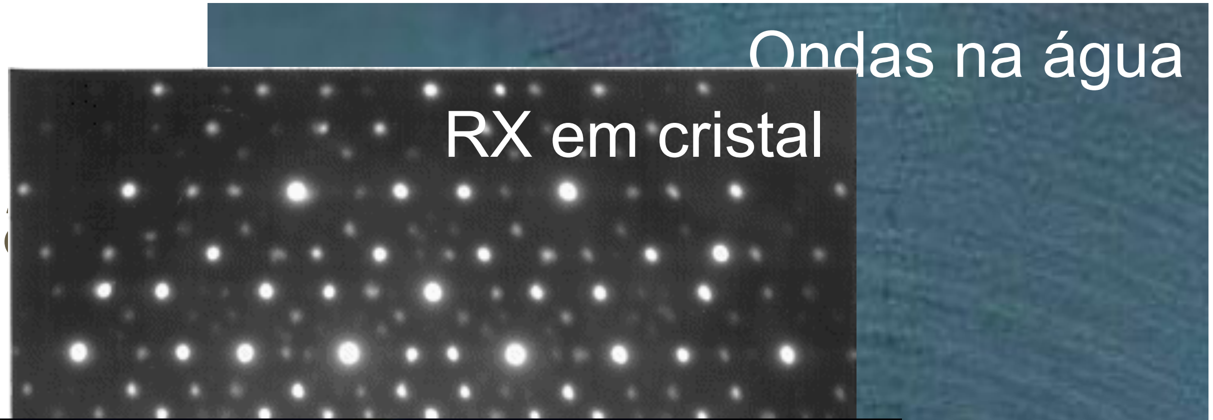


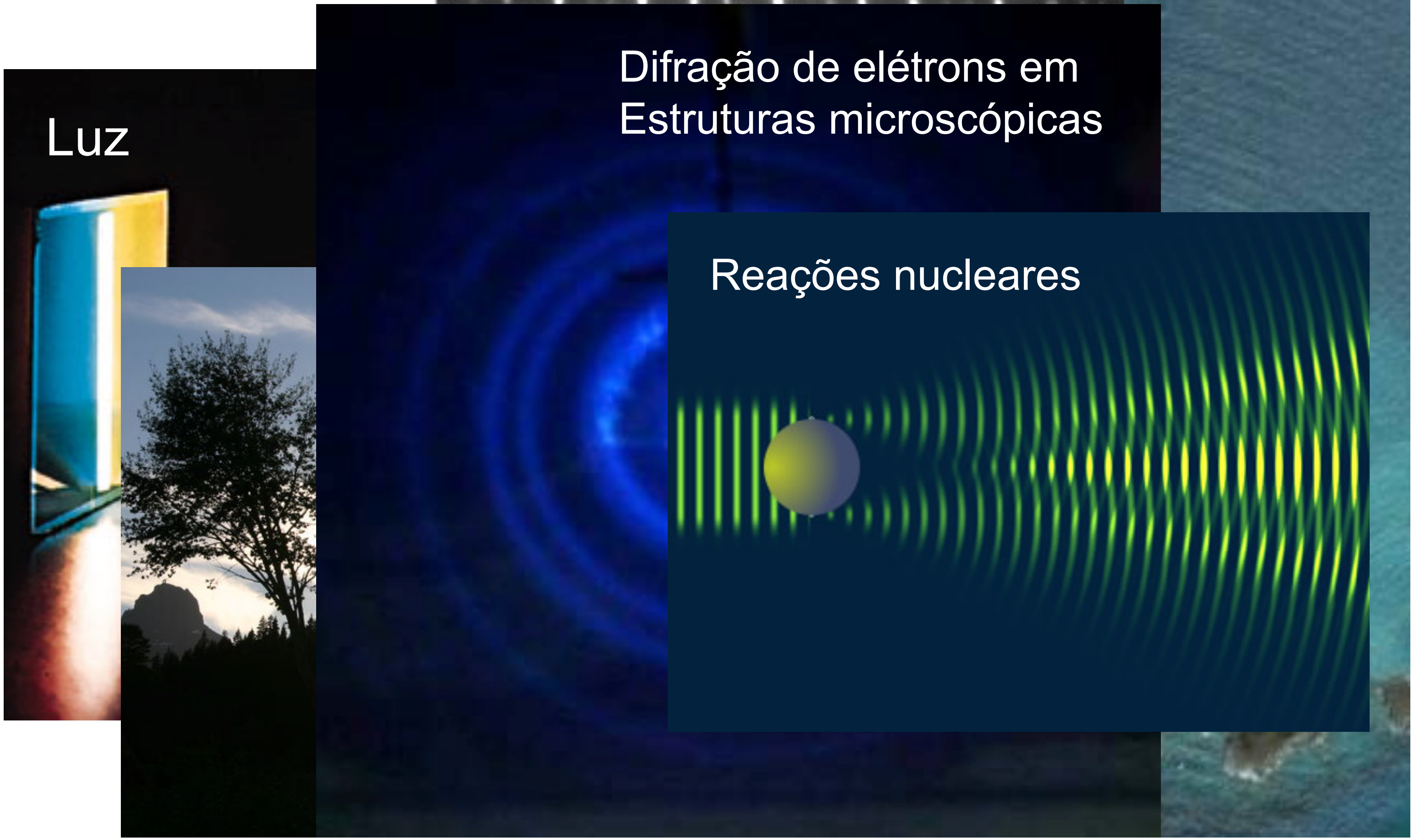
Explicando o fenômeno de difração

- Princípio de Huygens-Fresnel
  - Cada ponto de uma frente de onda (não obstruído) funciona como uma fonte emissora puntiforme esférica
  - A onda resultante consiste da superposição de todas as ondas esférica, levando em consideração a fase entre elas



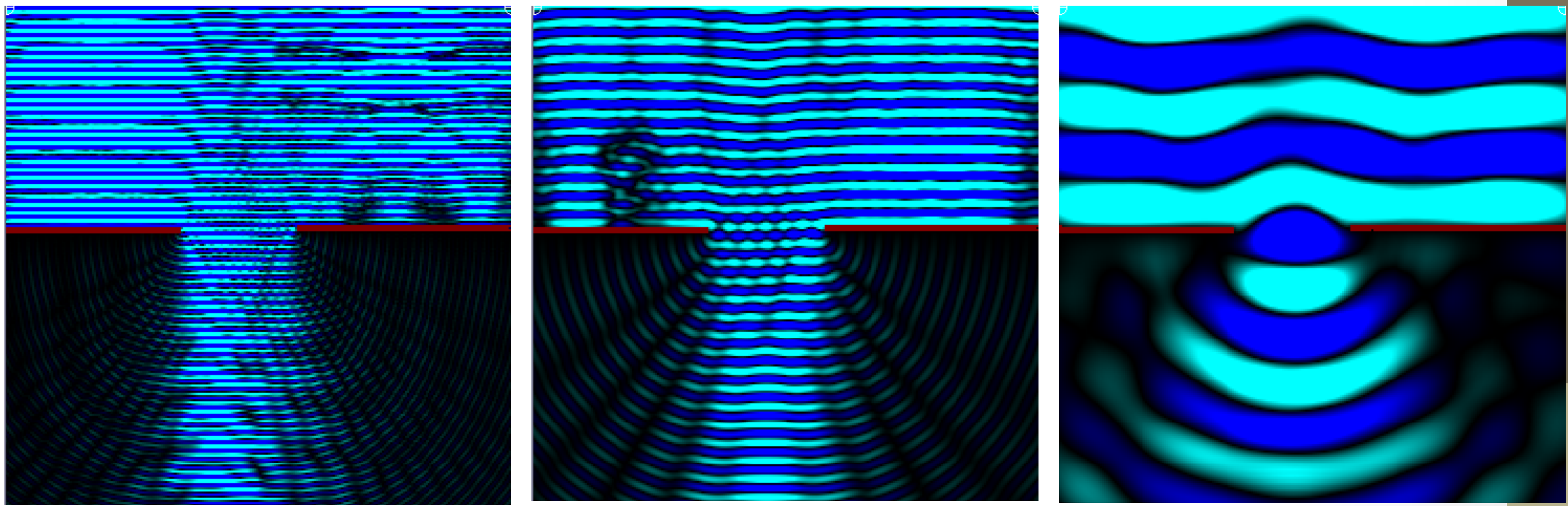
Difração n
Natureza





Dependência das dimensões dos obstáculos

- Ondas de comprimento muito menor que as dimensões do obstáculo sofrem pouca difração
  - http://sampa.if.usp.br/~suaide/applets/falstad/mirror1/ripple/

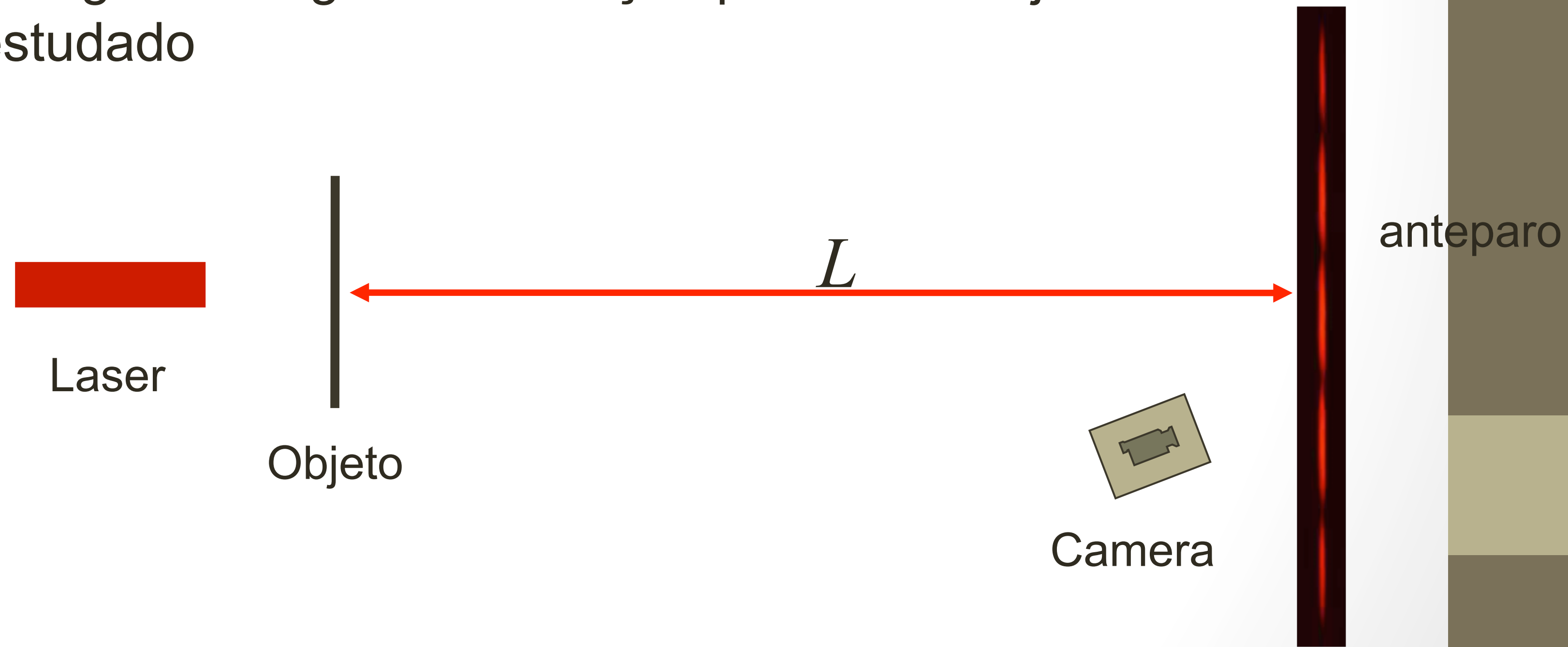


Atividades da semana (parte I)

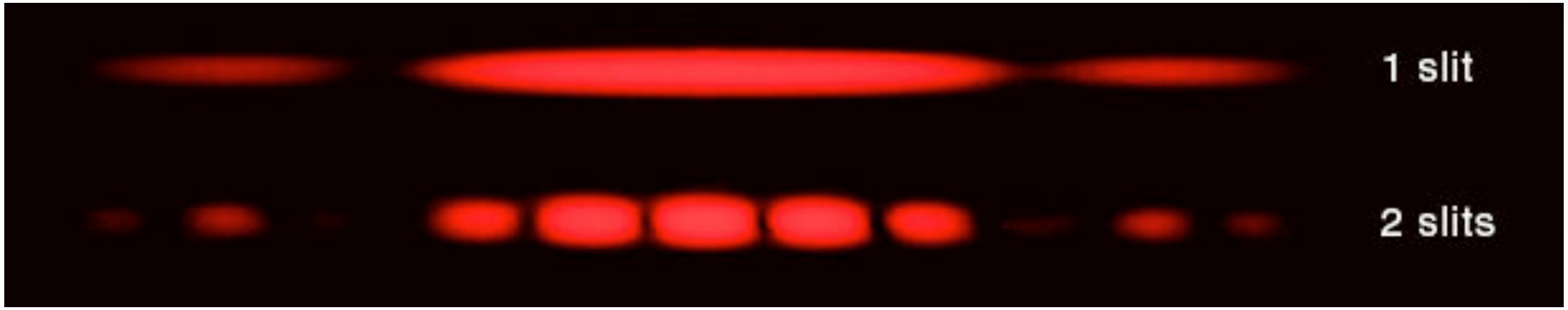
- Para uma fenda simples e uma fenda dupla no slide
  - **Anote o número do slide!**
- Observe os fenômenos de interferência e difração
- Meça as posições de mínimo de interferência e difração
- Pesquise a relação entre estas posições de mínimo com as dimensões dos objetos estudados
  - Na fenda simples → tamanho da fenda
  - Na fenda dupla → tamanho da fenda e separação entre elas
- Faça a análise apropriada e determine estas dimensões
  - Compare com os valores nominais

Como obter figuras de difração?

- Montar: laser + objeto + anteparo
- Colocar o anteparo a uma distância razoavelmente grande para observar as figuras de interferência e difração
- Fotografar a figura de difração para cada objeto estudado



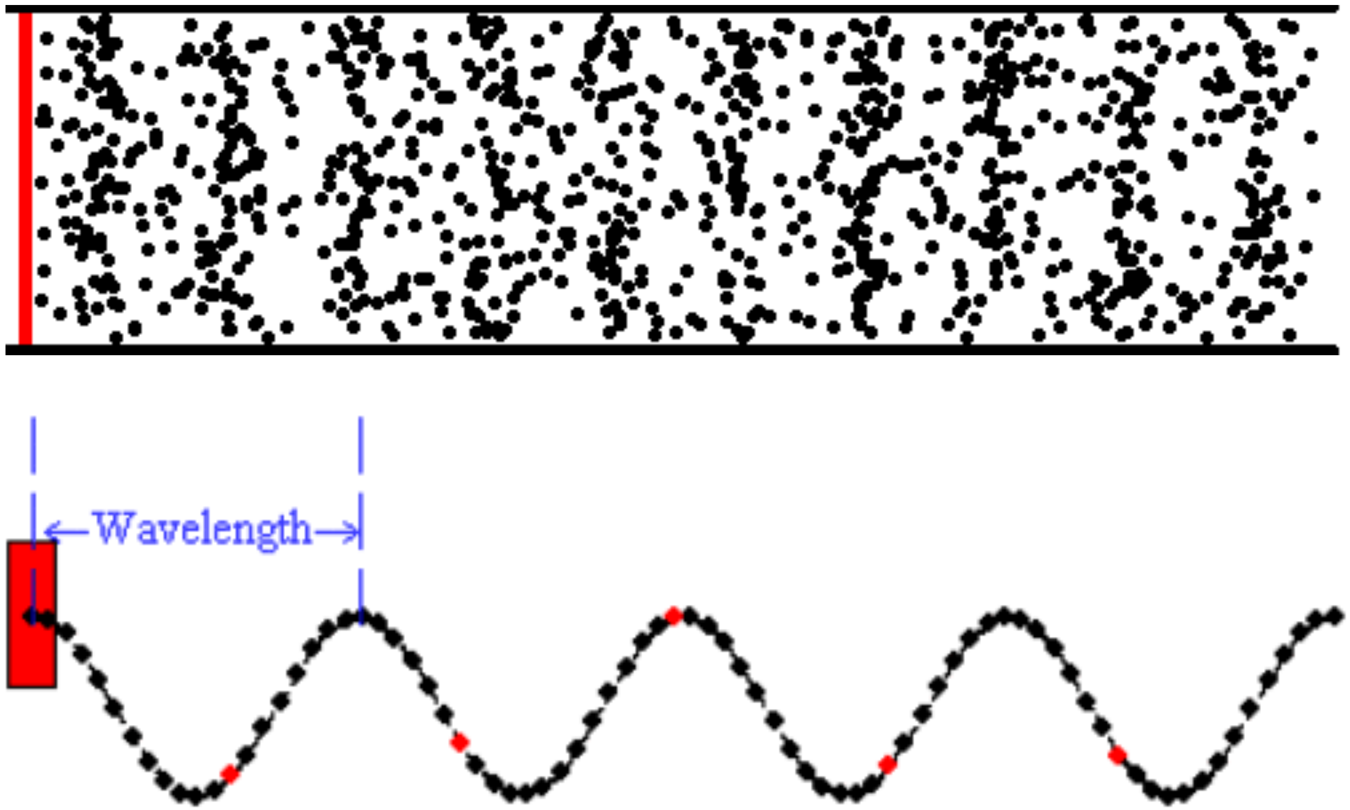
Difração por fenda simples e dupla



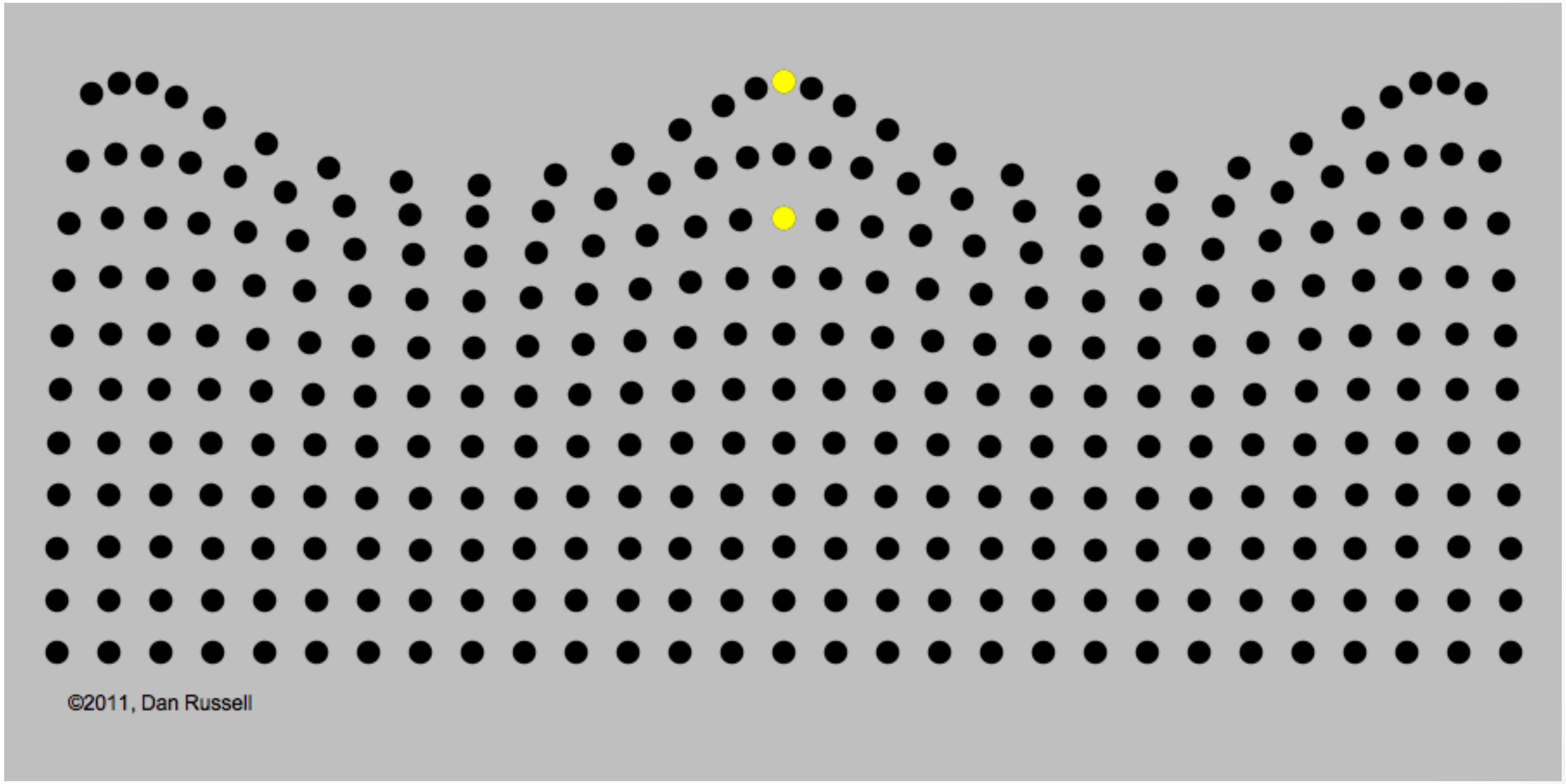
- Qualquer livro texto resolve o problema de difração e interferência de fendas simples e dupla. Pesquise qual a expressão teórica que descreve estes fenômenos para extrair as posições dos mínimos de difração e interferência.

- Uma nova abordagem teórica na próxima semana.

Ondas transversais e longitudinais

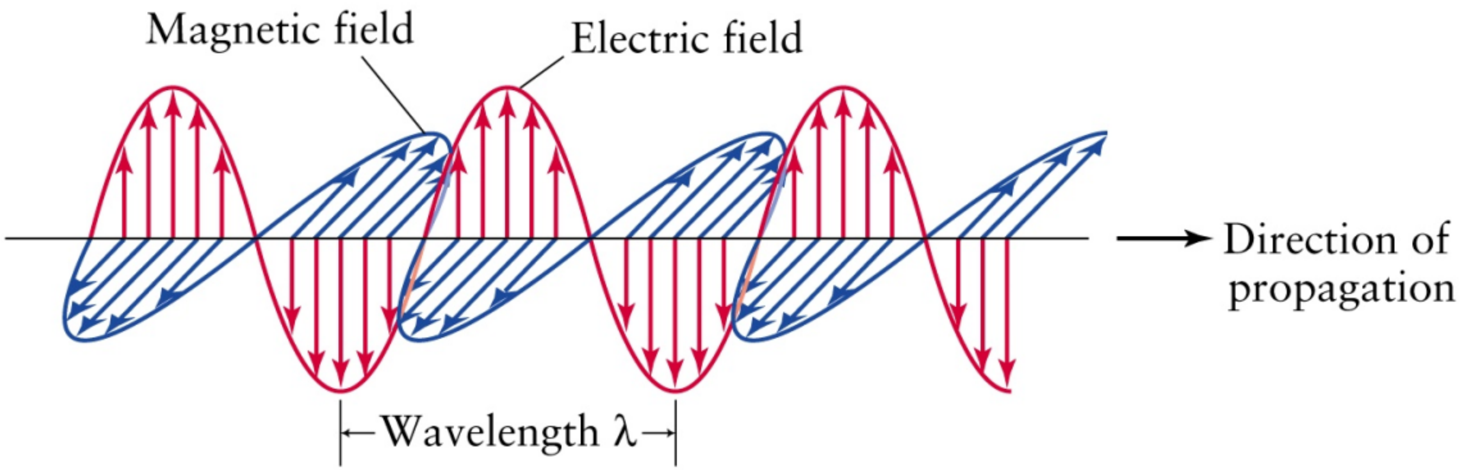


Há ondas que são dos dois tipos (ex: onda no mar)



Ondas transversais

- São aquelas nas quais as suas vibrações são perpendiculares à direção de propagação
- A luz é formada por um campo elétrico e magnético transversais e variantes no tempo

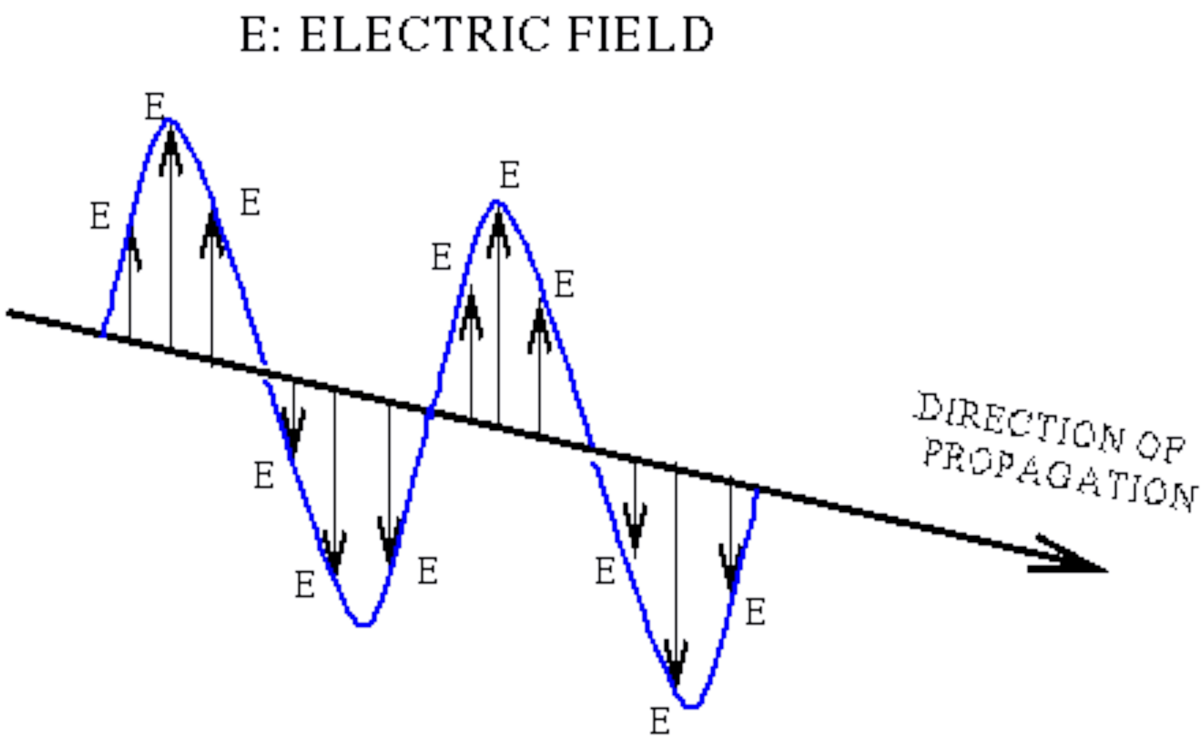


Polarização

- Efeito característico de ondas transversais
- No caso da luz, a direção de polarização é aquela do campo elétrico
- Tipos de polarização:
  - Linear
  - Circular ou elíptica
  - Não polarizada

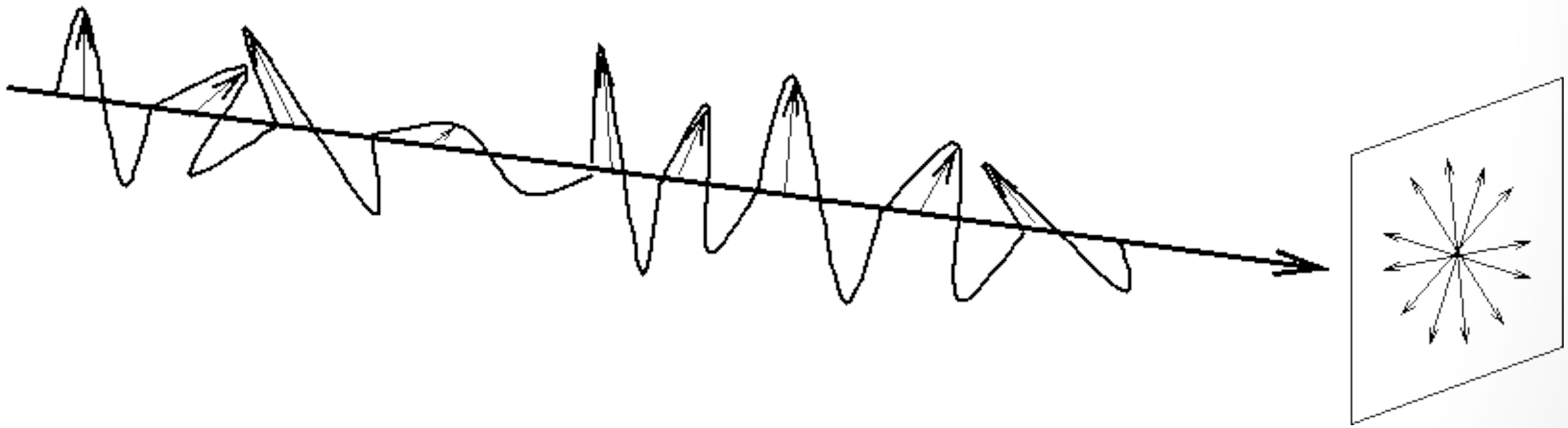
Polarização linear

- É aquela na qual a direção do campo elétrico não se altera com o tempo, somente a sua intensidade



Luz não polarizada

- Tanto a intensidade como a direção do campo elétrico variam de forma incoerente no tempo
- Contudo, podemos sempre escrever que o campo elétrico possui uma componente j e i



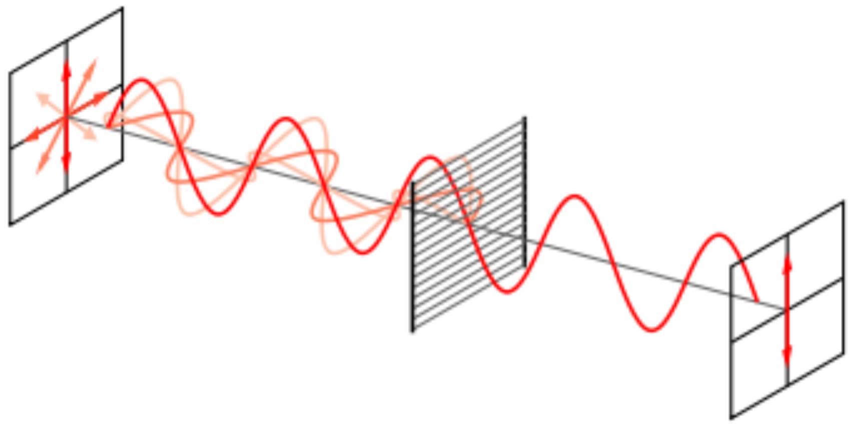
O Polarizador

- Instrumento óptico capaz de polarizar a luz em uma dada direção pré-definida.
- Todo polarizador é caracterizado por um eixo de polarização
  - Este eixo representa a direção da componente do campo elétrico que será transmitida
- Vários tipos de polarizador
  - Absorção
    - Absorve a componente dos campos EM em uma dada direção
  - Birrefringentes
    - O índice de refração pode depender da polarização da luz
  - Reflexão
    - A luz refletida, dependente do ângulo, favorece a polarização em uma direção

Polarizador por absorção

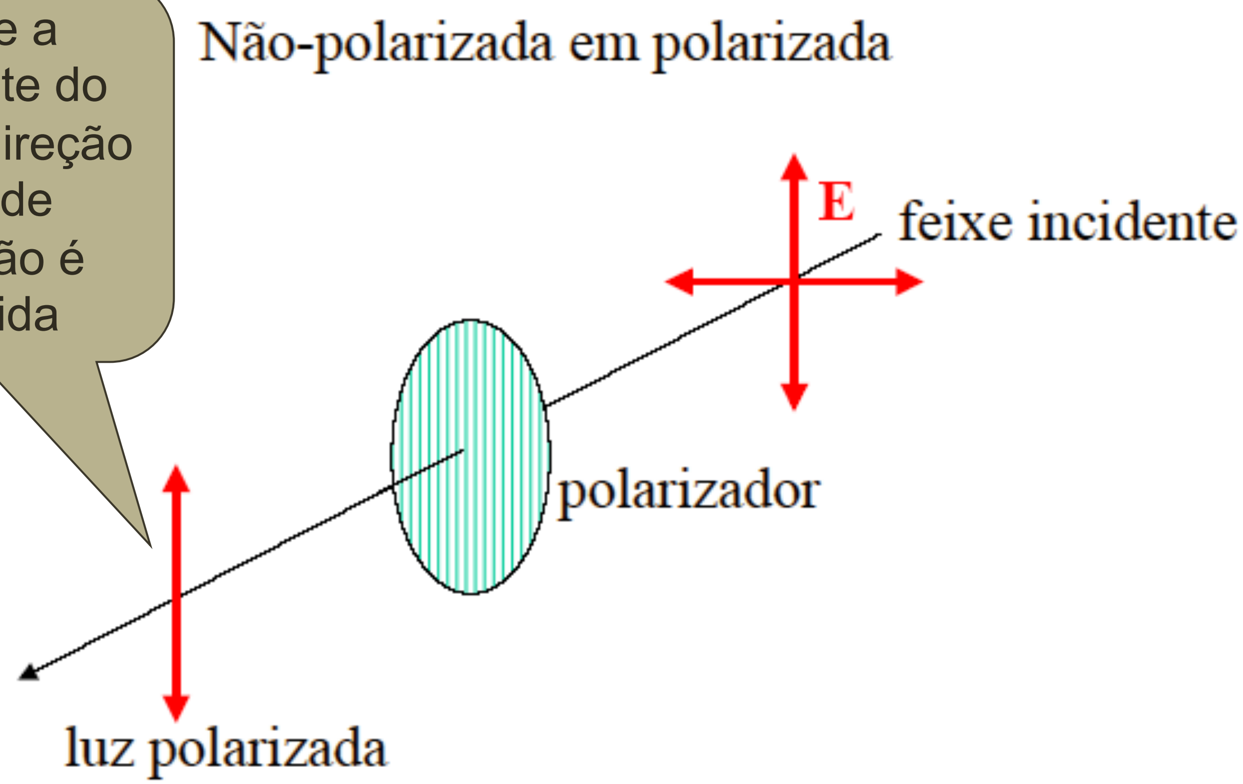
- O mais simples é o de grade de fios
  - O campo elétrico na direção dos fios faz com que os elétrons livres se movam. O movimento desses elétrons faz com que essa componente seja absorvida

- Dicroismo
  – Alguns cristais possuem absorção diferente para cada componente da luz incidente, dependendo da estrutura da rede cristalina



Efeito de um polarizador na luz

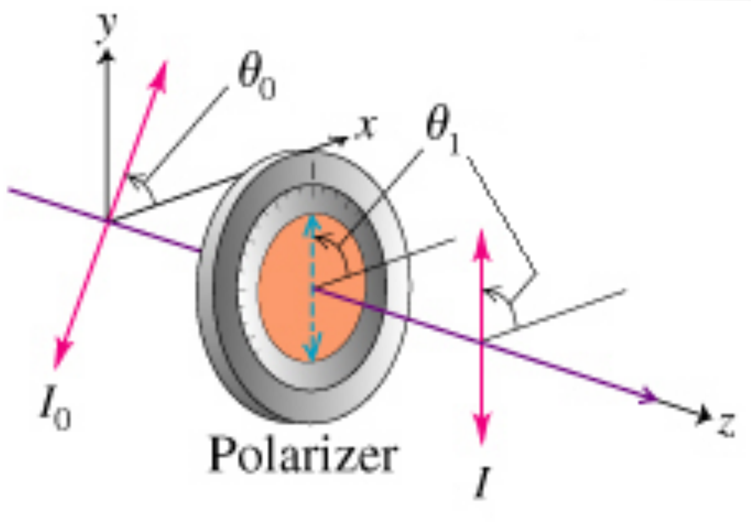
Somente a componente do campo na direção do eixo de polarização é transmitida



Lei de Malus

- Lei de Malus
  - Polarizador colocado na frente de uma luz, com seu eixo em um ângulo θ em relação ao campo elétrico incidente

$$E = E_0 \cos\theta$$



- Intensidade luminosa é proporcional ao quadrado do campo elétrico

$$I = I_0 \cos^2(\theta)$$

Atividades da semana (parte II)

- Verificar que a luz pode apresentar polarização

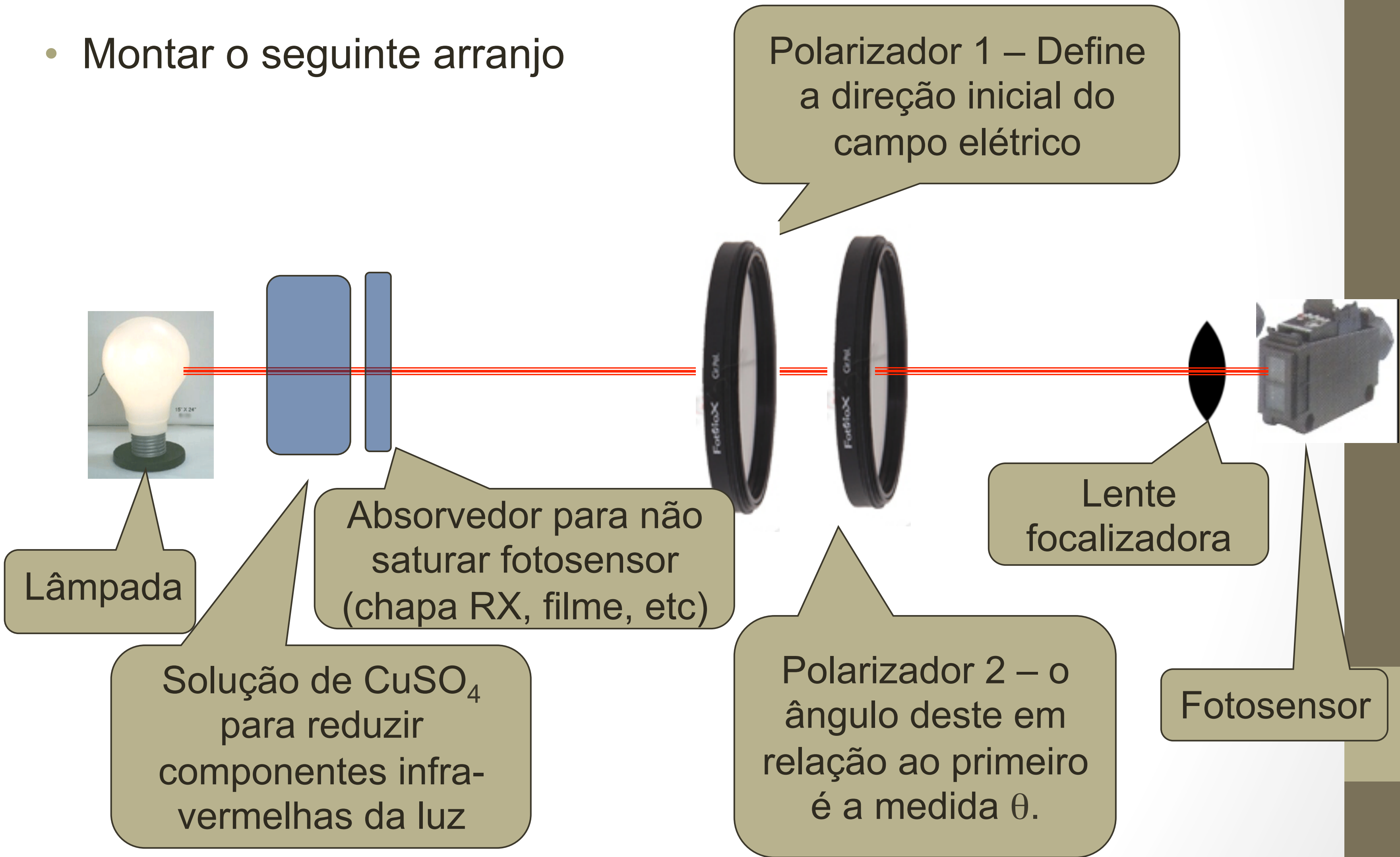
- Verificar experimentalmente a lei de Malus para uma luz previamente polarizada

$$I = I_1 \cos^2 \theta$$

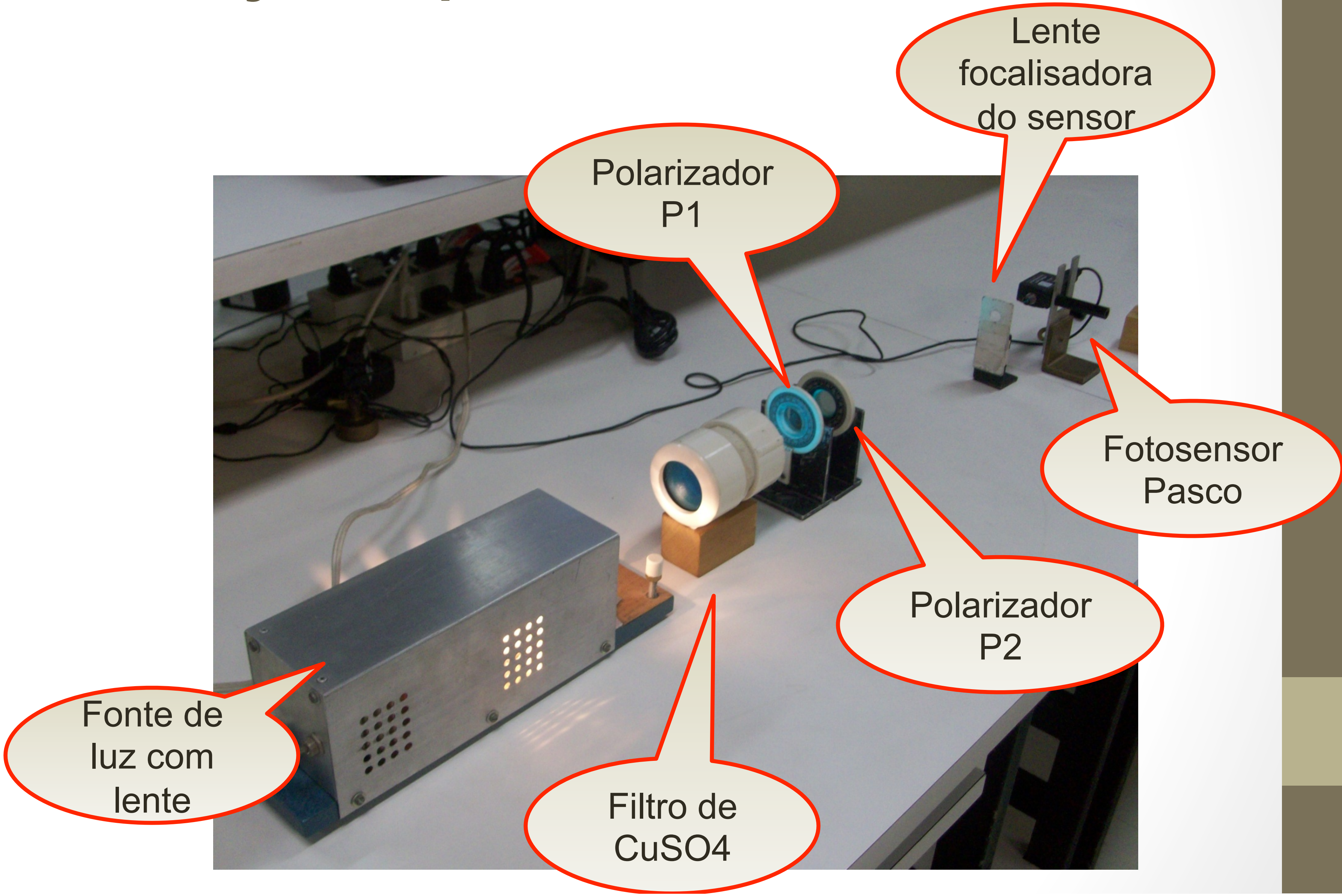
  - Há desvios em relação à expressão acima que podem ser medidos experimentalmente?
    - Quais as fontes destes desvios?
    - Como poderíamos modificar a Lei de Malus acima para levar em consideração possíveis desvios?

Arranjo experimental: Lei de Malus

- Montar o seguinte arranjo



Arranjo experimental



Cuidados experimentais

- Fiquem atentos se o fotosensor não está saturado.
- Alinhamento do sistema óptico
- Tente focalizar a luz no fotosensor de forma apropriada
- Cuidado ao medir os ângulos entre os polarizadores
  - Qual a incerteza na medida do ângulo?
- Qual a incerteza na medida de intensidade luminosa?

Atividades para Lei de Malus

- Medir a intensidade luminosa em função de θ. Cuidado para que a luz não seja intensa para saturar o fotosensor.
- Gráfico de Intensidade vs. θ.
- Ajustar por mínimos quadrados a previsão teórica da Lei de Malus.
  - Os dados se comportam como o esperado pela teoria (ver resíduos)?
  - Caso não seja validada, como podemos modificar a Lei de Malus para levar em conta outros efeitos? Quais são estes efeitos?
  - Reajuste, se necessário, os dados levando em conta as modificações efetuadas na Lei de Malus.