

Física Experimental III

<http://disciplinas.stoa.usp.br/course/view.php?id=3894§ion=2>

Aula 6





Mais um pouco de estatística

Ajustes de funções e o
método dos mínimos
quadrados

Problema básico

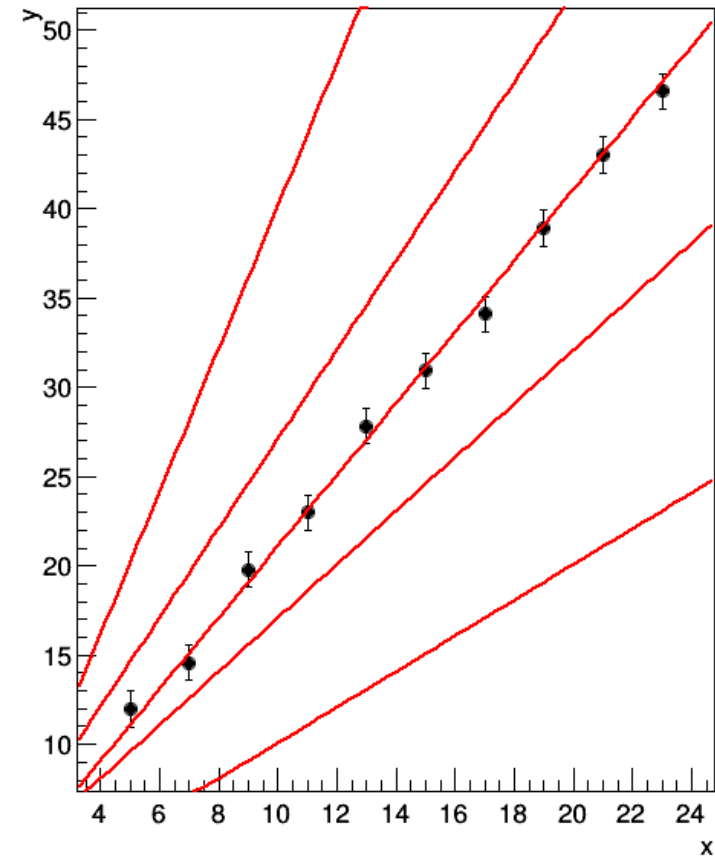
- Imagine um conjunto de dados

$$\{x_i, y_i, \sigma_i\}$$

- E uma função

$$y = f(x, \vec{a})$$

- Onde o vetor a corresponde ao conjunto de parâmetros desta função.
- Qual o vetor a que descreve melhor o conjunto de dados?



Vamos dar um passo para trás

- Imagine um conjunto de medidas realizadas y_i com valores verdadeiros μ_i , cujas funções densidade de probabilidade são:

$$H(x_i, \mu_i)$$

- Os valores verdadeiros podem ser função de outra grandeza, x_i , ou seja:

$$\mu_i = f(x_i, \vec{a})$$

- Onde os elementos do vetor a são os parâmetros desta função

Método da máxima verossimilhança

- Podemos definir uma função batizada de verossimilhança como sendo:

$$L = \prod_i H(y_i, \mu_i) = \prod_i H(y_i, f(x_i, \vec{a}))$$

- Esta função não pode ser obtida pois não conhecemos o vetor a .
- O método da máxima verossimilhança consiste em encontrar o vetor a de tal forma que L seja máxima.

Método da máxima verossimilhança

- Em geral (vai ficar claro porque) trabalha-se com o logaritmo de L

$$L \rightarrow \ln L$$

- Que deve ser maximizado de modo a encontrar o vetor a .

O Método dos mínimos quadrados

- Vamos assumir que as medidas y_i tenham distribuições gaussianas de tal modo que:

$$H(y_i, \mu_i) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y_i - f(x_i, \vec{a})}{\sigma_i} \right)^2}$$

- A função de verossimilhança vale (para N medidas)

$$L = \prod_i \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y_i - f(x_i, \vec{a})}{\sigma_i} \right)^2}$$

O Método dos mínimos quadrados

- Então:

$$\ln L = \sum_i \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \right) - \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{y_i - f(x_i, \vec{a})}{\sigma_i} \right)^2$$

- Lembrando da definição de X^2 , temos:

$$\ln L = \text{const} - \frac{1}{2} X^2$$

O Método dos mínimos quadrados

- Deste modo, para L ser máxima

$$\ln L = \text{const} - \frac{1}{2} X^2 \quad X^2 = \sum_i \left(\frac{y_i - f(x_i, \vec{a})}{\sigma_i} \right)^2$$

- O X^2 , deve ser mínimo. Encontrar o vetor a que torna o X^2 mínimo é resolver um sistema de equações que parte de

$$\frac{dX^2}{da_j} = 0$$

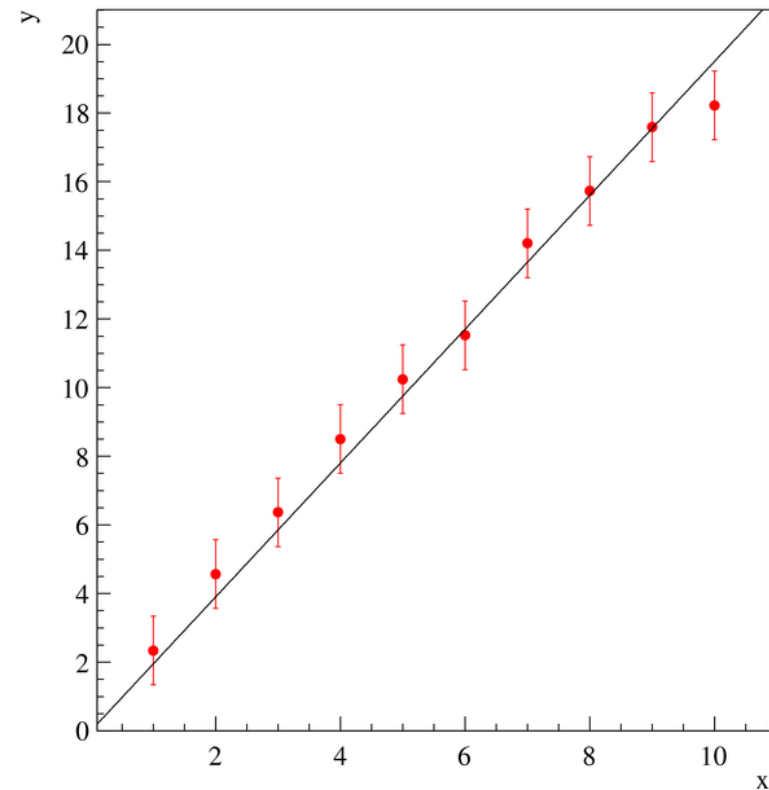
Exemplo: $f(x_i, \vec{a}) = ax$

- Resolvendo o problema

$$X^2 = \sum_i \left(\frac{y_i - ax_i}{\sigma_i} \right)^2$$

$$\frac{dX^2}{da} = 0 \Rightarrow a = \frac{\sum_i \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}}{\sum_i \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}}$$

- Que tem solução única



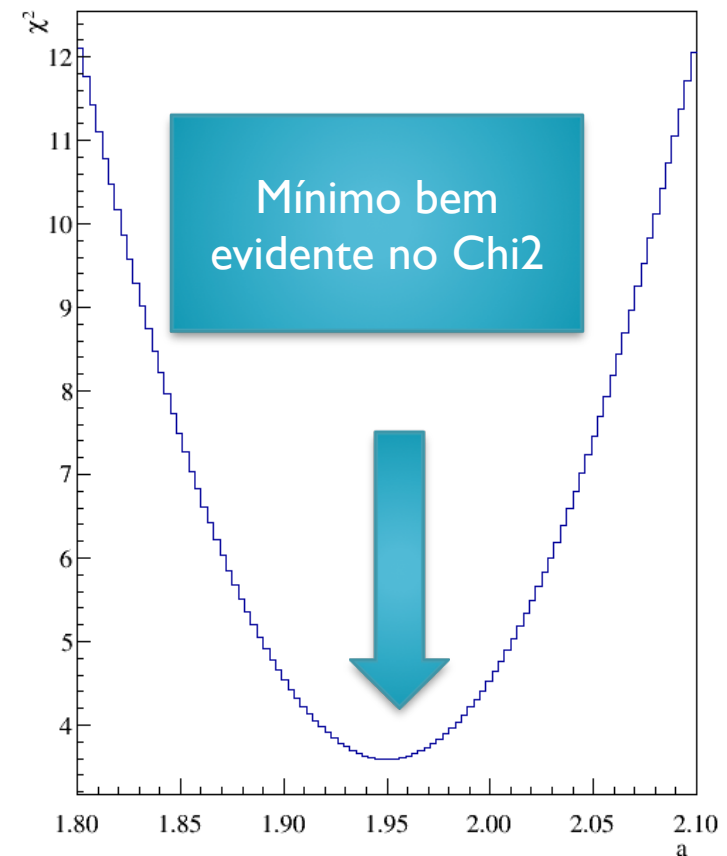
Exemplo: $f(x_i, \vec{a}) = ax$

- Resolvendo o problema

$$X^2 = \sum_i \left(\frac{y_i - ax_i}{\sigma_i} \right)^2$$

$$\frac{dX^2}{da} = 0 \Rightarrow a = \frac{\sum_i \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}}{\sum_i \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}}$$

- Que tem solução única



Funções lineares nos parâmetros

- No caso de funções lineares nos parâmetros

$$f(x, \vec{a}) = \sum_k a_k g_k(x)$$

- Onde $g_k(x)$ pode ser uma função qualquer, desde que não contenha nenhum parâmetro a ser ajustado
- Neste caso o MMQ tem resolução analítica fechada
 - Ver, por exemplo, Fundamentos da Teoria de Erros, J. H. Vuolo para fórmula geral

E funções não lineares nos parâmetros?

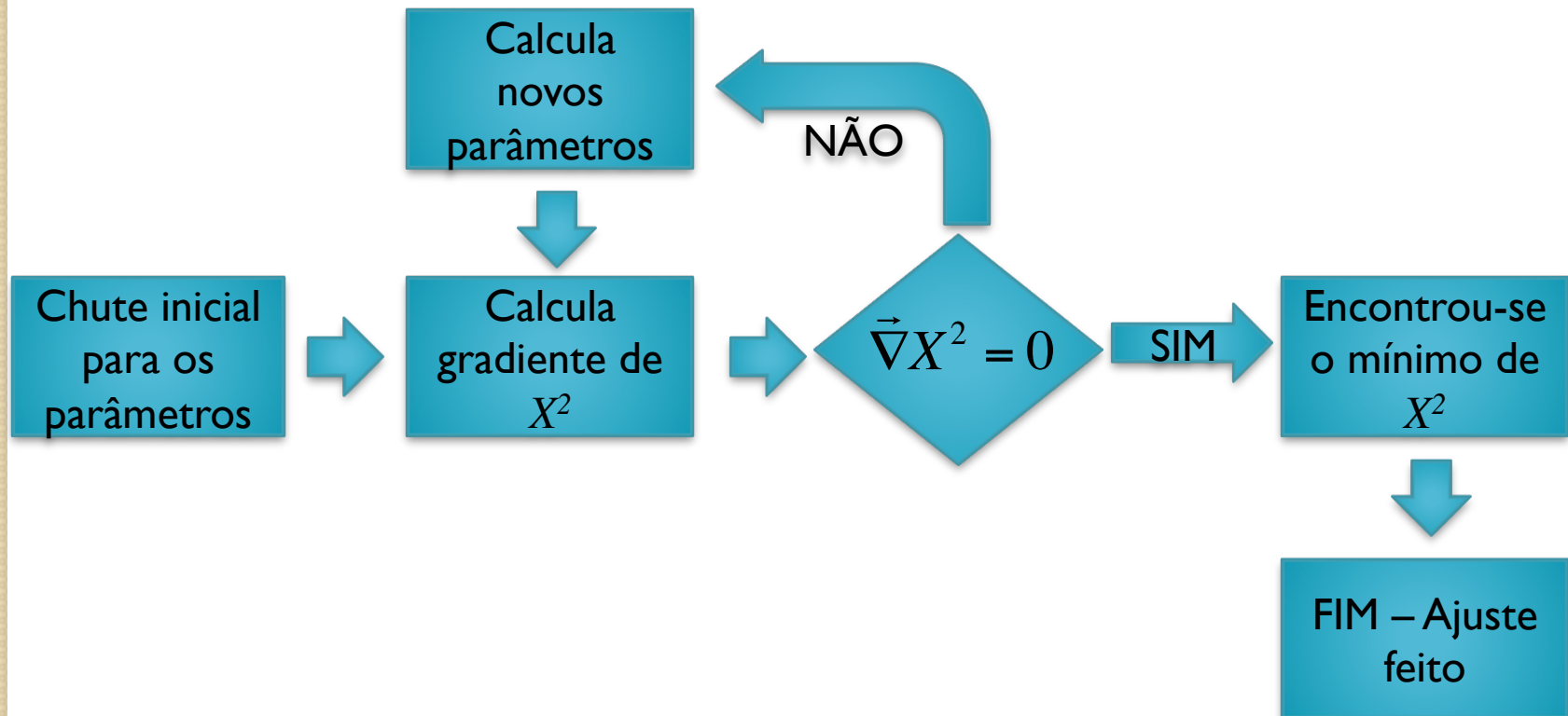
- São aquelas onde os parâmetros aparecem dentro de expressões não lineares, por exemplo

$$f(x, \vec{a}) = a_0 \sin(a_1 x + a_2)$$

- Em geral não dá para resolver analiticamente as expressões de minimização do X^2 .
 - Utilizam-se métodos numéricos para isto

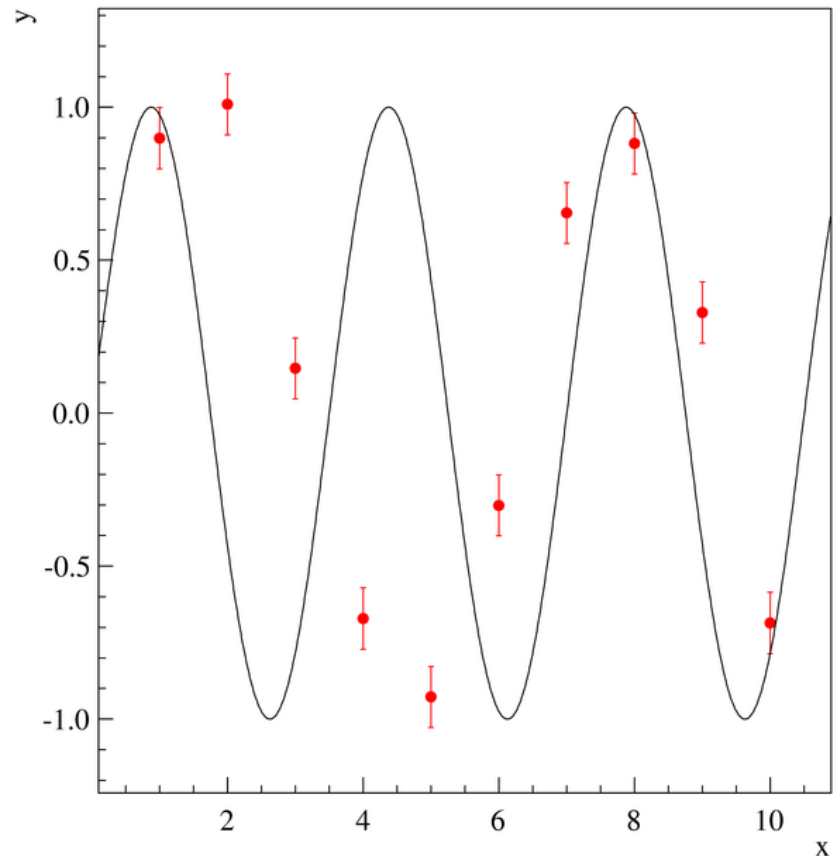
Típico método de ajuste de funções não lineares

- Em geral utiliza-se algoritmos baseados em gradiente



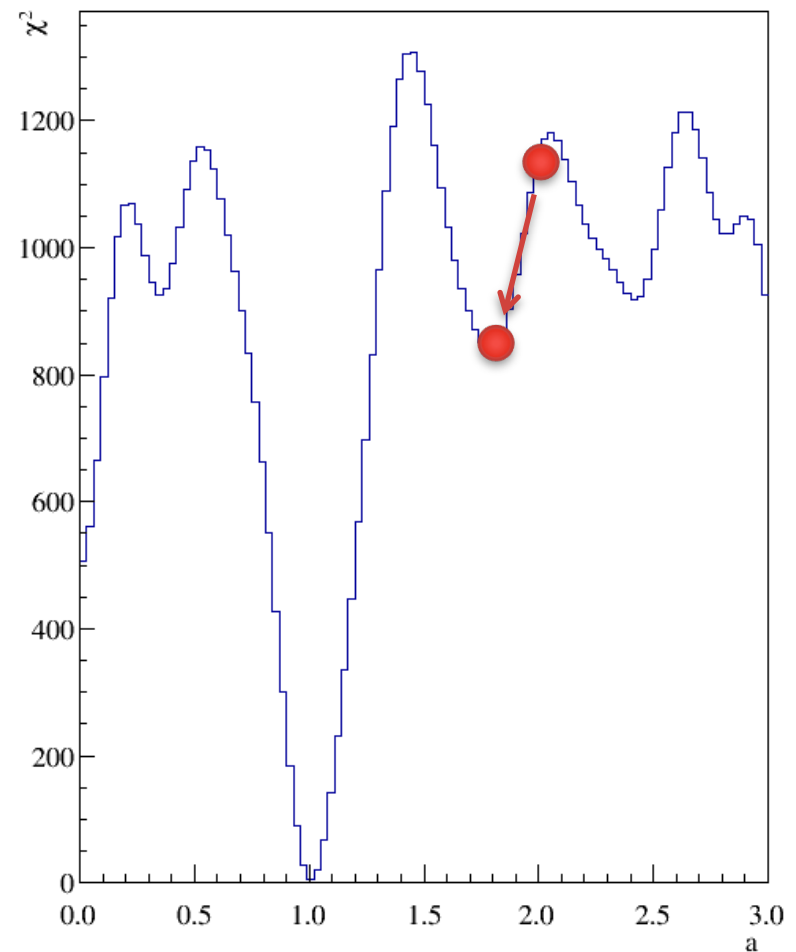
Exemplo: $f(x, a) = \sin(ax)$

- Quem nunca se deparou com o problema ao lado?
 - O ajuste não é bom
- Chute inicial para $a = 2$
- Mas o método não encontrou um mínimo de X^2 ?
 - Encontrou sim, e daí?



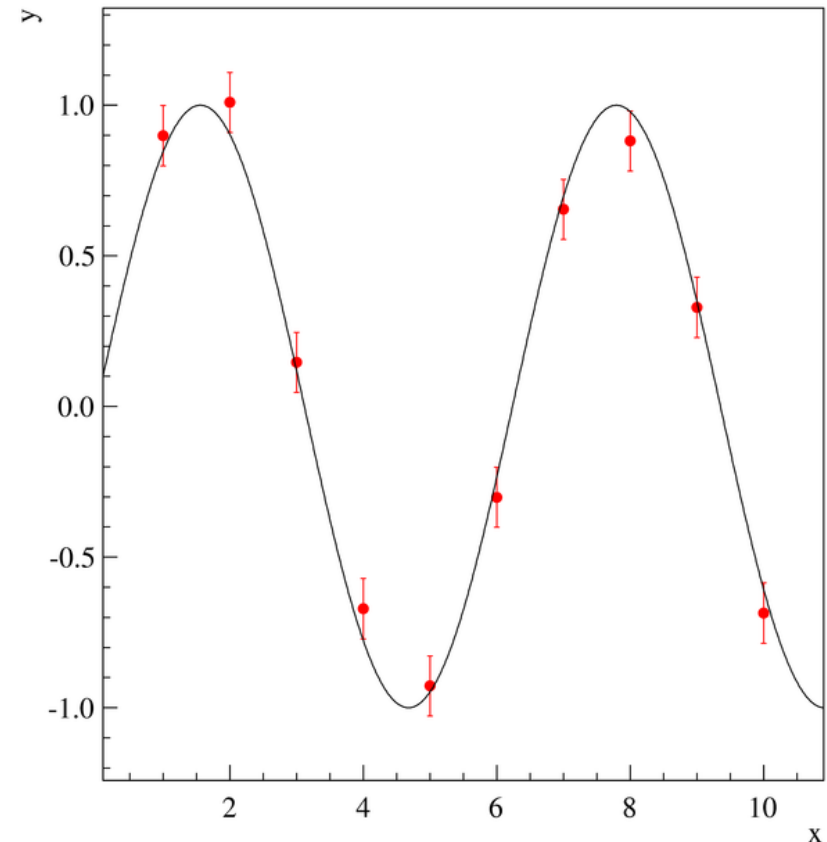
Exemplo: $f(x, a) = \sin(ax)$

- Funções não lineares podem gerar função de χ^2 com mínimos locais
 - Dependendo do chute inicial acabamos caindo em um destes mínimos
- Estamos interessados no mínimo global



Exemplo: $f(x, a) = \sin(ax)$

- O chute inicial torna-se muito importante no ajuste de funções não lineares
- Chute inicial para $a = 0.8$
- Encontramos o mínimo geral



Algumas considerações

- Método de máxima verossimilhança
 - Maximiza-se a probabilidade com base das densidades de probabilidade dos pontos
 - Se forem gaussianos e independentes → máxima verossimilhança resulta em achar o mínimo de X^2 (MMQ)
- Ajustes de MMQ com funções não lineares podem ser delicados
 - Chute inicial dos parâmetros é importante
 - E as incertezas nos parâmetros ajustados → próxima semana

Leitura recomendada

- Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental, **capítulo V**, O. Helene e V. Vanin. Ed. Edgard Blücher.
- Fundamentos da Teoria de Erros, **capítulo 10**, J. H. Vuolo. Ed. Edgard Blücher.
- <http://sampa.if.usp.br/~suaide/blog/?e=248>

Experiência II

Estudo de uma partícula em um campo
eletromagnético

Construção de um acelerador de partículas

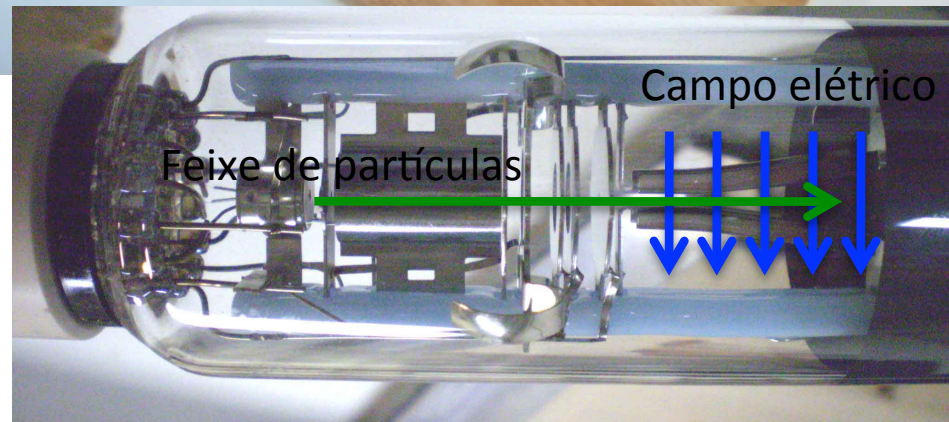
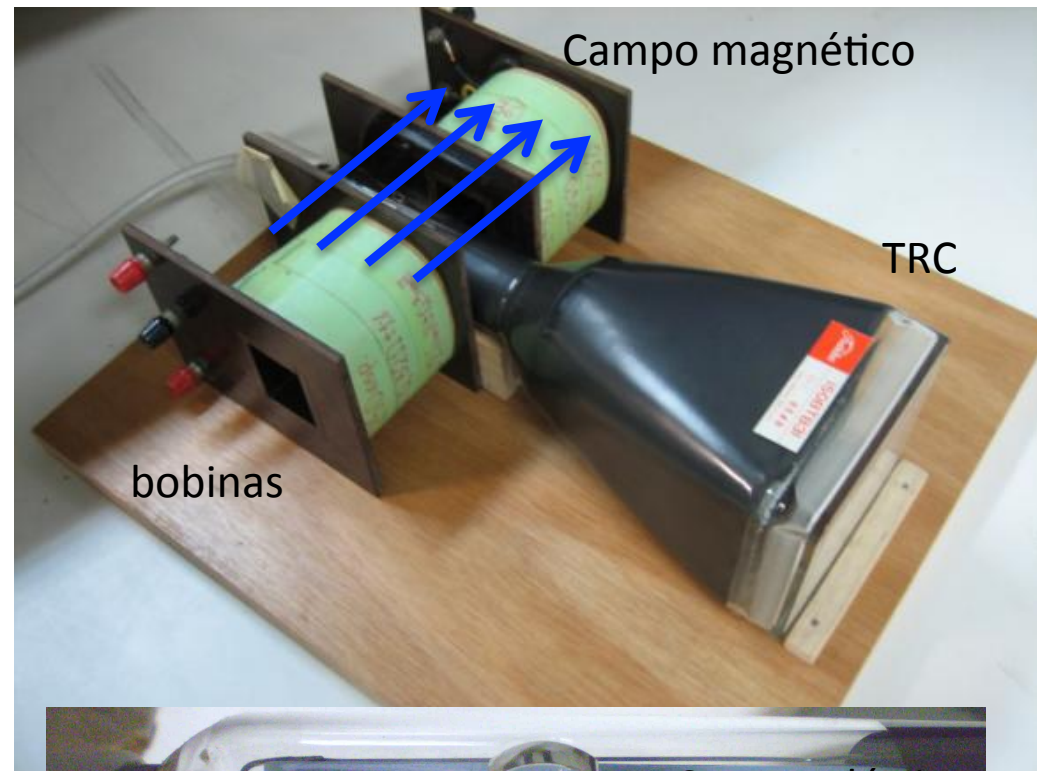


Experiência 2 – 5 semanas (4+1)

- Estudar o movimento de uma partícula em um campo eletromagnético
- O Seletor de velocidades do tipo filtro de Wien
 - Configuração especial de campo EM
 - Estudo das propriedades e características deste filtro
 - Como as características experimentais influenciam o funcionamento do filtro?
 - Como contornar as limitações experimentais e como tratar um sistema não ideal do ponto de vista teórico?

Nosso acelerador de partículas

- TRC
 - Produz feixe de elétrons acelerados e propicia campo elétrico
 - Tela é o detector de partículas
- Bobinas
 - Campo magnético





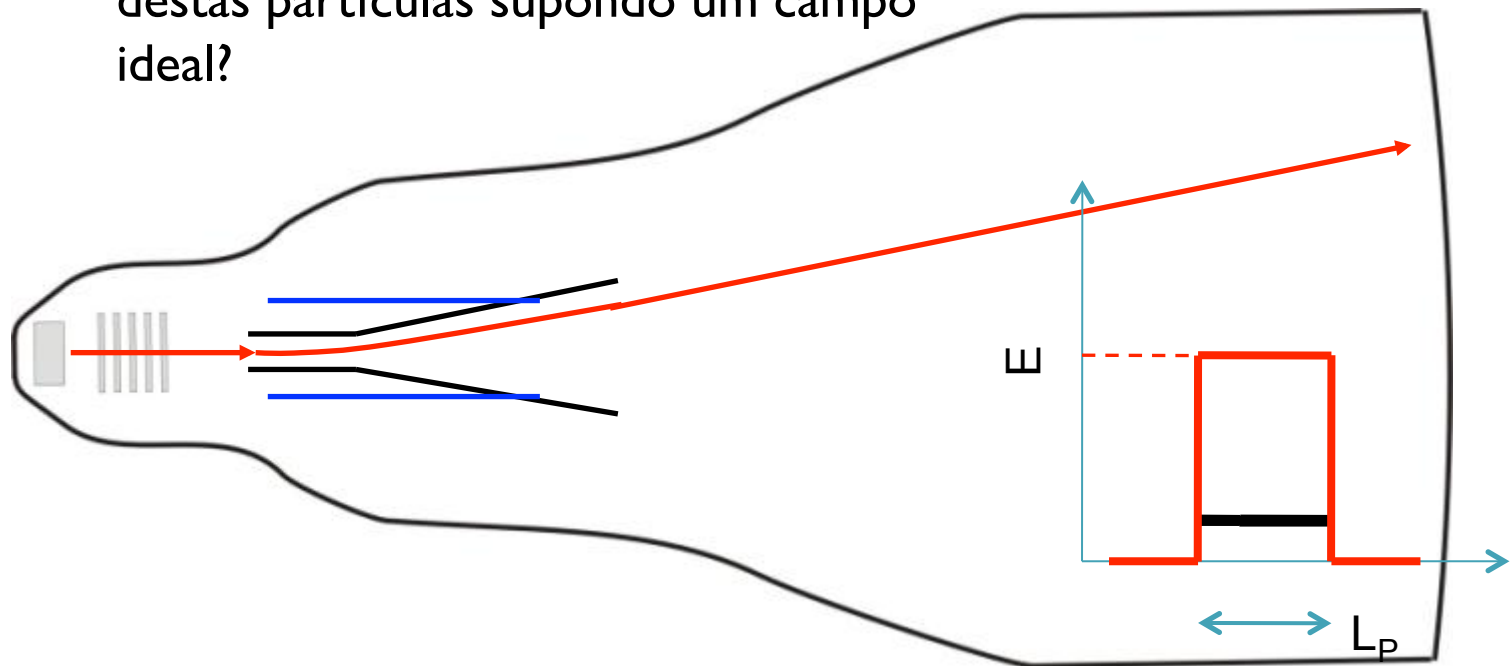
Metodologia a ser adotada

- Isolar o campo elétrico e entender como é o movimento de partículas dentro deste campo elétrico?
 - Podemos descrever o movimento destas partículas teoricamente? Quais os compromissos adotados e as limitações teóricas e experimentais?
- Isolar o campo magnético e estudar como é o movimento destas partículas dentro deste campo magnético?
 - Podemos descrever este movimento teoricamente?
- Após entender cada fenômeno separadamente fica mais fácil entender o problema completo
 - Ligar, simultaneamente, os campos elétrico e magnético
 - Quais as grandezas que devemos observar para comparar com previsões teóricas
 - Quais as limitações teóricas e experimentais?

Reviendo uns pontos da semana passada

- Problema real
 - Efeitos de borda, campo não uniforme
- Tentativa teórica
 - Solução do problema ideal
 - Podemos descrever o movimento destas partículas supondo um campo ideal?

$$h = A' \frac{V_P}{V_{AC}}$$



Quem é a constante A' ?

- Ou seja

$$A' = \frac{L_P}{2d} \left(\frac{L_P}{2} + D_{PS} \right)$$

- Experimentalmente, medimos o valor da constante A' .
- Ela não depende do tipo de partícula que passa pelo TRC. Depende apenas de como ele foi construído

Quem é a constante A' ?

- Ou seja

$$A' = \frac{L_P}{2d} \left(\frac{L_P}{2} + D_{PS} \right)$$

- Contudo, quais são as dimensões das placas equivalentes (L_P), distância entre elas (d) e a distância à tela (D_{PS})?
- Tenho três variáveis e apenas uma medida. Como eu resolvo esta ambigüidade?

Desfazendo a ambigüidade

- Para desfazer a ambigüidade precisamos de três equações:
 - Equação para A'
 - Relaciona A' com L_P , d e D_{PS} .
 - Distância placa à tela
 - Define $L_P + D_{PS}$
- Falta ainda uma equação para resolver o problema.

Quem é L_P e d ?

- Vamos lembrar alguns conceitos sobre movimento, em especial impulso de uma força

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = \int_0^t \vec{F}(t) dt$$

- No nosso caso ideal, a força é constante com módulo dado por qE . Nesta situação:

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F}(t) dt = \int_0^t q\vec{E} dt = q\vec{E}t = q\vec{E} \frac{L_P}{v_{0x}}$$

Quem é L_P e d ?

- Lembrando que o deslocamento na tela do TRC vale:

$$h = \frac{qEL_P}{mv_{0x}^2} \left(\frac{L_P}{2} + D_{PS} \right)$$

- E sabendo que o impulso, na direção y , tem módulo qEL_P/v_{0x} , e sabendo que o momento inicial da partícula vale $p = mv_{0x}$, temos:

$$h = \frac{I}{p} \left(\frac{L_P}{2} + D_{PS} \right) = Cte \frac{\Delta p}{p}$$

Quem é L_p e d ?

- Ou seja, o deslocamento está diretamente relacionado ao impulso fornecido pelo campo elétrico

$$h = Cte \frac{\Delta p}{p}$$

- Podemos utilizar esta informação para fazer uma escolha educada para o comprimento efetivo das placas.
 - Onde se dá o impulso que altera o deslocamento da partícula?

Quem é L_P e d ?

- No caso ideal temos que:

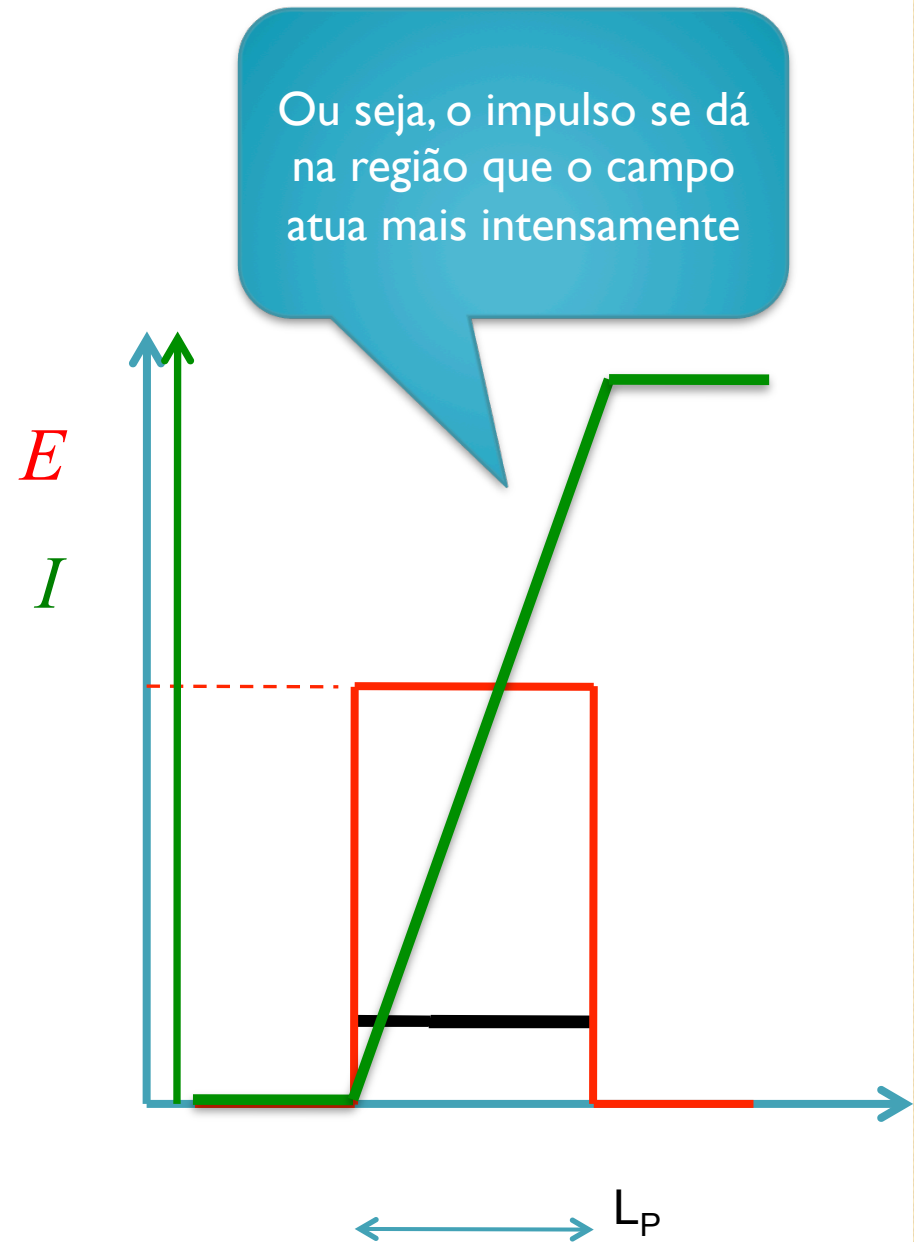
$$\vec{I} = q\vec{E}t$$

- Como:

$$v_{0x} = \frac{x}{t} \Rightarrow t = \frac{x}{v_{0x}}$$

- Temos:

$$\vec{I} = \frac{q\vec{E}}{v_{0x}} x$$



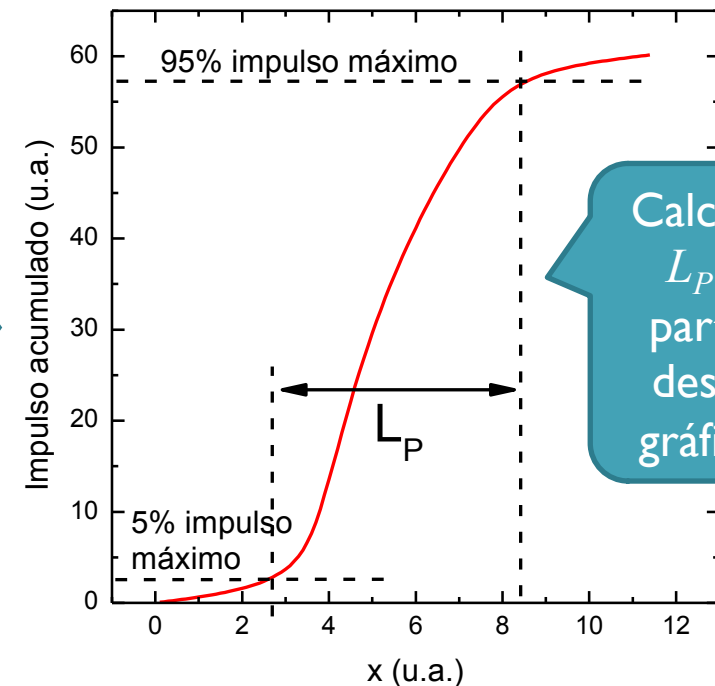
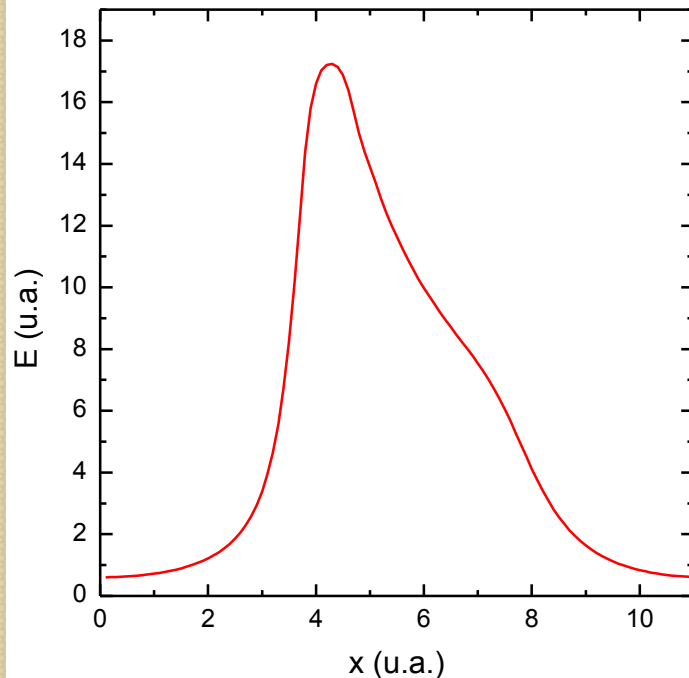
IMPORTANT!

Quem é L_P e d ?

Usar o campo simulado

- Calculando o impulso acumulado

$$\vec{I}(x) = \int_0^t \vec{F}(t) dt = \int_0^x \frac{q\vec{E}}{v_{0x}} dx = \frac{q}{v_{0x}} \int_0^x \vec{E} dx = cte \int_0^x \vec{E} dx$$



Calculo L_P a partir deste gráfico

Assim...

- Para desfazer a ambigüidade precisamos de três equações:
 - Equação para A'
 - Relaciona A' com L_P , d e D_{PS} .
 - Distância placa à tela
 - Define $L_P + D_{PS}$
 - Impulso acumulado
 - estabelece L_P

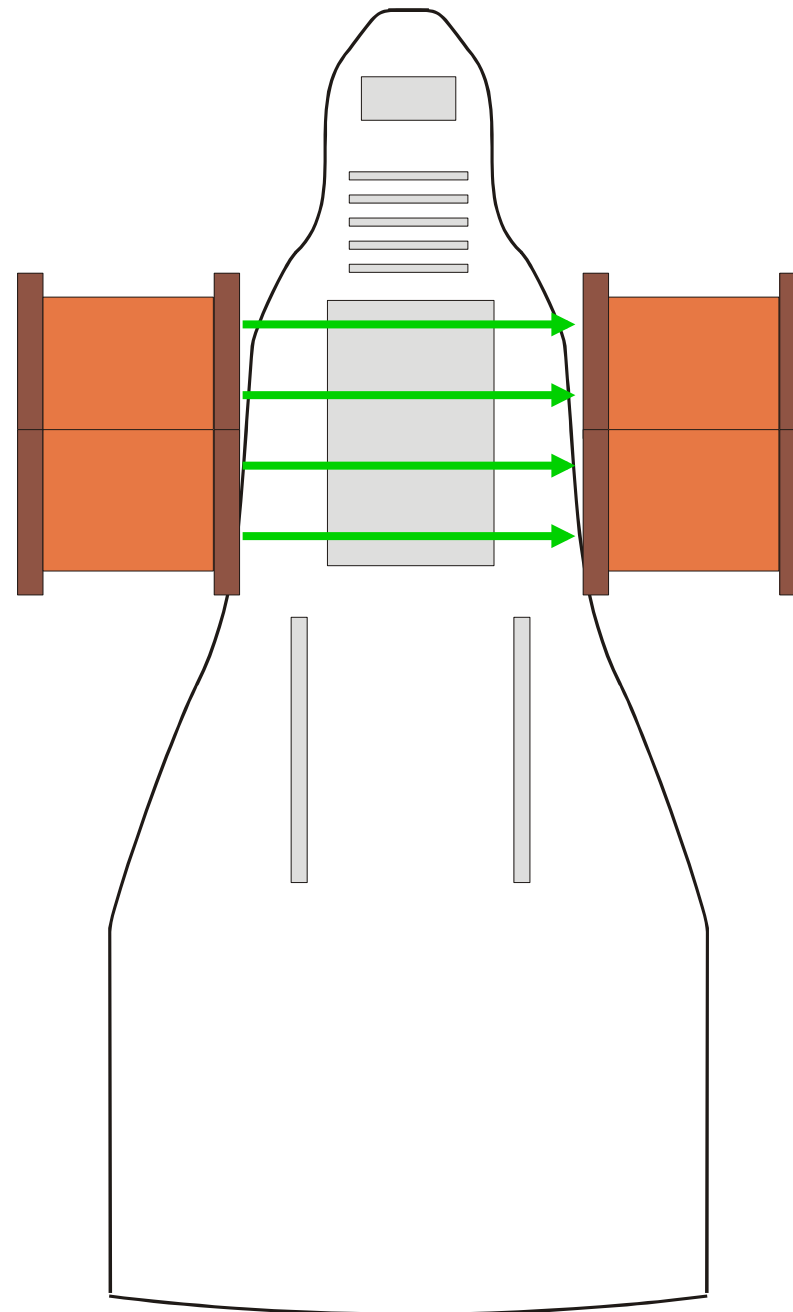


Objetivos desta semana

- Estudar o movimento de partículas no campo magnético
- Tentar modelar este movimento a partir de hipóteses simples
- Tentar entender melhor o movimento a partir de uma simulação realista das linhas de campo magnético no nosso arranjo

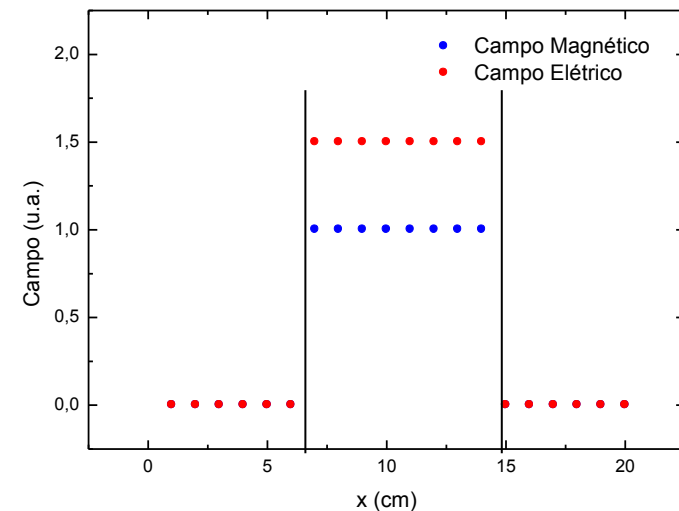
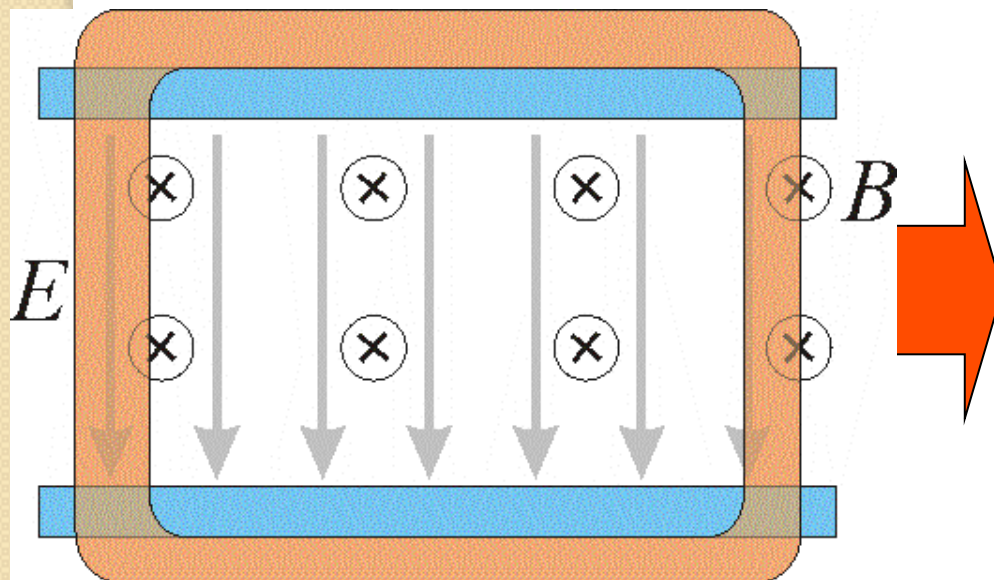
O nosso seletor de velocidades

- Tubo de raios catódicos para a parte de campo elétrico
- Duas bobinas em série para fazer o campo magnético



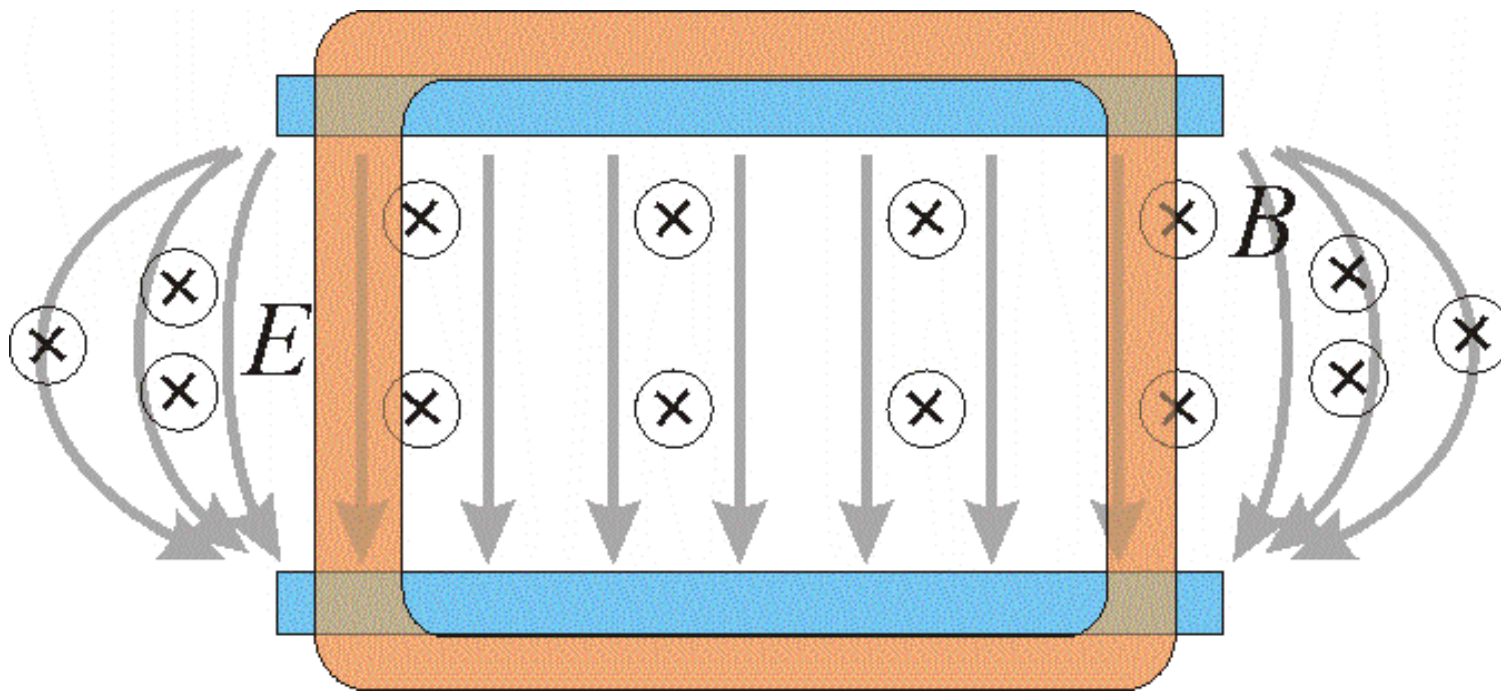
O seletor de velocidades ideal

- Equipamento composto de um campo elétrico e magnético cruzados (perpendiculares), uniformes, contantes e superpostos



O seletor de velocidades real

- Campos não ficam contidos na região das placas e das bobinas

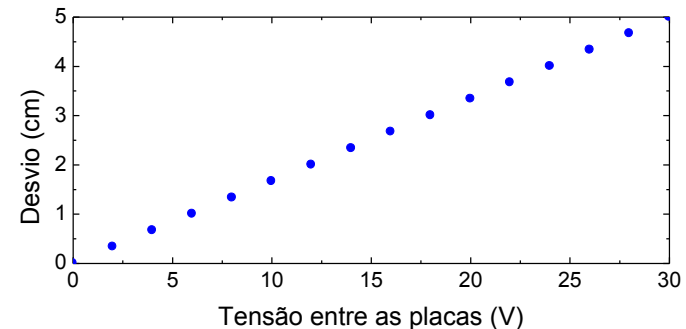
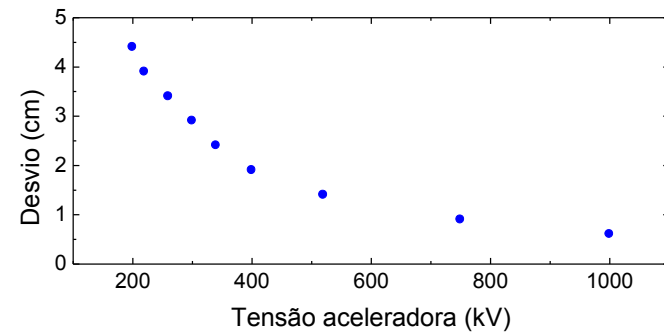


Estudo do campo elétrico

- Medidas experimentais indicaram que, dentro da precisão experimental, podemos aproximar o campo para uma configuração ideal

$$h = \frac{L_P V_P}{2dV_{AC}} \left(\frac{L_P}{2} + D_{PS} \right)$$

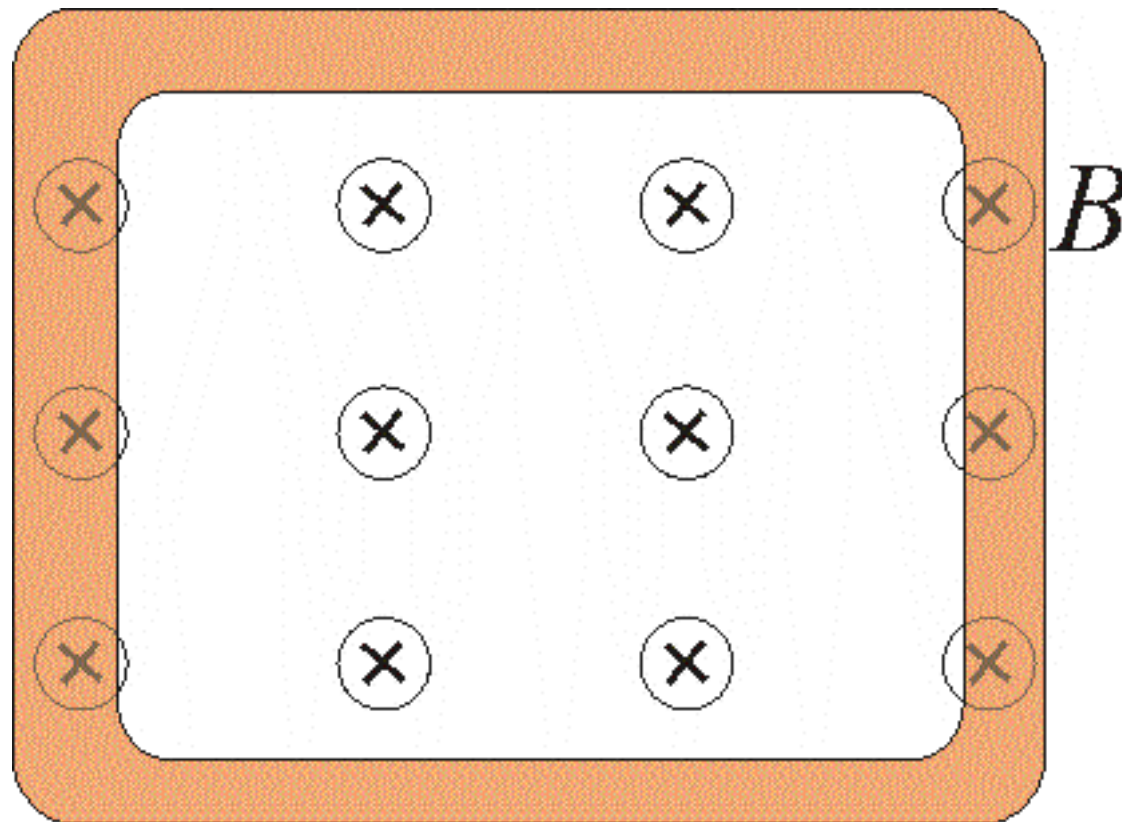
Qual o tamanho das placas, L_P , e distância entre elas, d ?



- Podemos fazer o mesmo para o campo magnético?

Modelo para o campo magnético

- Campo uniforme e constante entre as bobinas e nulo fora das bobinas

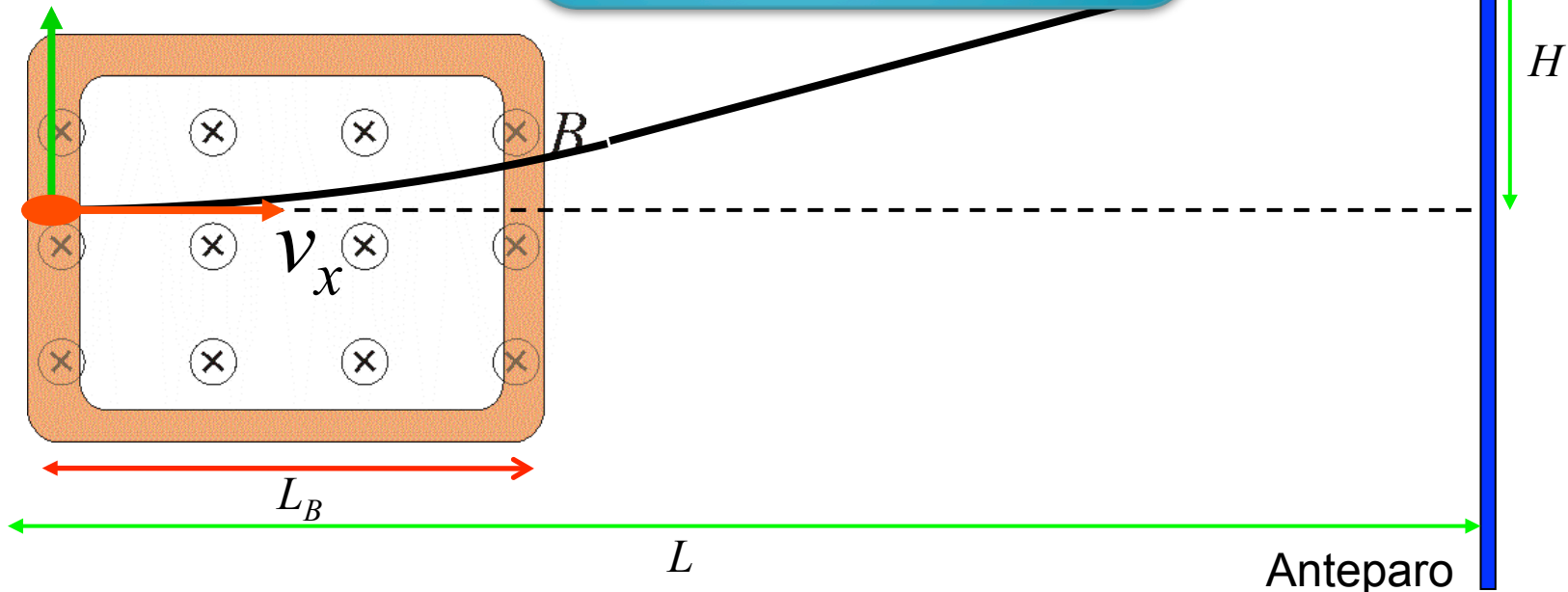


Movimento de uma partícula neste campo idealizado

- Campo uniforme e constante entre as bobinas e nulo fora das bobinas

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Movimento circular
no interior das
bobinas

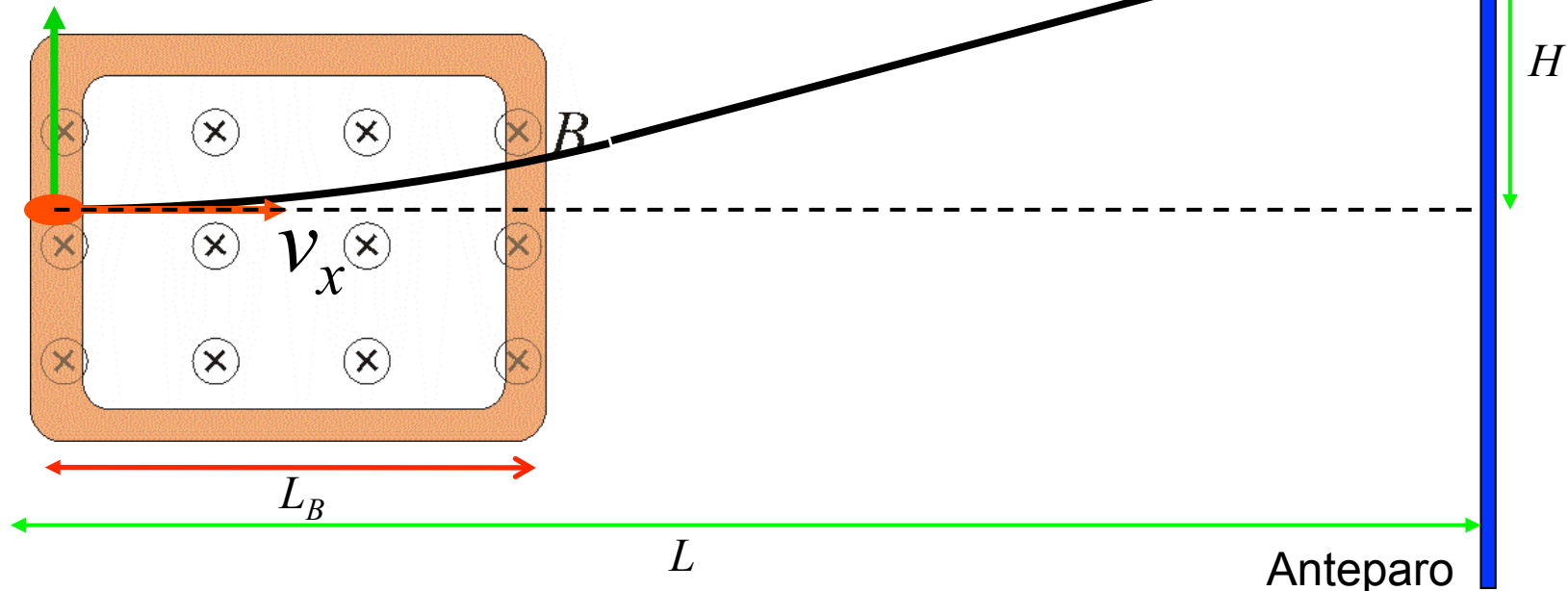


Movimento de uma partícula neste campo idealizado

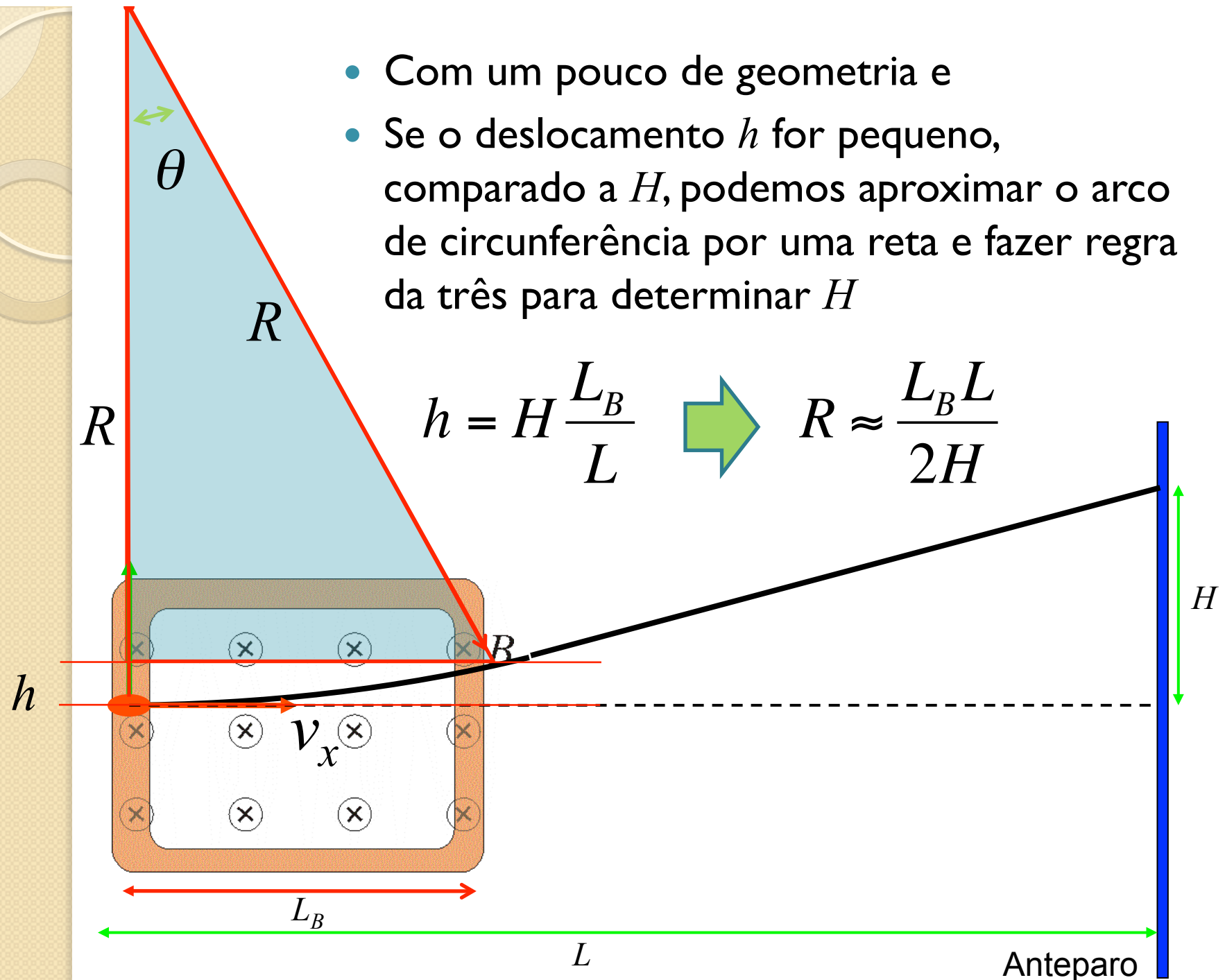
- Raio da trajetória pode ser facilmente calculado

$$R = \frac{mv_{0x}}{qB}$$

- Qual é o deslocamento H na tela do TRC?
- Temos que usar geometria



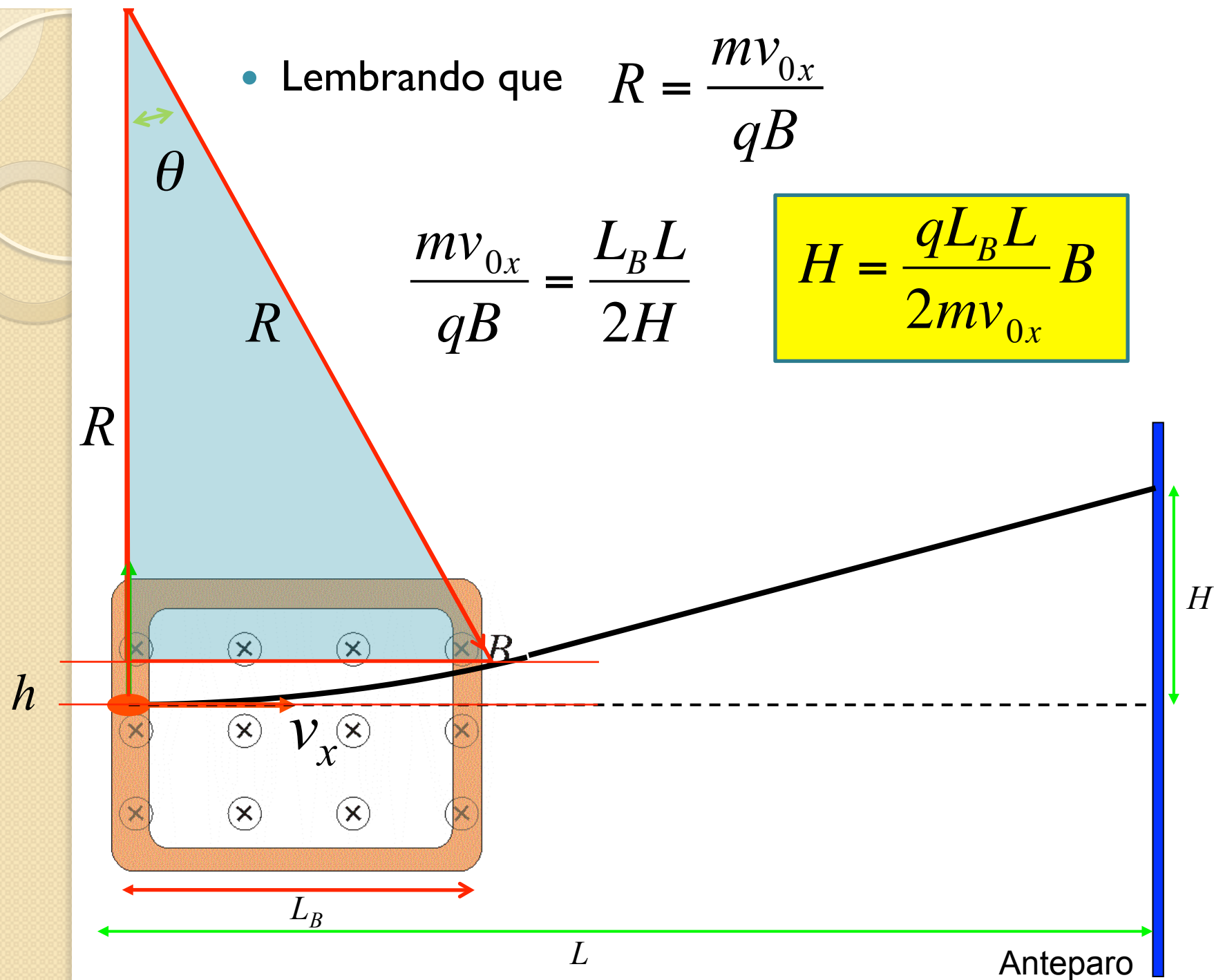
- Com um pouco de geometria e
- Se o deslocamento h for pequeno, comparado a H , podemos aproximar o arco de circunferência por uma reta e fazer regra da três para determinar H



- Lembrando que $R = \frac{mv_{0x}}{qB}$

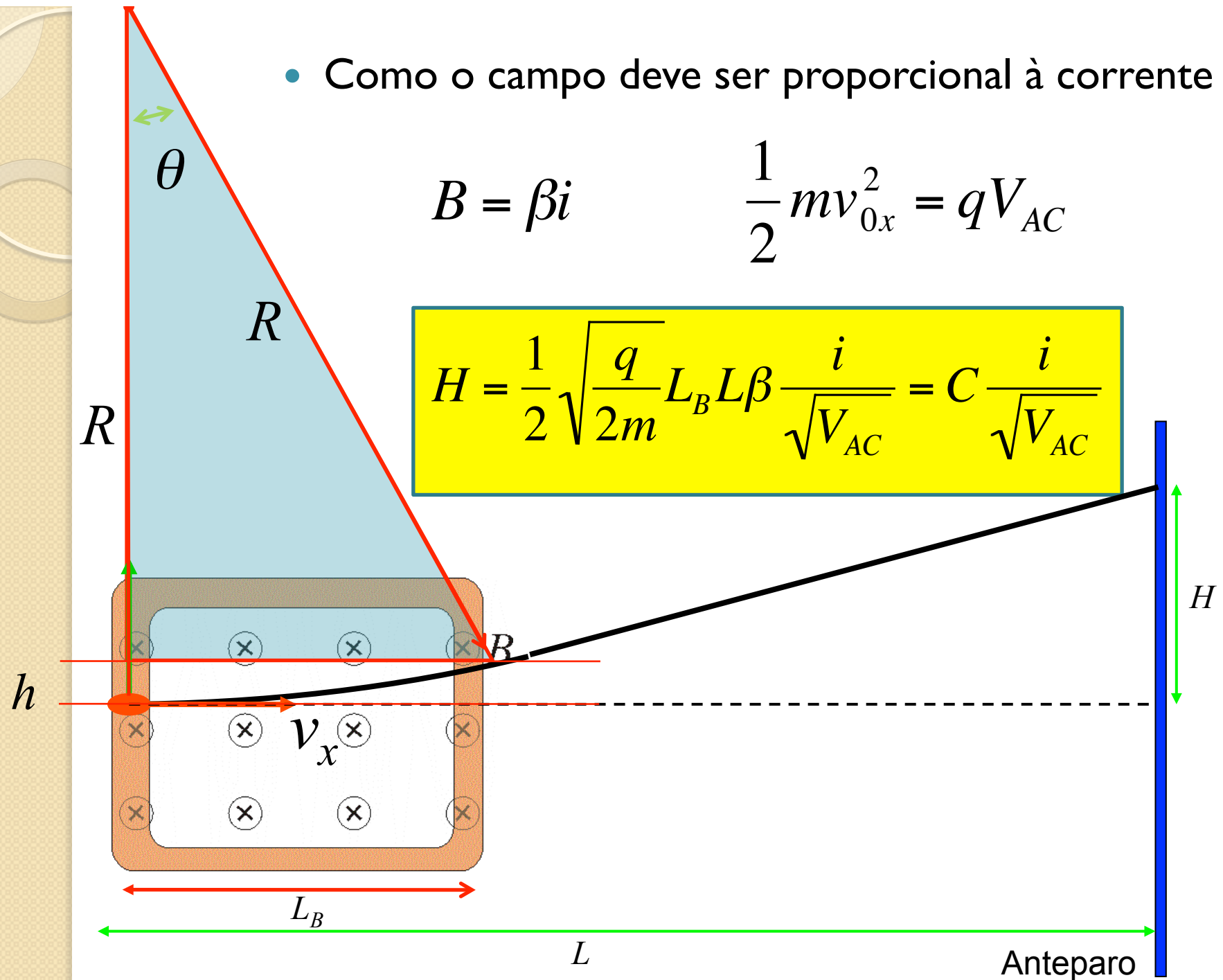
$$\frac{mv_{0x}}{qB} = \frac{L_B L}{2H}$$

$$H = \frac{qL_B L}{2mv_{0x}} B$$



- $$B = \beta i \qquad \frac{1}{2}mv_{0x}^2 = qV_{AC}$$

$$H = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{q}{2m}} L_B L \beta \frac{i}{\sqrt{V_{AC}}} = C \frac{i}{\sqrt{V_{AC}}}$$



Objetivos da semana

- Testar a aproximação teórica de campo constante, ou seja, testar que:

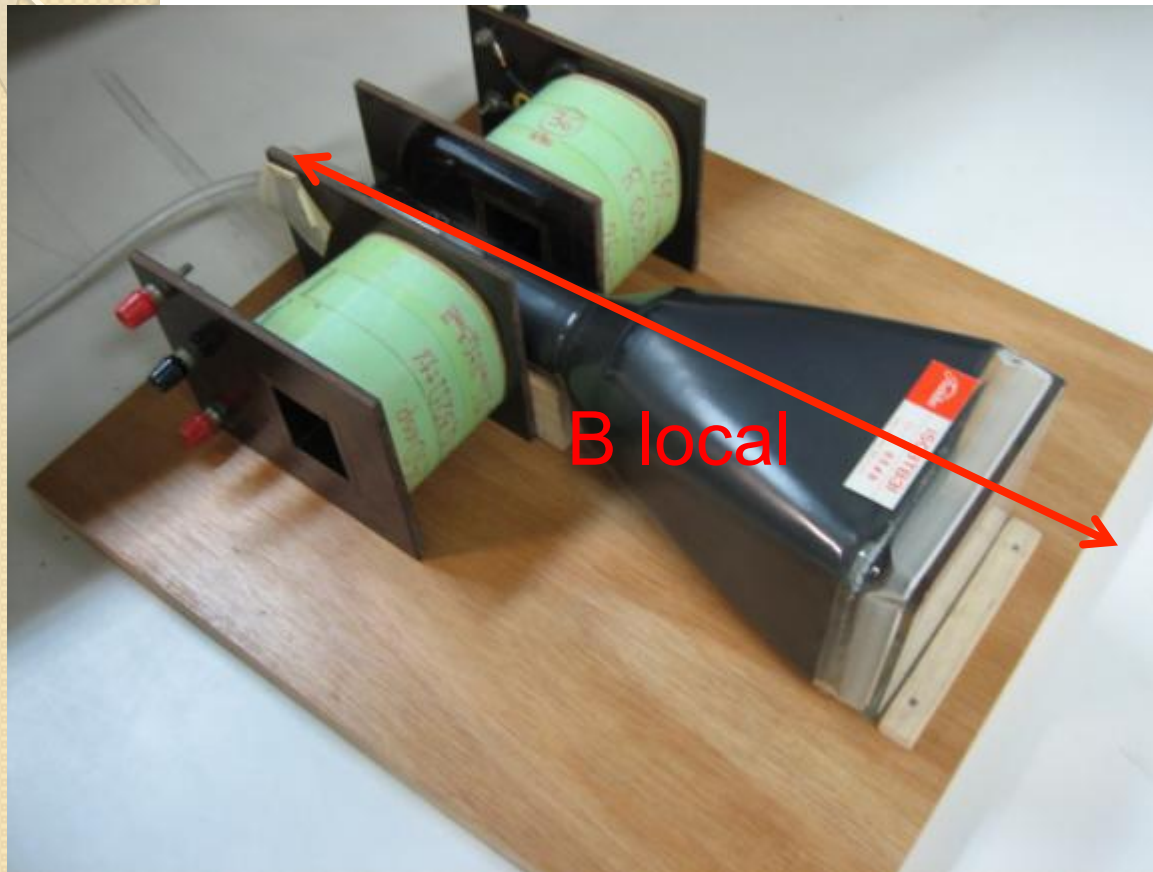
$$H = C \frac{i}{\sqrt{V_{AC}}}$$

- H depende linearmente da corrente
- H depende do inverso da raiz da tensão de aceleração
- **Dedução completa desta relação no final destas notas de aula para quem quiser se aprofundar**
- Obter a constante C e, a partir de simulações, determinar β e o comprimento efetivo da bobina (L_B).

Estudos a serem feitos

- Dependência de H em função da corrente com ajuste apropriado segundo modelo teórico
- Dependência de H em função da tensão de aceleração com ajuste e escala apropriada segundo o modelo teórico
- Obter a constante C
- Determinar o comprimento efetivo da bobina (L_B) através de simulações
 - Impulso da força magnética
- Determinar a constante β .

Cuidados experimentais



- Alinhar com B local
- Definir o zero quando a corrente nas bobinas e V entre as placas for nula
 - Lembre-se que H é a distância em relação ao ponto que NÃO há influência das bobinas.

Cuidados experimentais



- Alinhar as bobinas com as placas de deslocamento do TRC
 - Lembre-se que os campos elétrico e magnético atuam simultaneamente
- As bobinas não são quadradas!
 - Cuidado com a montagem!
- **Anote os números das bobinas utilizadas!**

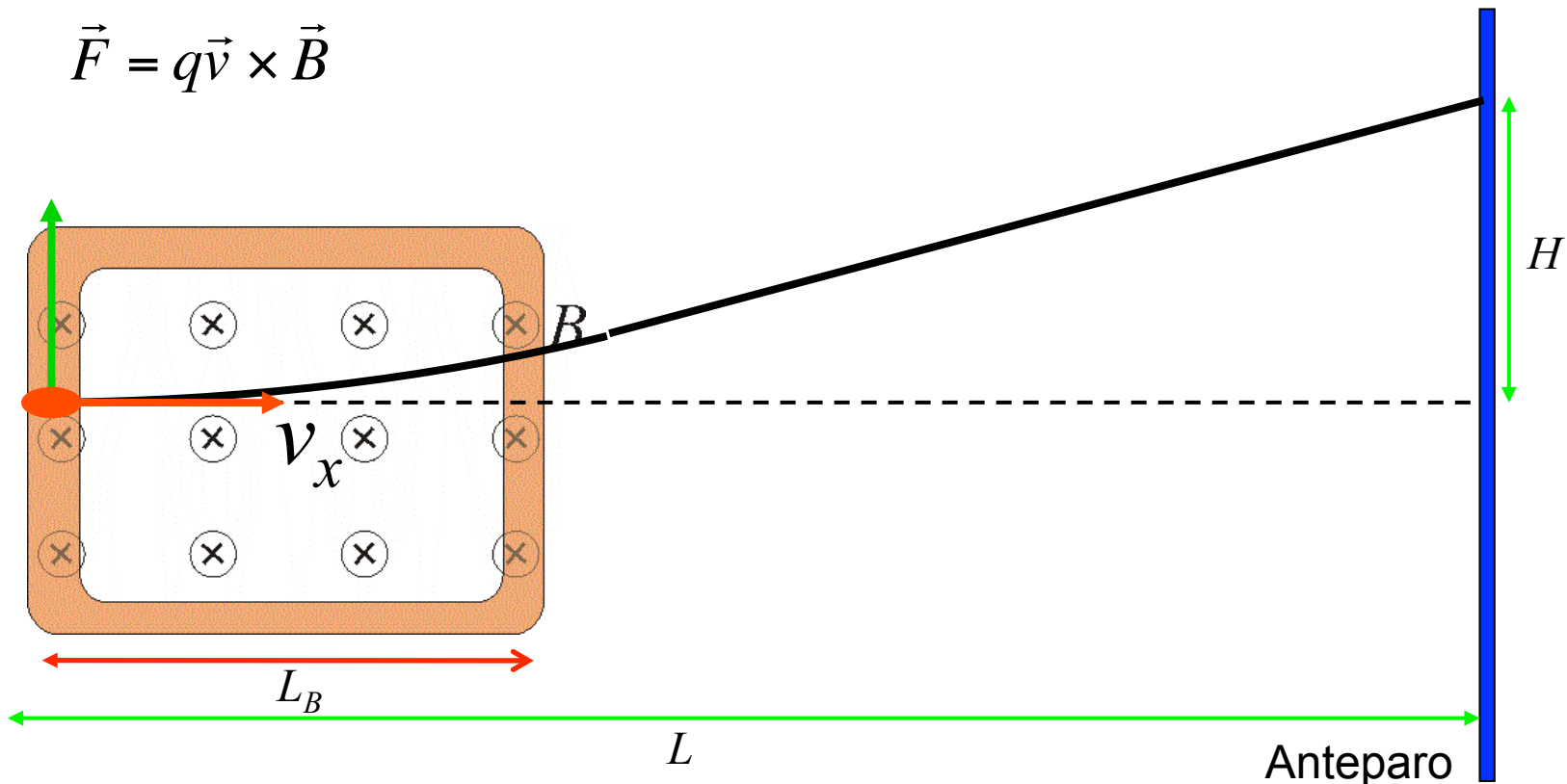


Dedução completa do modelo de campo magnético

Movimento de uma partícula neste campo idealizado

- Campo uniforme e constante entre as bobinas e nulo fora das bobinas

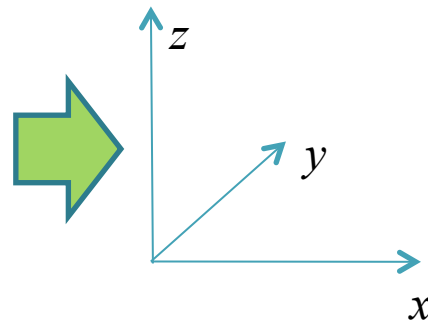
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$



Movimento de uma partícula neste campo idealizado

- Vamos resolver o movimento dentro da bobina

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$



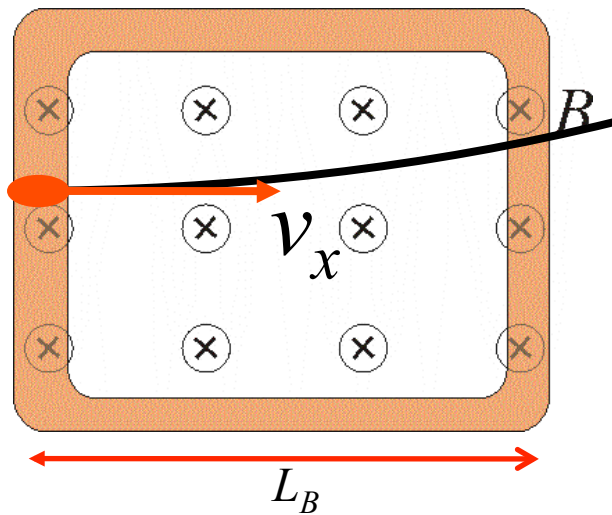
$$\vec{v}_0 = v_{0x} \hat{i}$$

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

$$\vec{B} = B \hat{j}$$



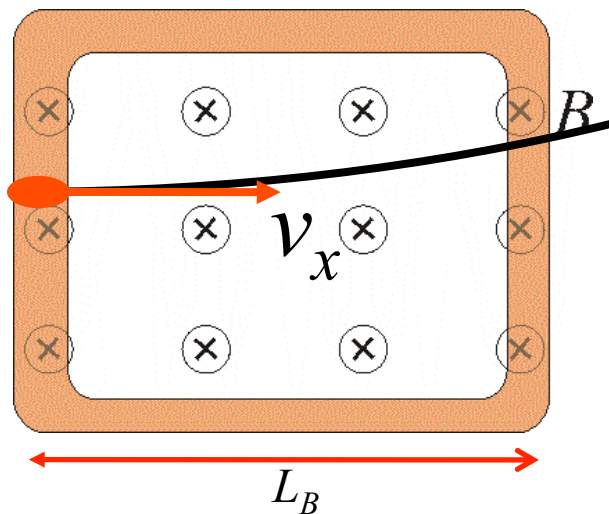
$$\vec{F} = q \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & B & 0 \end{vmatrix}$$



Movimento de uma partícula neste campo idealizado

- Vamos resolver o movimento dentro da bobina

$$\vec{F} = q \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & B & 0 \end{vmatrix} = qB(v_x \hat{k} - v_z \hat{i}) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} F_x &= -qBv_z \\ F_z &= qBv_x \end{aligned}$$



$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} v_x &= -\frac{qB}{m} v_z \\ \frac{d}{dt} v_z &= \frac{qB}{m} v_x \end{aligned} \right\} \omega = \frac{qB}{m} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} v_x &= -\omega v_z \\ \frac{d}{dt} v_z &= \omega v_x \end{aligned} \right.$$

Movimento de uma partícula neste campo idealizado

- Vamos resolver o movimento dentro da bobina

$$\frac{d}{dt}v_x = -\omega v_z$$

$$\frac{d}{dt}v_z = \omega v_x$$

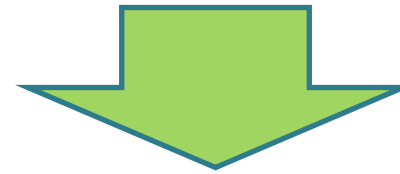


$$\frac{d^2}{dt^2}v_x = -\omega \frac{d}{dt}v_z$$

$$\frac{d}{dt}v_z = \omega v_x$$



$$\frac{d^2}{dt^2}v_x = -\omega^2 v_x$$

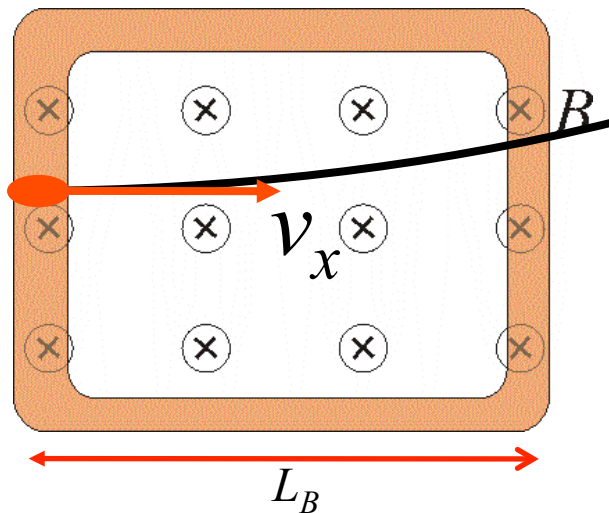


$$v_x = v_{0x} \cos(\omega t)$$

$$v_z = -\frac{1}{\omega} \frac{d}{dt}v_x$$



$$v_z = v_{0x} \sin(\omega t)$$



Movimento de uma partícula neste campo idealizado

- Vamos resolver o movimento dentro da bobina

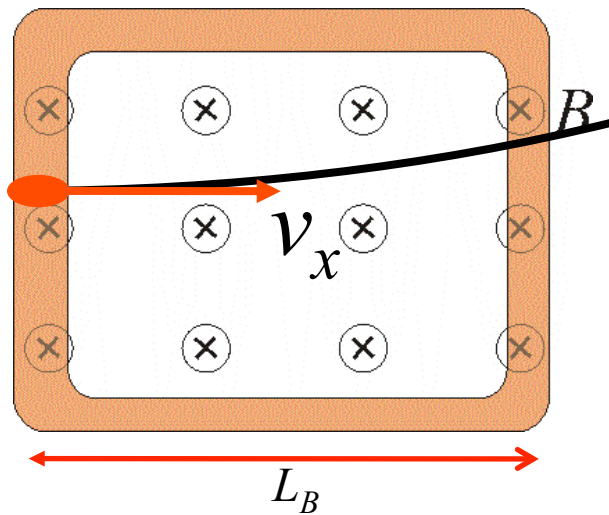
$$v_x = v_{0x} \cos(\omega t)$$

$$v_z = v_{0x} \sin(\omega t)$$



$$x = \frac{v_{0x}}{\omega} \sin(\omega t)$$

$$z = -\frac{v_{0x}}{\omega} \cos(\omega t)$$



Qual é a trajetória descrita por estas equações?

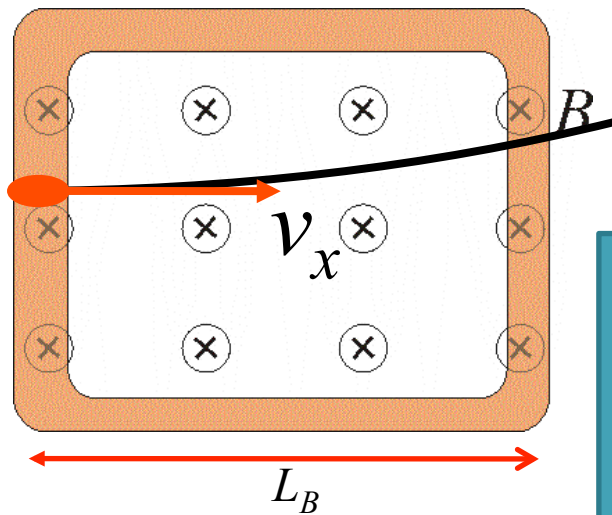
Vamos calcular, como se não soubesse a resposta, a grandeza $z^2 + x^2$

Movimento de uma partícula neste campo idealizado

- Vamos resolver o movimento dentro da bobina

$$x^2 + z^2 = \left(\frac{v_{0x}}{\omega} \right)^2$$

Equação de uma
circunferência de
raio v_{0x}/ω



$$R = \frac{v_{0x}}{\omega} = \frac{mv_{0x}}{qB}$$

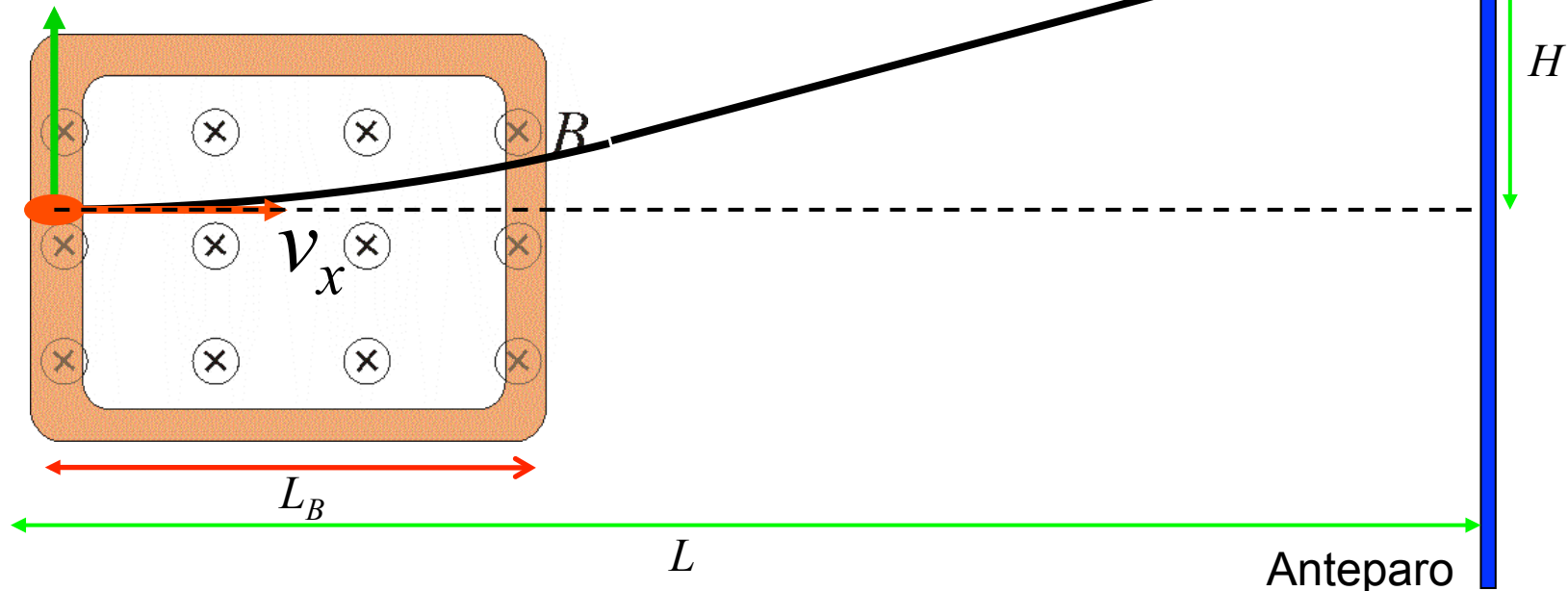
O resultado é bastante intuitivo!
Sendo a força magnética
perpendicular à velocidade ela é
centrípeta e a trajetória é “circular”

Movimento de uma partícula neste campo idealizado

- Trajetória circular na região do campo magnético

$$R = \frac{mv_{0x}}{qB}$$

- Qual é o deslocamento H na tela do TRC?
- Temos que usar geometria

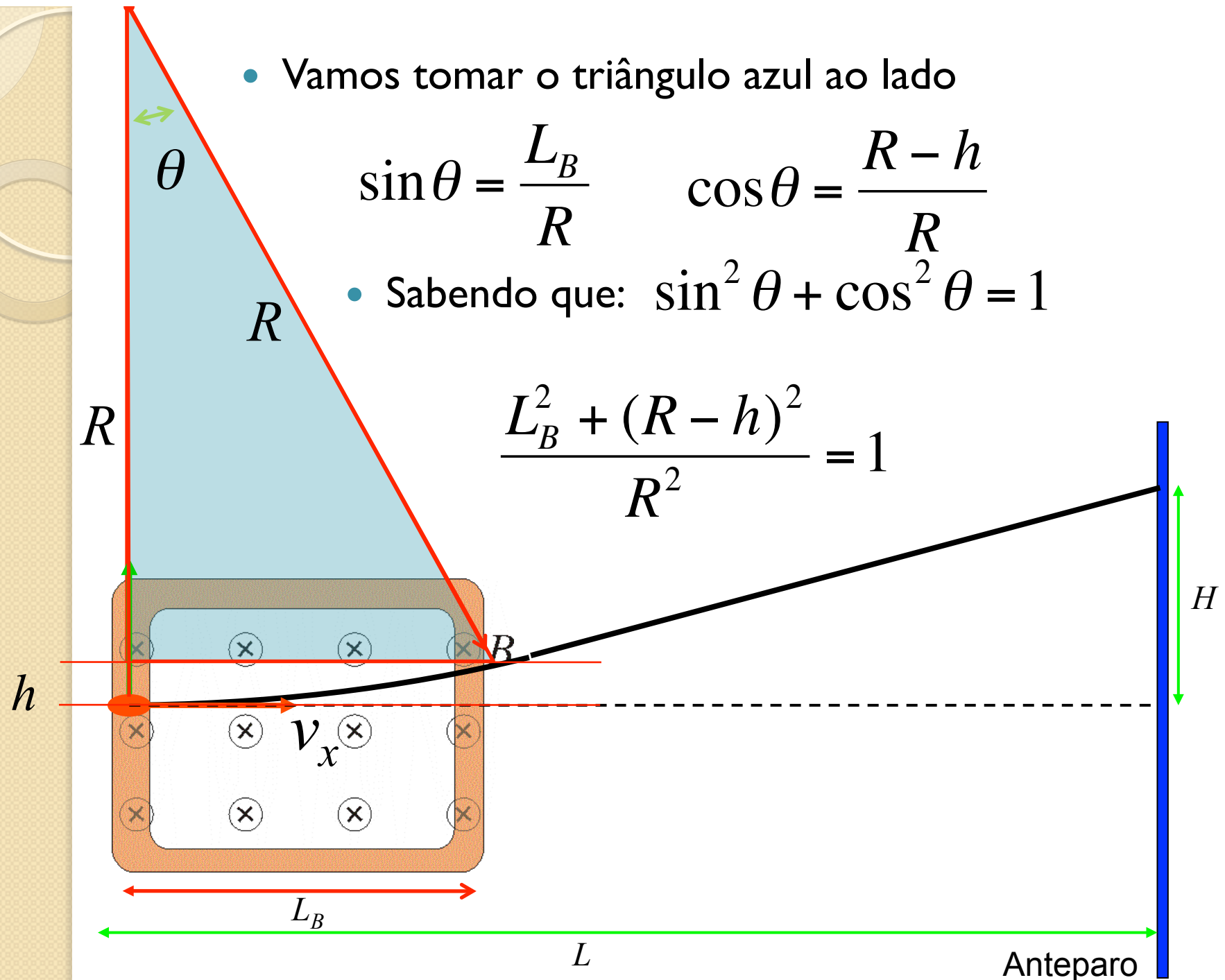


- Vamos tomar o triângulo azul ao lado

$$\sin \theta = \frac{L_B}{R} \quad \cos \theta = \frac{R-h}{R}$$

- Sabendo que: $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$$\frac{L_B^2 + (R-h)^2}{R^2} = 1$$



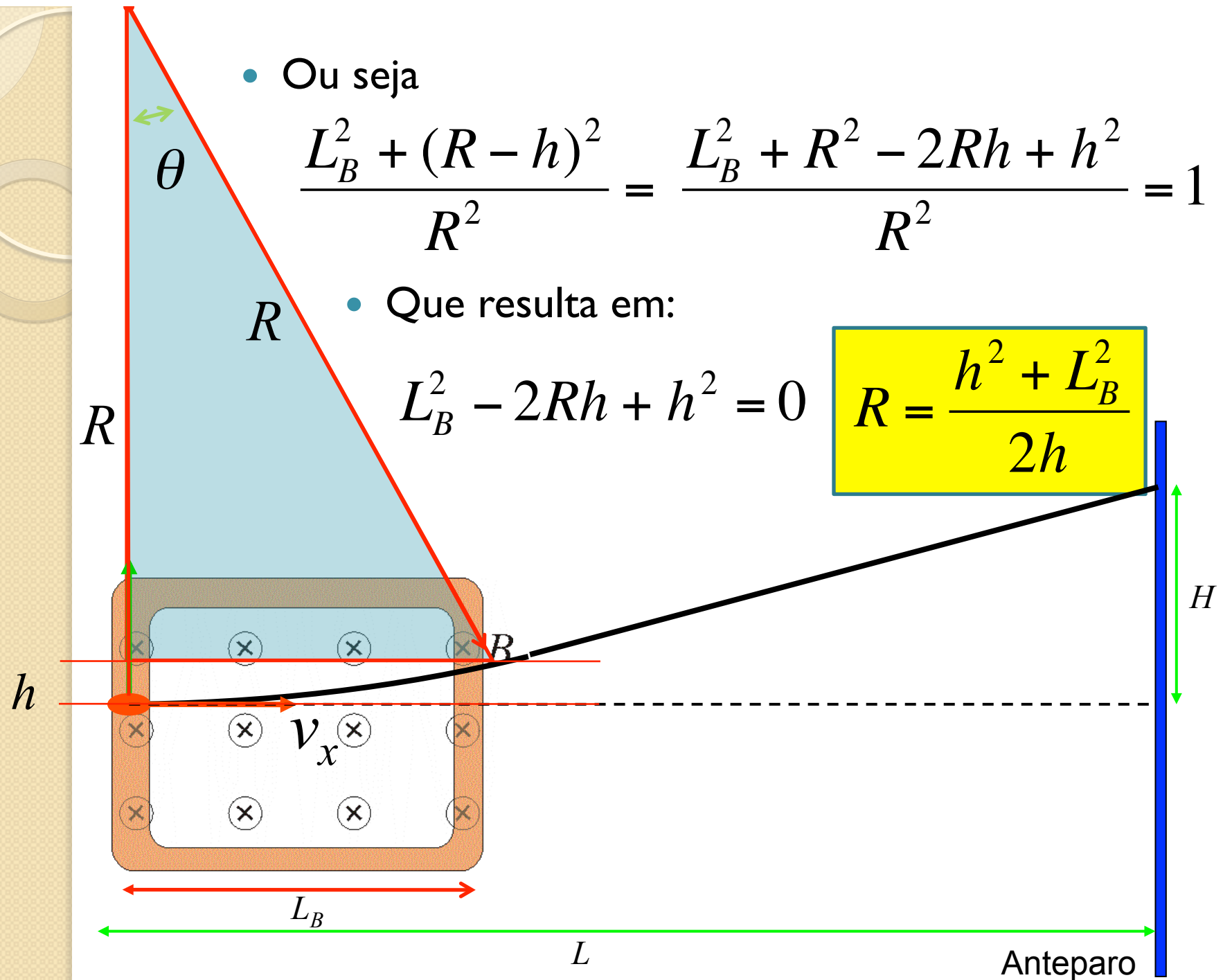
- Ou seja

$$\frac{L_B^2 + (R - h)^2}{R^2} = \frac{L_B^2 + R^2 - 2Rh + h^2}{R^2} = 1$$

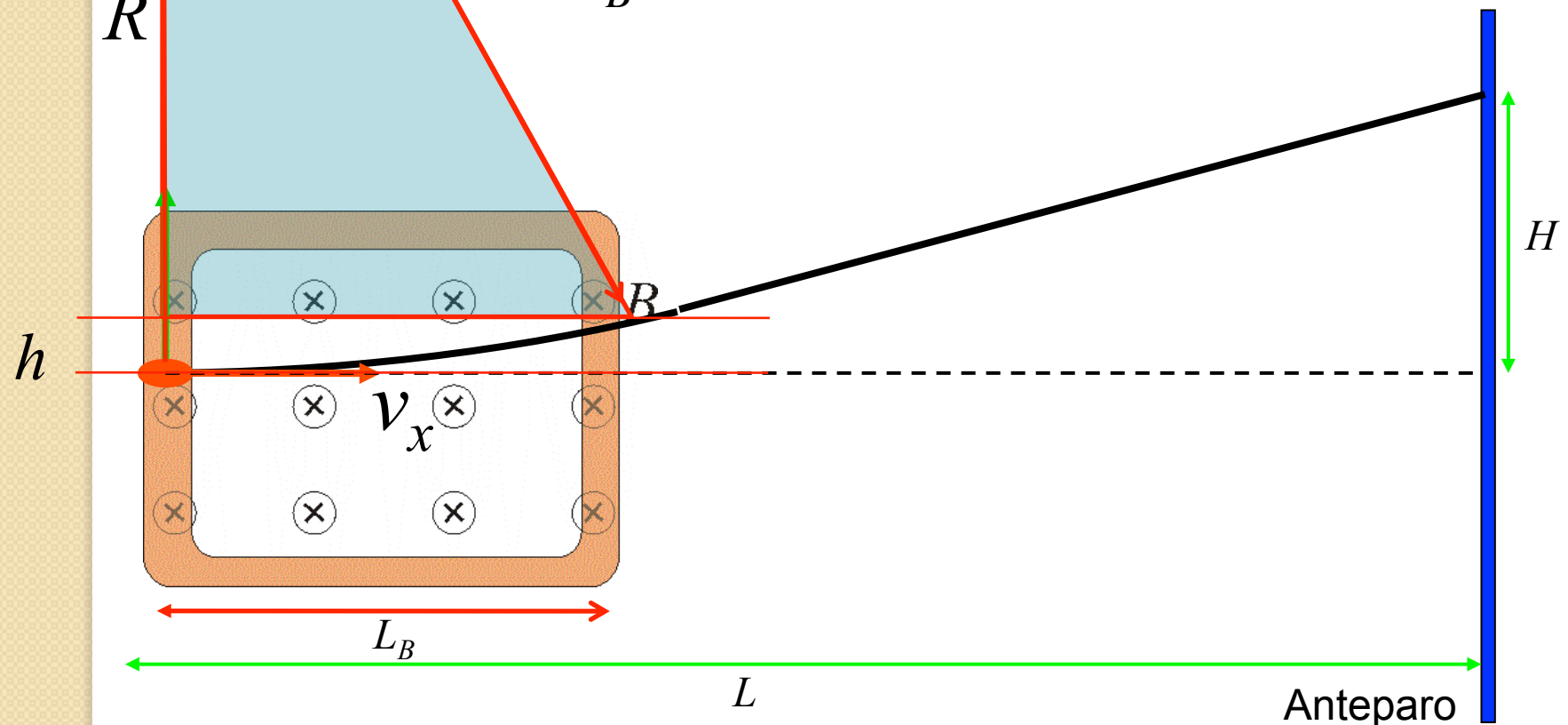
- Que resulta em:

$$L_B^2 - 2Rh + h^2 = 0$$

$$R = \frac{h^2 + L_B^2}{2h}$$



- $$R \quad \frac{h}{L_B} = \frac{H}{L} \quad h = H \frac{L_B}{L}$$

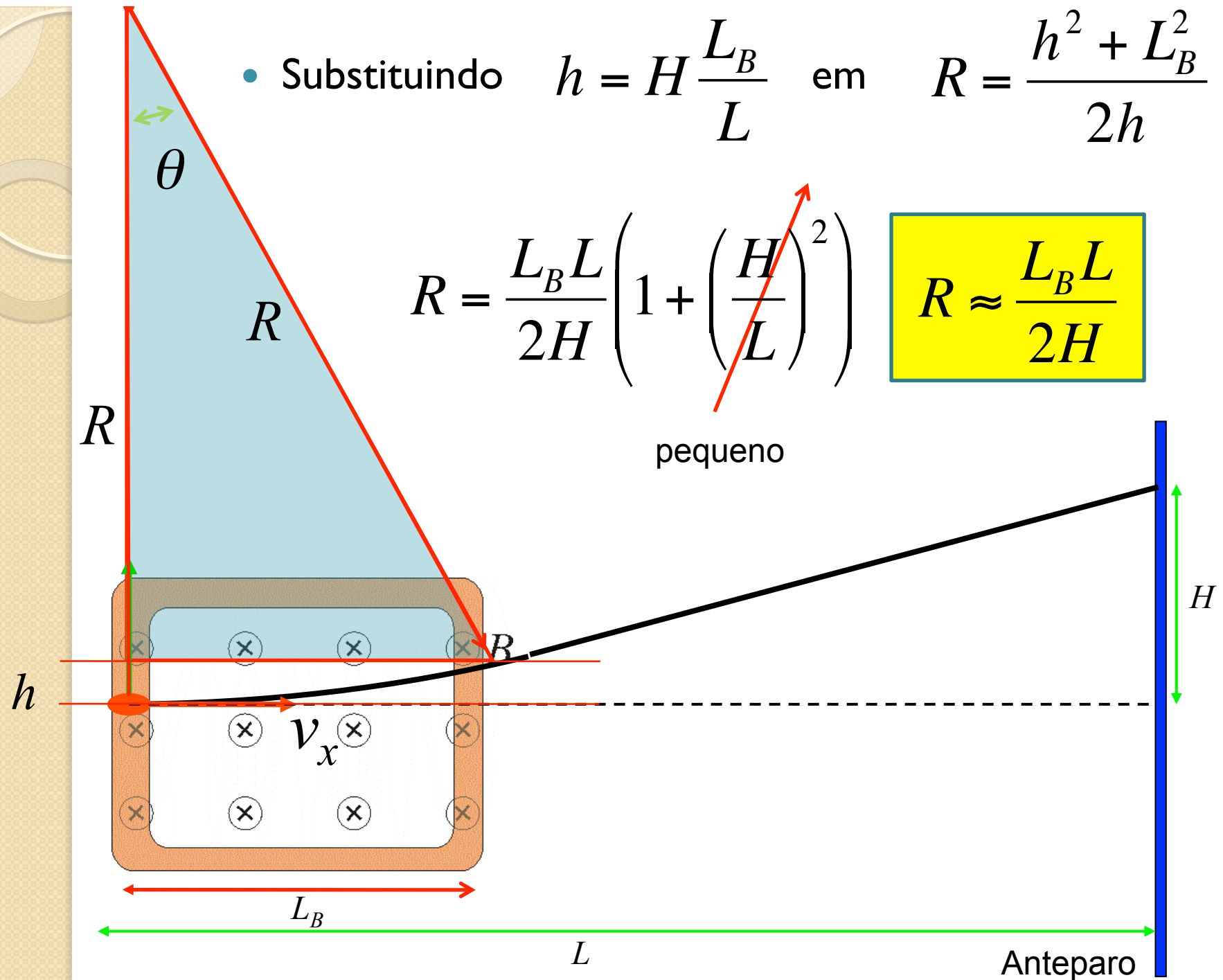


- Substituindo $h = H \frac{L_B}{L}$ em $R = \frac{h^2 + L_B^2}{2h}$

$$R = \frac{L_B L}{2H} \left(1 + \left(\frac{H}{L} \right)^2 \right)$$

pequeno

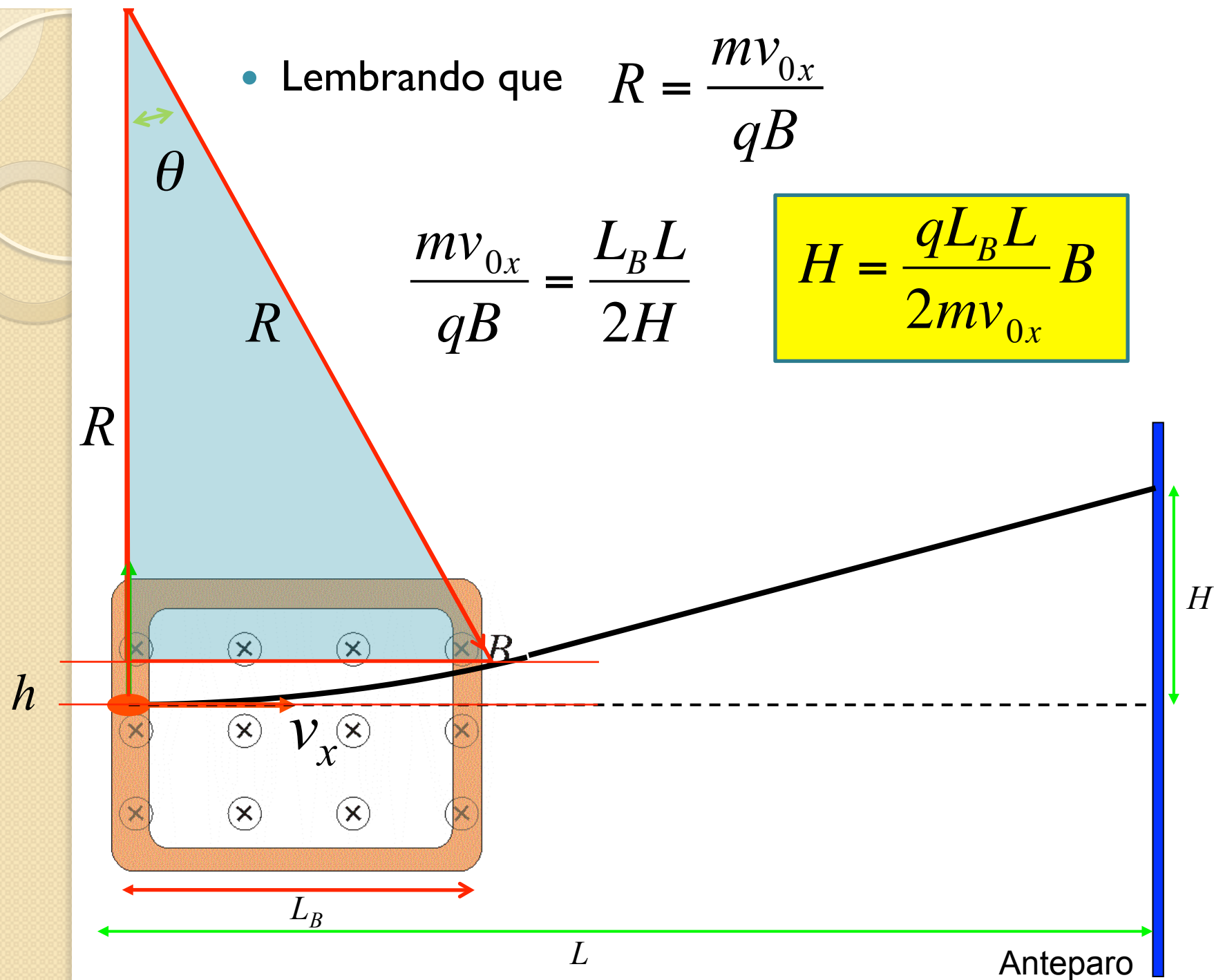
$$R \approx \frac{L_B L}{2H}$$



- Lembrando que $R = \frac{mv_{0x}}{qB}$

$$\frac{mv_{0x}}{qB} = \frac{L_B L}{2H}$$

$$H = \frac{qL_B L}{2mv_{0x}} B$$



- Mas nós vimos, dos dados, que $B = \beta i$

- E que: $\frac{1}{2} m v_{0x}^2 = q V_{AC}$

$$H = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{q}{2m}} L_B L \beta \frac{i}{\sqrt{V_{AC}}} = C \frac{i}{\sqrt{V_{AC}}}$$

