



Física Experimental III

<http://disciplinas.stoa.usp.br/course/view.php?id=3894§ion=2>

Aula 7





Mais um pouco de estatística

Ajustes de funções e o
método dos mínimos
quadrados

Método da máxima verossimilhança

- Podemos definir uma função batizada de verossimilhança como sendo:

$$L = \prod_i H(y_i, \mu_i) = \prod_i H(y_i, f(x_i, \vec{a}))$$

- Vamos definir

$$\xi = -\ln L$$

- Note que mudei o sinal, vai ficar óbvio porque

Método da máxima verossimilhança

- Maximizar a verossimilhança significa minimizar a grandeza

$$\xi = -\ln L = -\sum_i \ln(H(y_i, f(x_i, \vec{a})))$$

- E isto pode ser feito resolvendo um sistema de equações tal que:

$$\frac{\partial \xi}{\partial a_j} = 0$$

O Método dos mínimos quadrados

- No caso de as medidas y_i terem distribuições gaussianas temos que (note a inversão de sinal)

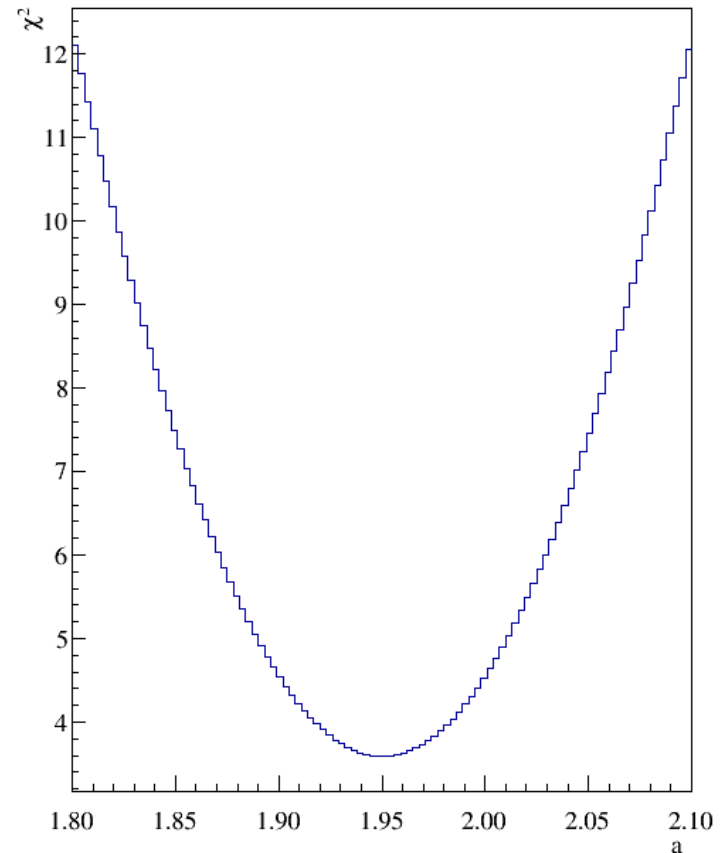
$$\xi = \text{const} + \frac{1}{2} X^2$$

- E minimizar esta grandeza é o mesmo que minimizar o X^2 , que é feito através da resolução de um sistema de equações tal que:

$$\frac{dX^2}{da_j} = 0$$

Neste caso

- Ajustar uma função de pontos gaussianos significa encontrar o mínimo global do χ^2 para os parâmetros
- E as incertezas dos parâmetros? De onde elas vêm?



Incertezas nos parâmetros ajustados

- Vamos iniciar com o método da máxima verossimilhança. Vamos expandir ξ em uma série de Taylor em torno do mínimo ajustado.
 - Vamos admitir que as incertezas nos parâmetros são pequenas e que podemos truncar esta expansão nos primeiros termos

$$\xi = \xi_0 + \underbrace{\sum_j \frac{\partial \xi}{\partial a_j} (a_j - \bar{a}_j)}_{0 \text{ (estou no mínimo)}} + \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial^2 \xi}{\partial a_j^2} (a_j - \bar{a}_j)^2 + \frac{1}{2} \sum_j \sum_{k \neq j} \frac{\partial^2 \xi}{\partial a_j \partial a_k} (a_j - \bar{a}_j)(a_k - \bar{a}_k) + \dots$$

- O termo ξ_0 é o valor de ξ calculado no mínimo

Incertezas nos parâmetros ajustados

- Podemos então calcular a função verossimilhança

$$L = e^{-\xi}$$

- Que resulta em

$$L = e^{-\xi_0} \times e^{-\frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial^2 \xi}{\partial a_j^2} (a_j - \bar{a}_j)^2} \times e^{-\frac{1}{2} \sum_j \sum_{k \neq j} \frac{\partial^2 \xi}{\partial a_j \partial a_k} (a_j - \bar{a}_j)(a_k - \bar{a}_k)} \times \dots$$

Incertezas nos parâmetros ajustados

- Se ξ for suficientemente parabólica em torno do mínimo os termos de ordem maiores são praticamente nulos
 - Exponencial destes termos ~ 1

$$L \sim e^{-\xi_0} \times \underbrace{e^{-\frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial^2 \xi}{\partial a_j^2} (a_j - \bar{a}_j)^2}}_{\text{Produto de gaussianas}} \times \underbrace{e^{-\frac{1}{2} \sum_j \sum_{k \neq j} \frac{\partial^2 \xi}{\partial a_j \partial a_k} (a_j - \bar{a}_j)(a_k - \bar{a}_k)}}_{\text{Termos de covariância entre parâmetros}}$$

- A função verossimilhança se assemelha a um produto de distribuições de probabilidade gaussianas com covariância

Incertezas nos parâmetros ajustados

- Por comparação

$$L \sim e^{-\xi_0} \times \underbrace{e^{-\frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial^2 \xi}{\partial a_j^2} (a_j - \bar{a}_j)^2}}_{\text{Produto de gaussianas}} \times \underbrace{e^{-\frac{1}{2} \sum_j \sum_{k \neq j} \frac{\partial^2 \xi}{\partial a_j \partial a_k} (a_j - \bar{a}_j)(a_k - \bar{a}_k)}}_{\text{Termos de covariância entre parâmetros}}$$

$$H(y, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right)^2}$$

- O que faz com que:

$$\sigma_{a_j}^2 = \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial a_j^2} \right)^{-1}$$

O Método dos mínimos quadrados

- No método dos mínimos quadrados, sabemos que

$$\xi = \text{const} + \frac{1}{2} X^2$$

- De tal modo que:

$$\sigma_{a_j}^2 = \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial a_j^2} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 X^2}{\partial a_j^2} \right)^{-1}$$

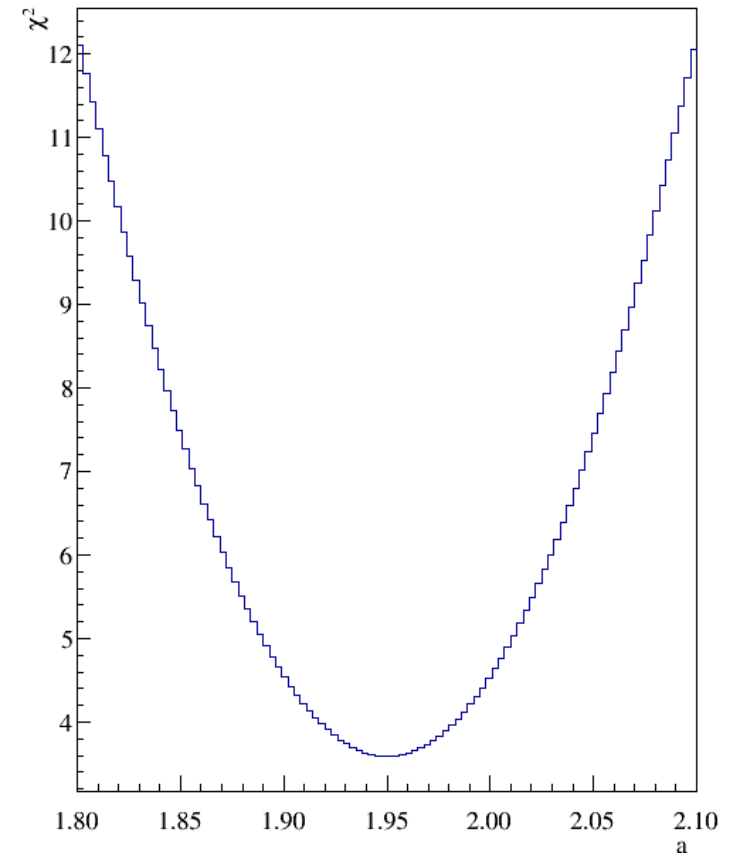
Vamos olhar a curva de X^2

- Expandir em Taylor

$$\begin{aligned} X^2 &= X_{\min}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X^2}{\partial a^2} (a - \bar{a})^2 + \dots \\ &= X_{\min}^2 + \frac{1}{\sigma_a^2} (a - \bar{a})^2 + \dots \end{aligned}$$

- Ou seja

$$\Delta X^2 = X^2 - X_{\min}^2 \sim \frac{1}{\sigma_a^2} (a - \bar{a})^2$$



Vamos olhar a curva de X^2

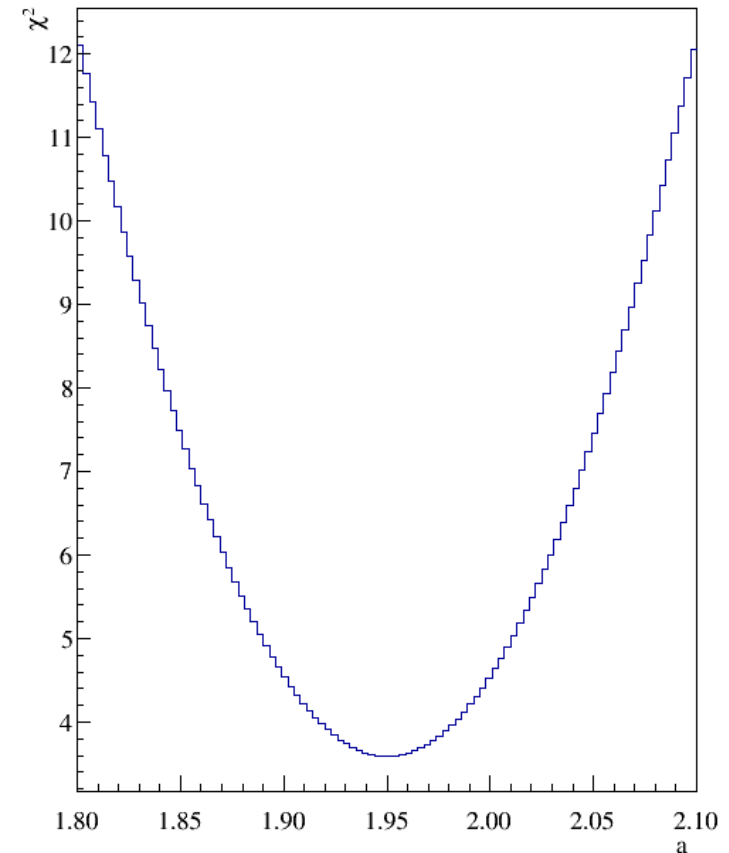
- De modo que

$$\Delta X^2 = X^2 - X_{\min}^2 \sim \frac{1}{\sigma_a^2} (a - \bar{a})^2$$

- Se

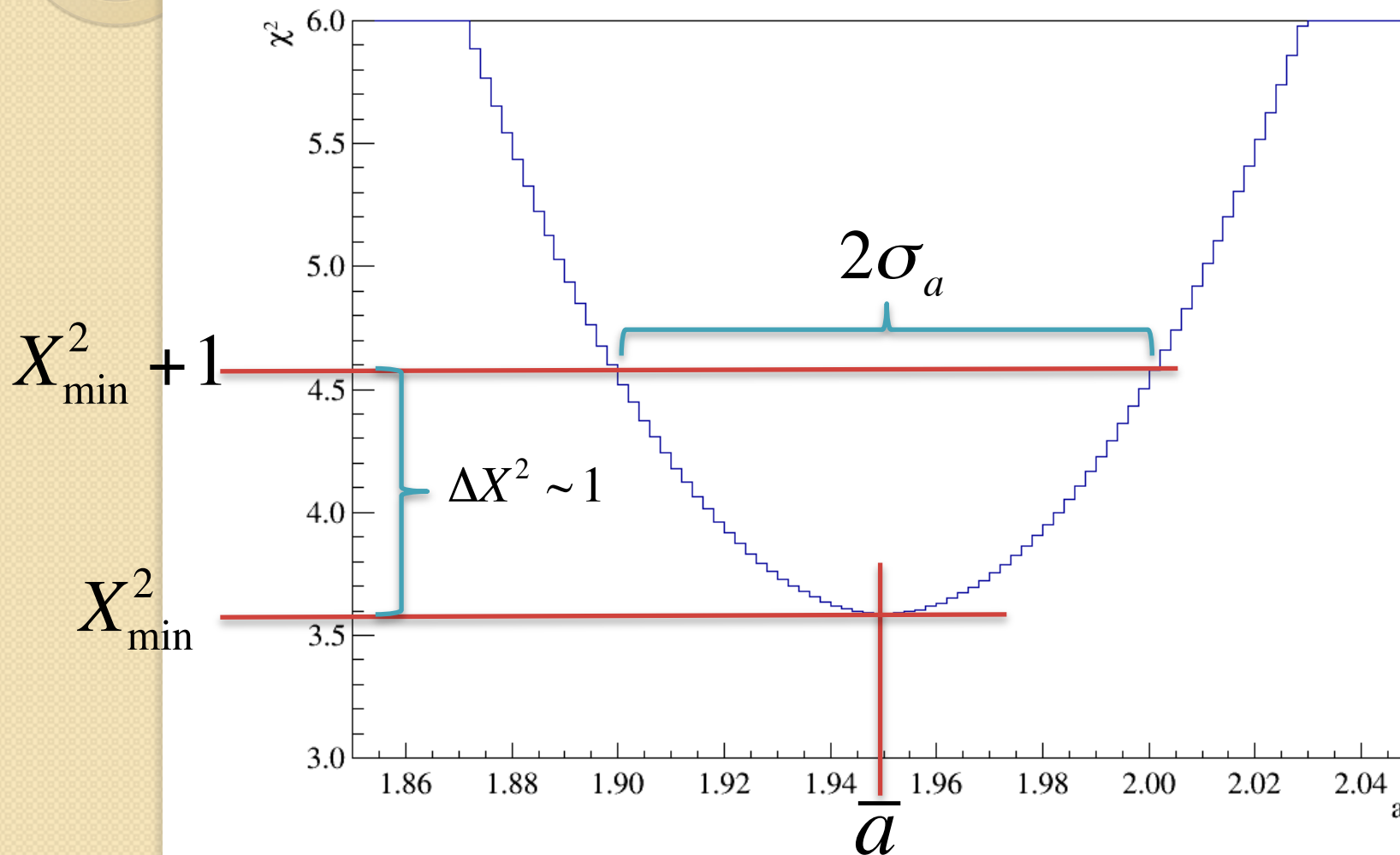
$$(a - \bar{a})^2 = \sigma_a^2 \rightarrow \Delta X^2 \sim 1$$

- Posso graficamente estimar a incerteza em a .



Incerteza de parâmetros do MMQ graficamente

$$(a - \bar{a})^2 = \sigma_a^2 \rightarrow \Delta X^2 \sim 1$$



Algumas considerações

- Nós supomos que a grandeza ξ seja suficientemente parabólica em torno do seu mínimo
 - Consequentemente, também o X^2 quando o MMQ se aplica.
 - Isto nem sempre é verdade mas em geral dá uma boa “estimativa” das incertezas nos parâmetros ajustados
 - Para fazer direito utiliza-se métodos de Monte Carlo
- Note que estamos olhando variação no X^2 e não no X^2_{red} .
 - Tem uma componente de raiz do número de graus de liberdade para considerar
 - CUIDADO QUE O $X^2_{red} + 1$ fica mais distante do mínimo do que o X^2 o que torna mais necessário verificar se a curva é realmente uma parábola.

The background of the slide is a dark blue field filled with numerous white, glowing tracks. These tracks represent the paths of particles as they pass through a detector. Some tracks are straight lines, while others are spirals or curves, indicating the influence of magnetic fields. The tracks are scattered across the frame, with some being more prominent than others.

Experiência II

Estudo de uma partícula em um campo
eletromagnético

Construção de um acelerador de partículas

Metodologia a ser adotada

- Isolar o campo elétrico e entender como é o movimento de partículas dentro deste campo elétrico?
 - Podemos descrever o movimento destas partículas teoricamente? Quais os compromissos adotados e as limitações teóricas e experimentais?
- Isolar o campo magnético e estudar como é o movimento destas partículas dentro deste campo magnético?
 - Podemos descrever este movimento teoricamente?
- Após entender cada fenômeno separadamente fica mais fácil entender o problema completo
 - Ligar, simultaneamente, os campos elétrico e magnético
 - Quais as grandezas que devemos observar para comparar com previsões teóricas
 - Quais as limitações teóricas e experimentais?



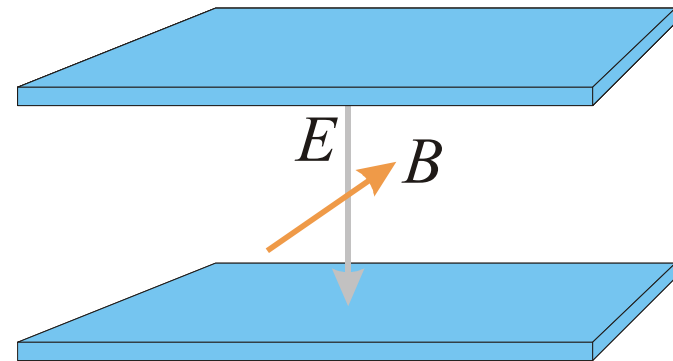
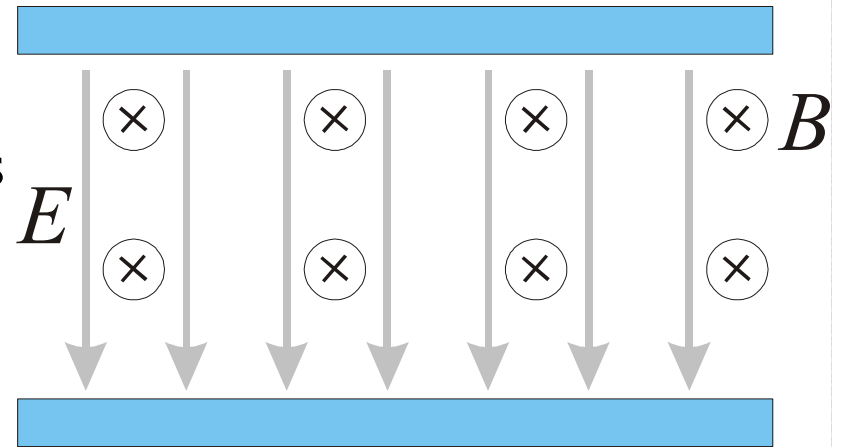
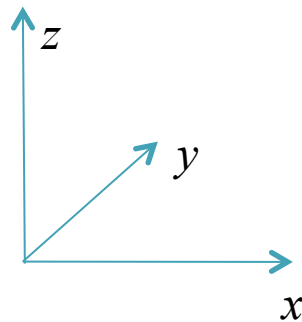
Metodologia a ser adotada

- Duas etapas
 - Esta semana
 - Ligar os dois campos, estudar se as aproximações efetuadas separadamente são consistentes
 - Calibrar o filtro de velocidades
 - Próxima semana
 - Estudar a capacidade do seletor em separar duas partículas com velocidades próximas – resolução.

Objeto de estudo: o Filtro de Wien

- O filtro de Wien consiste de uma configuração de campo elétrico e magnético cruzados (perpendiculares) e perpendiculares à velocidade **inicial** da partícula incidente

$$m \frac{d}{dt} \vec{v} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$



Movimento de uma partícula neste campo idealizado

- Vamos resolver o movimento dentro da bobina

$$m \frac{d}{dt} \vec{v} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

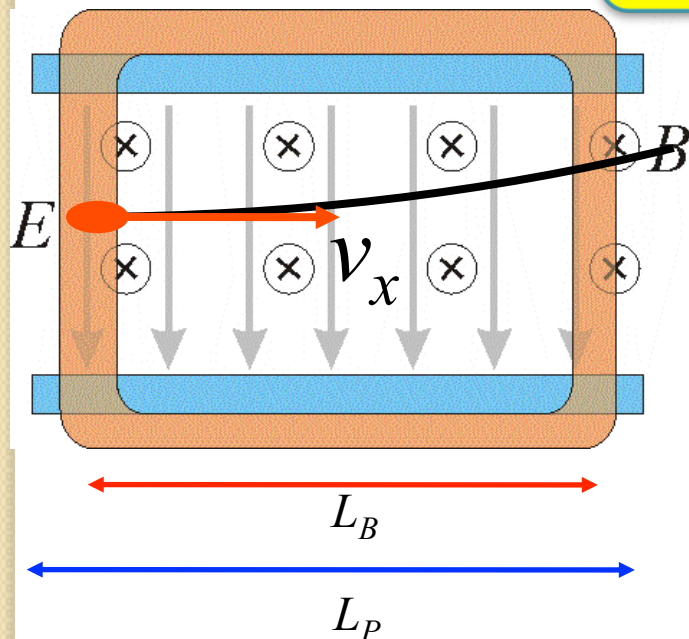
$$B(v_x \hat{k} - v_z \hat{i})$$

$$\vec{v}_0 = v_{0x} \hat{i}$$

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

$$\vec{B} = B \hat{j}$$

$$\vec{E} = -E \hat{k}$$



$$m \frac{d}{dt} \vec{v} = q(v_x B - E) \hat{k} - qBv_z \hat{i}$$

Vamos olhar de perto este seletor

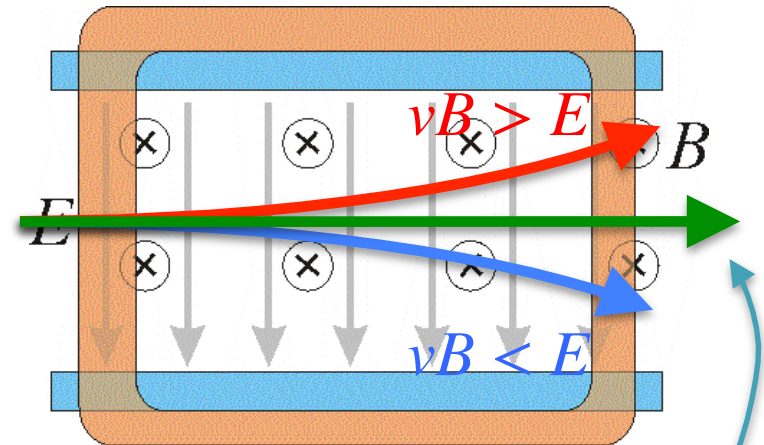
- Qual é a condição na qual a partícula não sofre desvio?

$$m \frac{d}{dt} \vec{v} = q(v_x B - E) \hat{k} - qBv_z \hat{i}$$

- Condição de força resultante nula:

$$\vec{F} = q(v_x B - E) \hat{k} - qBv_z \hat{i} = 0$$

$$v_{0x} B - E = 0 \quad v_{0x} = \frac{E}{B}$$



v_z inicial é nula. Se não houver força na componente k isto não muda

$$v_{0x} = \frac{E}{B}$$

Se a velocidade da partícula for igual à relação entre campo elétrico e magnético o desvio sofrido é nulo

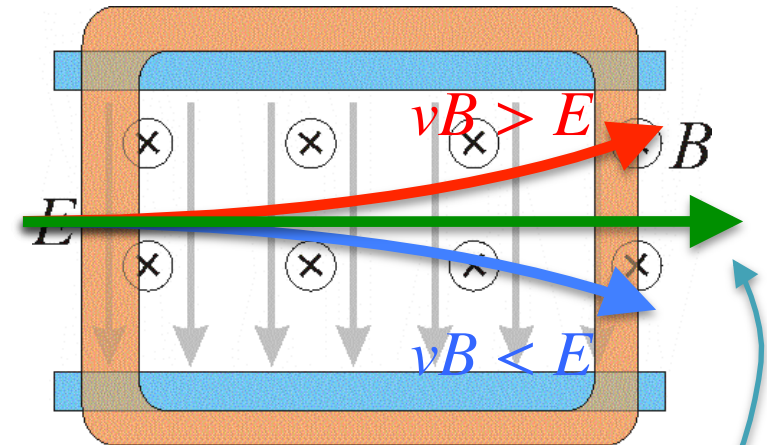
Vamos olhar de perto este seletor

- Mas também podemos pensar em cada movimento separadamente
- Já estudamos que a deflexão devido ao campo elétrico (apenas) vale:

$$h = \frac{qL_P E}{mv_{0x}^2} \left(\frac{L_P}{2} + D_{PS} \right)$$

- E a deflexão devido ao campo magnético vale:

$$H = \frac{qL_B L}{2mv_{0x}} B$$



$$v_{0x} = \frac{E}{B}$$

Vamos olhar de perto este seletor

- Na situação que não há desvio da partícula, um movimento compensa o outro e assim:

$$h = H$$

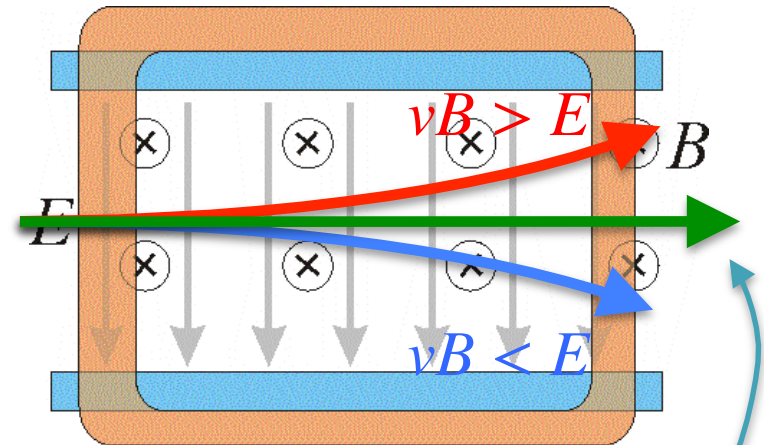
- Ou seja:

$$\frac{qL_P E}{mv_{0x}^2} \left(\frac{L_P}{2} + D_{PS} \right) = \frac{qL_B L}{2mv_{0x}} B$$

$$v_{0x} = \frac{E}{B}$$

- Assim:

$$v_{0x} = \frac{2L_P}{L_B L} \left(\frac{L_P}{2} + D_{PS} \right) \frac{E}{B}$$



Vamos olhar de perto este seletor

- Mas nós sabemos, pelas equações de movimento, que a velocidade de filtro é:

$$v_{0x} = \frac{E}{B}$$

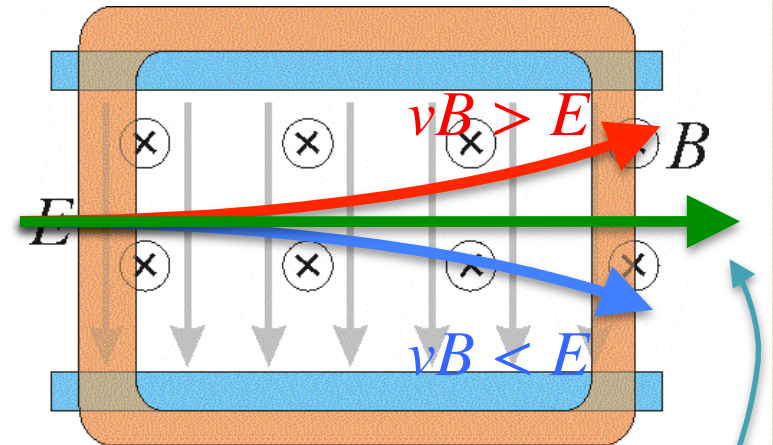
- Sabendo que:

$$v_{0x} = \frac{2L_P}{L_B L} \left(\frac{L_P}{2} + D_{PS} \right) \frac{E}{B}$$

$$v_{0x} = \frac{E}{B}$$

- Para que o nosso modelo seja válido precisamos que:

$$k = \frac{2L_P}{L_B L} \left(\frac{L_P}{2} + D_{PS} \right) \sim 1$$



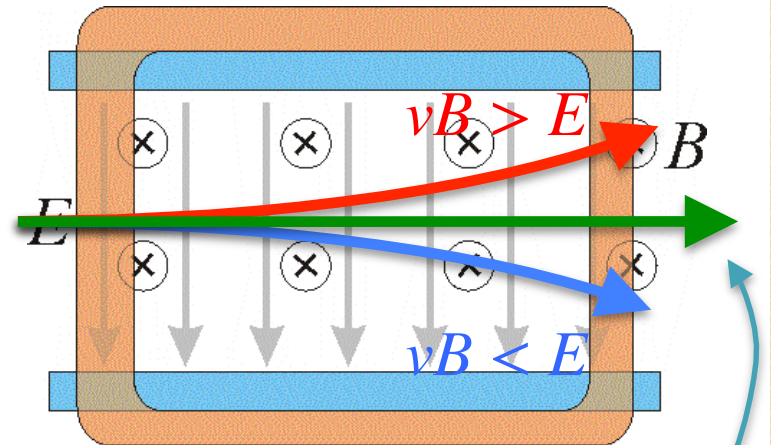
Calibração do seletor de velocidades

- Primeiramente precisamos verificar se o nosso modelo de campos ideais se aplicam. Neste caso, a partir dos dados das semanas anteriores, obter o valor de k e checar se:

$$k \sim 1$$

- Nós sabemos também que o campo elétrico é proporcional à tensão entre as placas e que o campo magnético é proporcional à corrente nas bobinas, ou seja:

$$E = \frac{V_P}{d}, \quad B = \beta i$$



$$v_{0x} = \frac{E}{B}$$

Calibração do seletor de velocidades

- Ou seja, para a velocidade de filtro, sem desvio:

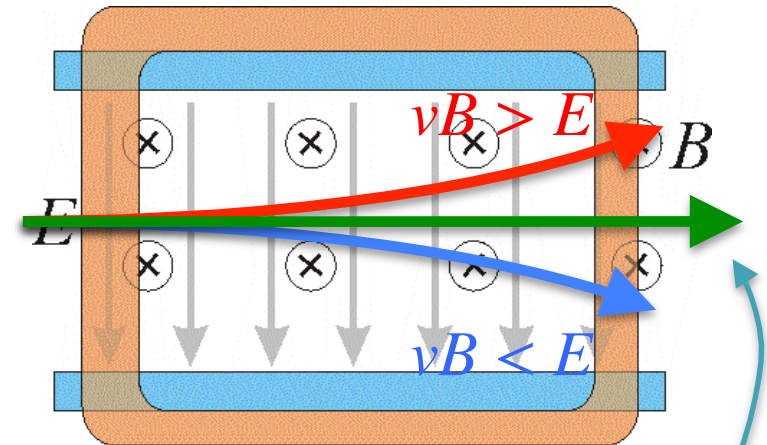
$$v_{0x} = \frac{E}{B}$$

- Podemos fazer que:

$$v_{0x} = \frac{1}{\beta d} \frac{V_P}{i}$$

- Ou seja:

$$v_{0x} = \alpha \frac{V_P}{i}$$



$$v_{0x} = \frac{E}{B}$$

IMPORTANT!

Esta equação só se aplica à velocidade de filtro. Não é uma relação aplicável a qualquer velocidade!

Objetivos da semana

- Verificar se o nosso modelo de campos ideais se aplicam. Neste caso, a partir dos dados das semanas anteriores, obter o valor de k e checar se:

$$k = \frac{2L_P}{L_B L} \left(\frac{L_P}{2} + D_{PS} \right) \sim 1$$

- Calibrar o seletor de velocidades. A partir da relação:

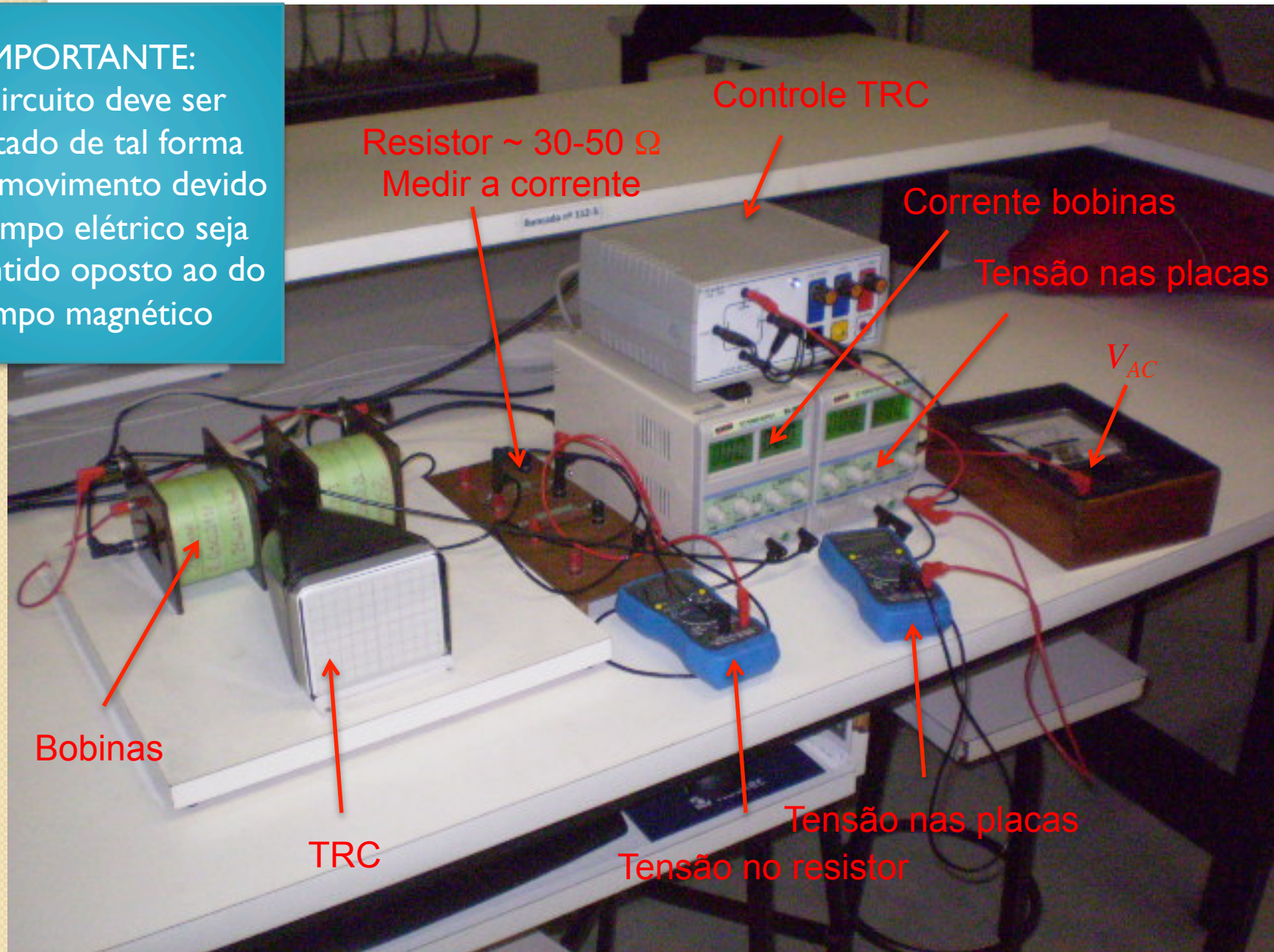
$$v_{0x} = \alpha \frac{V_P}{i}$$

- Determinar a constante α . Sabendo que $\alpha = 1/\beta d$, obter o valor de d e comparar com os resultados obtidos há duas semanas

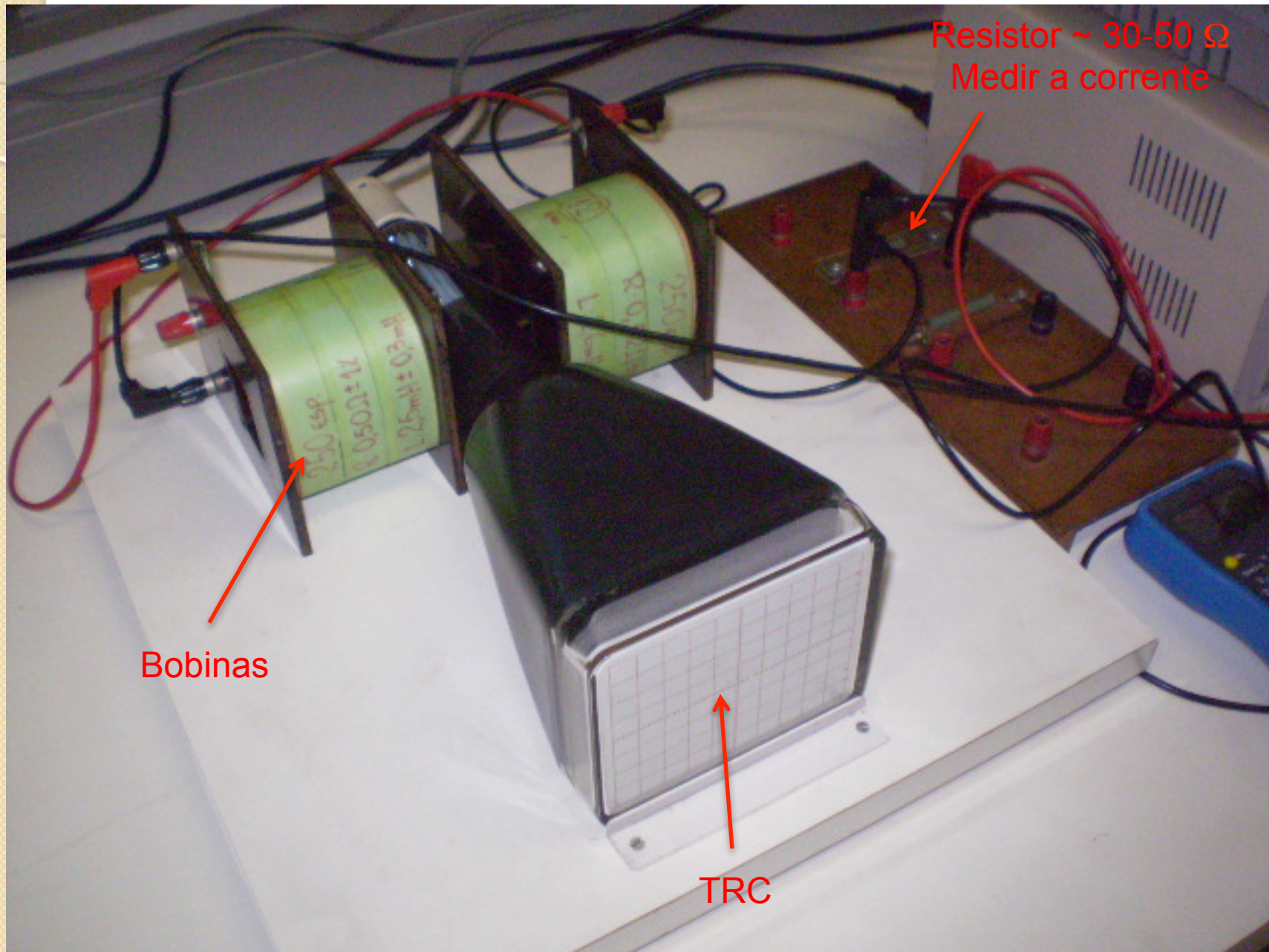
O Seletor de velocidades

IMPORTANTE:

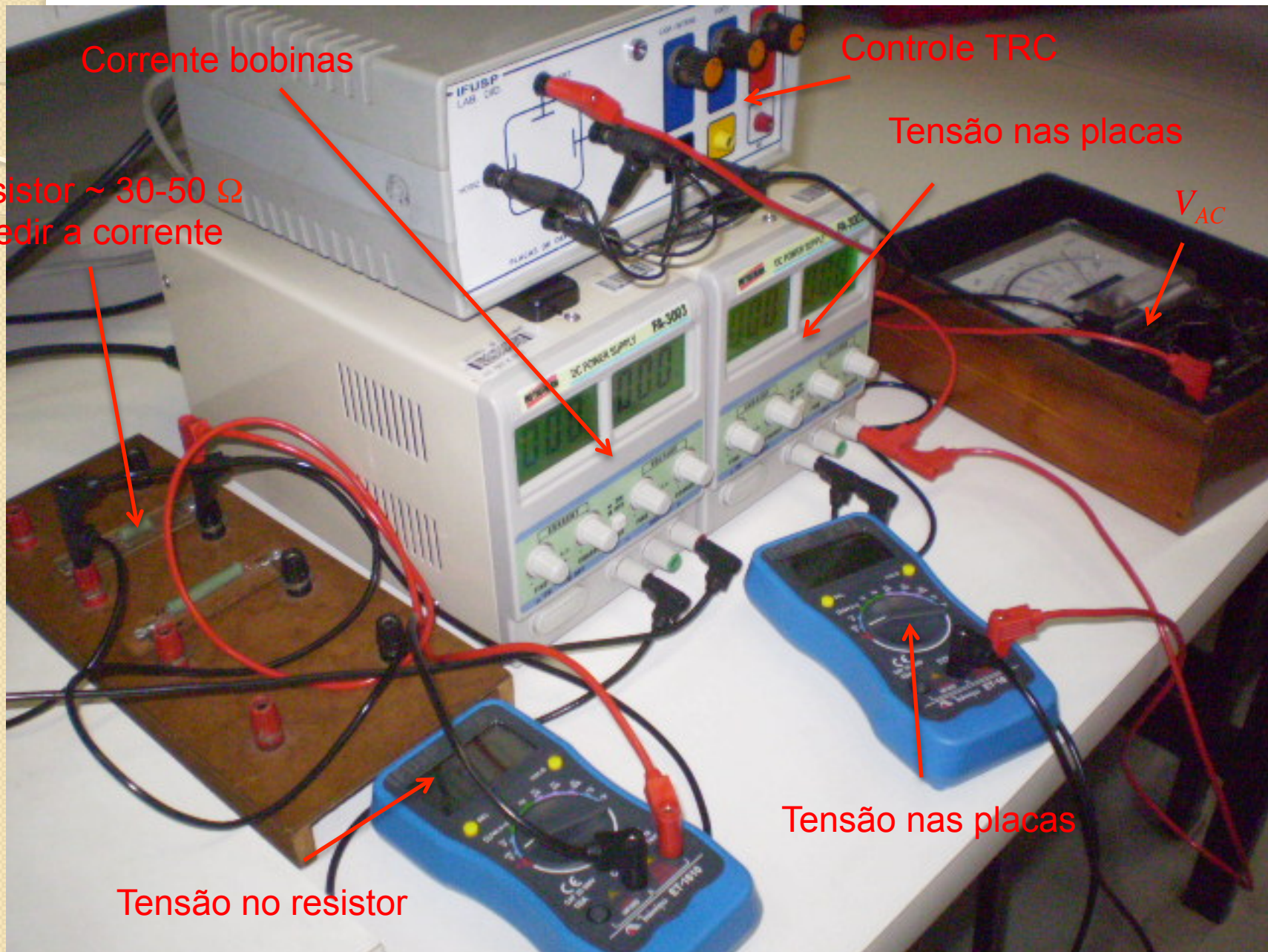
O circuito deve ser montado de tal forma que o movimento devido ao campo elétrico seja no sentido oposto ao do campo magnético



O Seletor de velocidades

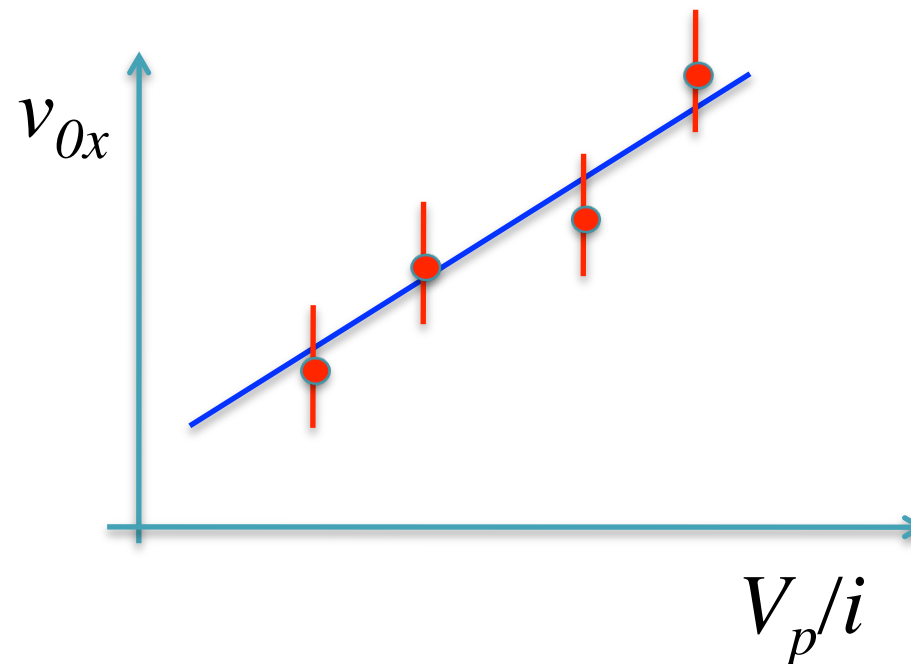


O Seletor de velocidades



Como calibrar o seletor e obter α ?

- Precisamos fazer o gráfico



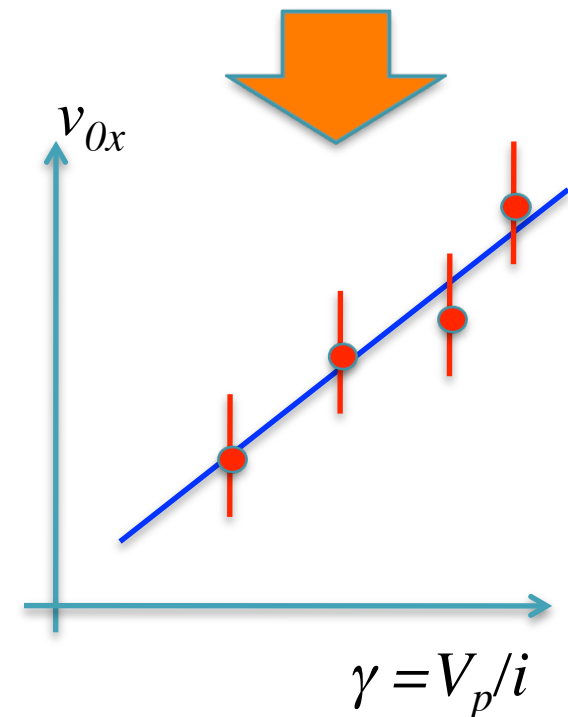
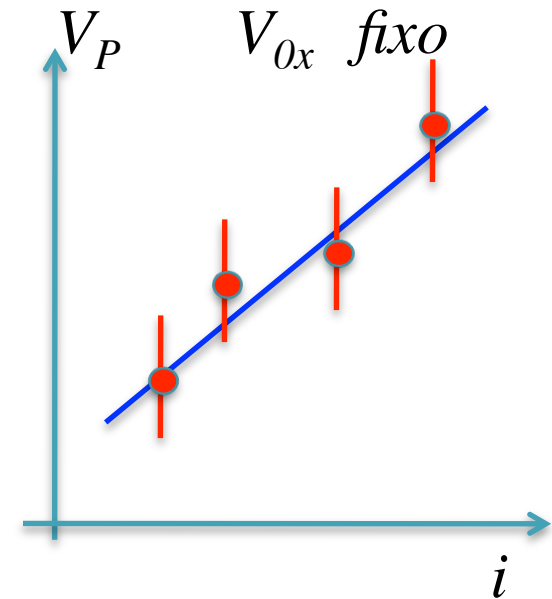
$$v_{0x} = \alpha \frac{V_P}{i}$$

- Como obter cada ponto do gráfico de forma precisa?

IMPORTANTE!

Procedimento

1. Selecione uma tensão de aceleração (V_{AC}) e obtenha v_{0x} .
2. Com tensão entre as placas NULA ($V_P = 0$)
 1. Ajuste a corrente (i) para que o deslocamento devido ao campo magnético seja 1 cm . Meça i .
3. Ajuste a tensão entre as placas para compensar este deslocamento e voltar a partícula para a origem. Meça V_P .
4. Repita os passos 2-3 para $h=1, 2, 3$ e 4 cm .
5. Faça o gráfico de V_P em função de i para estes dados.
 1. O coeficiente angular obtido é o valor $\gamma = V_P/i$ para o v_{0x} selecionado.
6. Repita os passos acima para, pelo menos, mais 3 valores de v_{0x} (V_{AC}) e faça o gráfico ao lado
 1. Total de pelo menos 4 pontos



Atividades da semana

- Verificar se a aproximação teórica para o seletor se aplica
 - Calcular a constante k e verificar se a ordem de grandeza é próxima de 1. Discutir os resultados.

- Calibrar o seletor de velocidades
 - Obter a constante α que relaciona a velocidade de filtro com a tensão entre as placas e a corrente nas bobinas
 - Gráficos ajustados de V_p em função da corrente para cada v_{0x} .
 - Gráfico ajustado de v_{0x} em função de V_p/i obtido dos ajustes acima.

- Discuta a validade do modelo ideal do seletor de velocidades