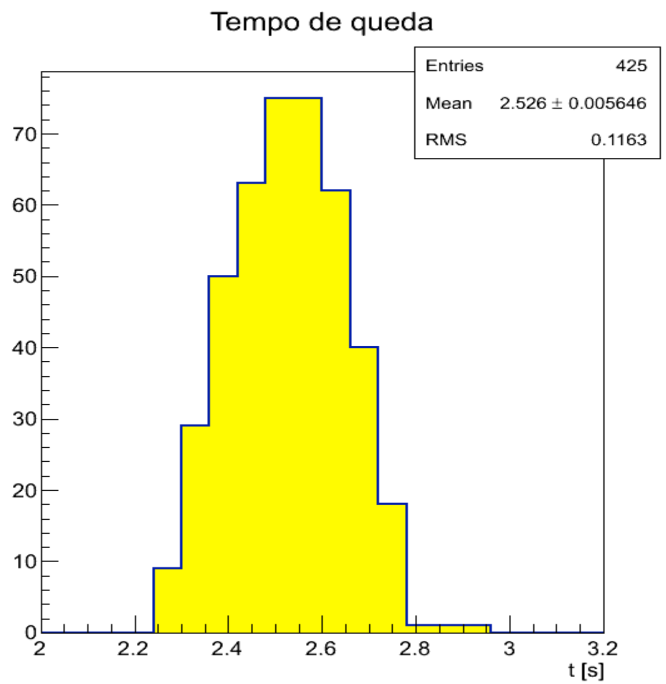
Física Experimental III

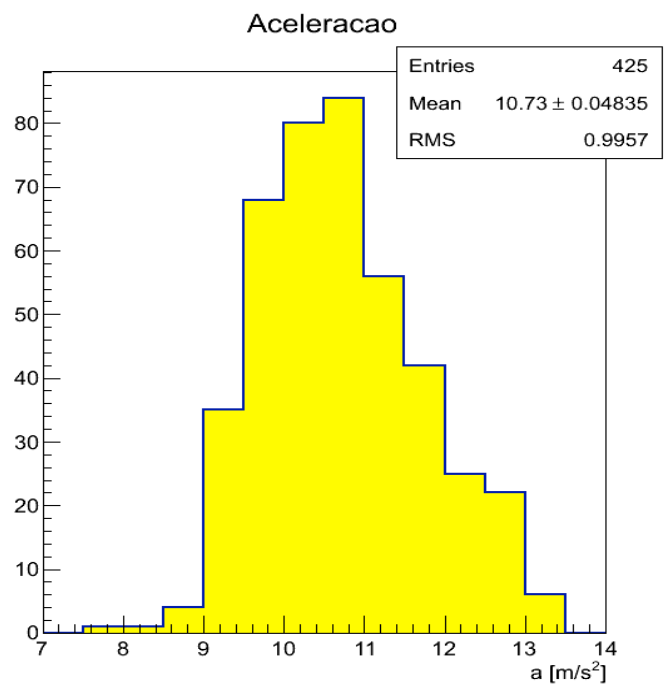
http://disciplinas.stoa.usp.br/course/view.php?id=3894&section=2

Aula 3

Propagação de incertezas

- Repetição de um experimento





Mede-se a grandeza várias vezes. Neste caso, o tempo de queda.

$$a = 2\frac{h}{t^2}$$

Calcula-se a grandeza derivada para cada medida e estuda-se sua distribuição

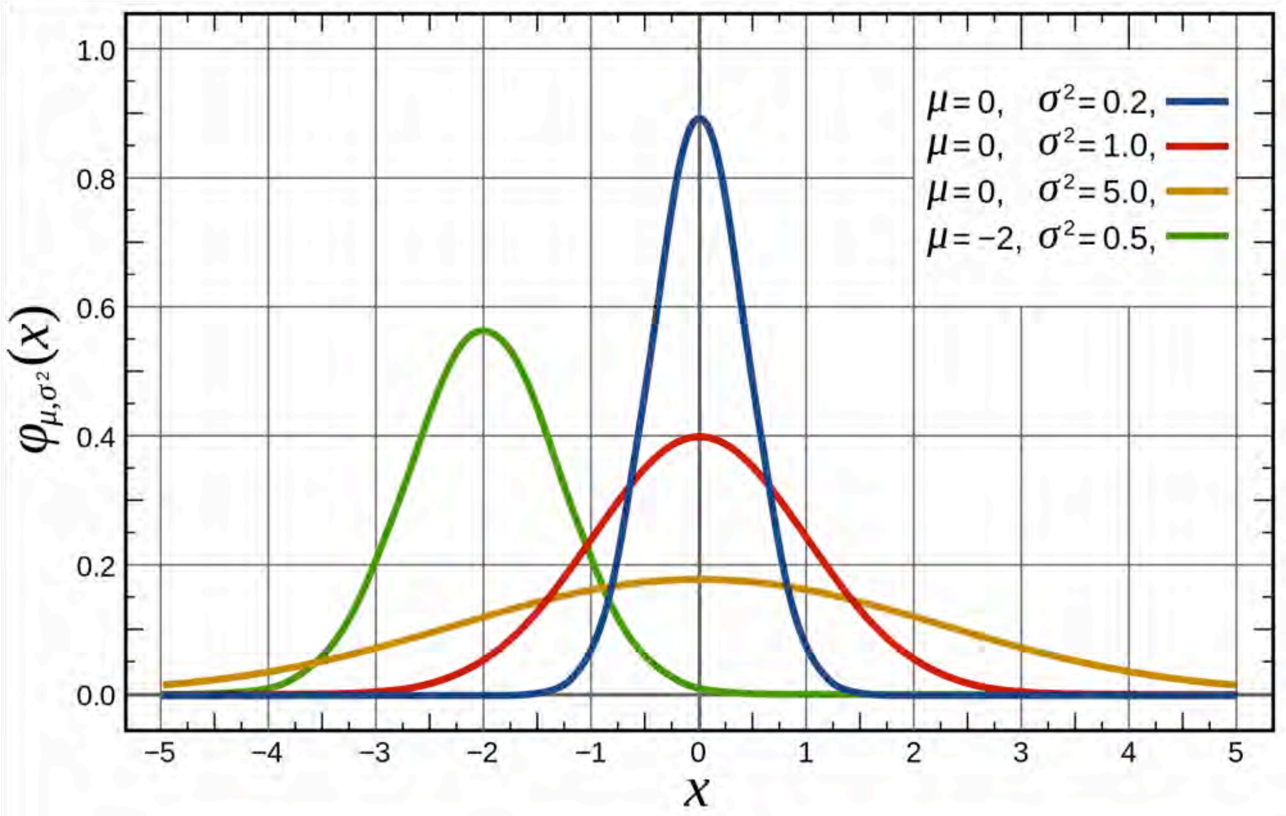
E se ..

- …não pudermos repetir este experimento de modo a calcular desvios padrão?

- … a grandeza derivada depender de muitas outras grandezas diferentes?

A gaussiana

$$G_{\mu,\sigma}(x) = G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$



Uma propriedade importante

- Cálculo de valores médios

$$\langle (x-\mu)^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^n G(x) dx$$

- fazendo uma mudança de variável

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma} \rightarrow \langle (x-\mu)^n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma^n \int_{-\infty}^{+\infty} y^n \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] dy$$

Uma propriedade importante

- Definindo

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} y^n \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] dy$$

- Consultando uma tabela de integrais

$$I_0 = \sqrt{2\pi}$$

$$I_n = 0 \text{ se } n \text{ for ímpar}$$

$$\frac{I_n}{I_{n-2}} = (n-1) \text{ para } n \text{ par e } n > 1$$

Uma propriedade importante

- Fazendo um pouquinho de contas chegamos que

$$\langle (x-\mu)^n \rangle = \frac{I_n}{I_0}\sigma^n$$

- Exemplo:

$$\langle (x-\mu)^4 \rangle = \frac{I_4}{I_0}\sigma^4 = \frac{I_4}{I_2}\frac{I_2}{I_0}\sigma^4 = (4-1)(2-1)\sigma^4 = 3\sigma^4$$

$$\langle (x-\mu)^2 \rangle = \frac{I_2}{I_0}\sigma^2 = (2-1)\sigma^2 = \sigma^2$$

Propagação de incertezas

- Considere um exemplo simples onde se quer calcular

$$z = x + y$$
$$\sigma_z^2 = \langle (z - \mu_z)^2 \rangle$$

- Substituindo a fórmula no cálculo da variância:

$$\sigma_z^2 = \langle (x + y - (\mu_x + \mu_y))^2 \rangle$$
$$\sigma_z^2 = \langle (((x - \mu_x) + (y - \mu_y))^2 \rangle$$
$$\sigma_z^2 = \langle (((x - \mu_x)^2 \rangle + \langle ((y - \mu_y))^2 \rangle + 2\langle (x - \mu_x)(y - \mu_y)) \rangle$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2cov_{xy} \qquad cov_{xy} = \langle (x - \mu_x)(y - \mu_y)) \rangle$$

Fórmula geral

Seja uma grandeza calculada através de uma função qualquer

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(\tilde{x})$$

$$\sigma_y^2 = \langle (f(\tilde{x}) - f(\mu_x))^2 \rangle$$

Fazendo uma expansão em série de taylor da função em primeira ordem:

$$f(\tilde{x}) = f(\mu_x) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i - \mu_i)$$

$$\sigma_y^2 = \langle (f(\mu_x) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i - \mu_i) - f(\mu_x))^2 \rangle$$

$$\sigma_y^2 = \langle (\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i - \mu_i))^2 \rangle$$

Fórmula geral

- Pegando esta equação e abrindo explicitamente o quadrado, podemos reagrupar os termos de tal forma que:

$$\sigma_y^2 = \langle(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i - \mu_i))^2\rangle$$

$$\sigma_y^2 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \langle(x_i - \mu_i)^2\rangle + \sum_i \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\langle(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)\rangle$$

$$\sigma_y^2 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_i^2 + \sum_i \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} cov_{ij}$$

Fórmula geral

- Esta fórmula geral de propagação de incertezas pode ser escrita em uma forma matricial do tipo

$$\sigma_y^2 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_i^2 + \sum_i \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} cov_{ij}$$

$$\boxed{\sigma_y^2 = \mathbf{T}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Sigma} \mathbf{T}}$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \ldots \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix} \text{ com } \partial_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & cov_{12} & \cdots & cov_{1n} \\ cov_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & cov_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov_{n1} & cov_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{\Sigma}$ é chamada de matriz de covariância

Exemplo:

- alguém mediu tempo de queda de um balão de uma altura h =34,0 ± 0,5 m e obteve t = 2,65 ± 0,20 s. Qual a aceleração?

$$a = 2\frac{h}{t^2}$$

$$\sigma_a^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)^2 \sigma_h^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 \sigma_t^2$$

$$\sigma_a^2 = \left(\frac{2}{t^2}\right)^2 \sigma_h^2 + \left(4\frac{h}{t^3}\right)^2 \sigma_t^2$$

$$a = 9,7 \pm 1,5 \ \mathrm{m/s}^2$$

E a covariância?

- A covariância é dada por

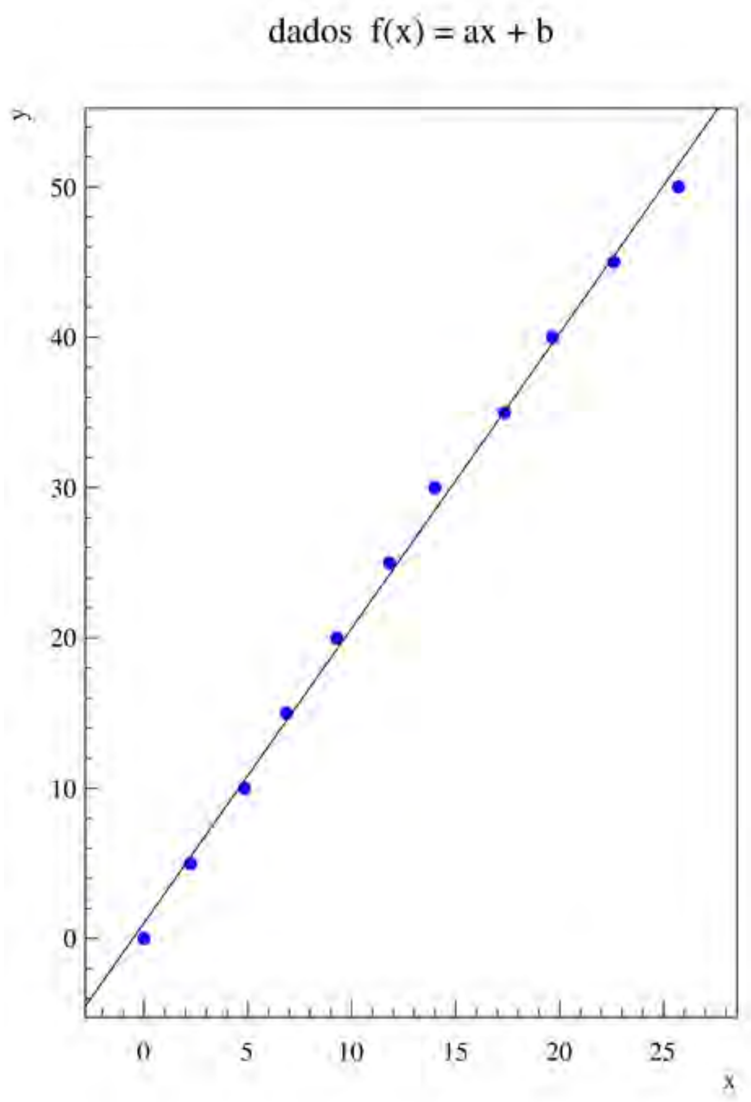
$$cov_{xy} = \langle (x - \mu_x)(y - \mu_y) \rangle$$

- Se as variáveis x e y são totalmente independentes, elas podem flutuar de maneira independente e a média tende a se anular, de modo que:

$$cov_{xy} = 0$$

Quando grandezas são dependentes entre si?

- O situação mais comum é no ajuste de uma curva.
  - Os parâmetros ajustados possuem, em geral, covariância, pois estão vinculados entre si através dos pontos experimentais.
  - Se eu forçar o coeficiente linear para um valor maior eu devo diminuir o coeficiente angular para continuar passando pelos pontos experimentais.



Um exemplo: a curva característica da pilha

- Matriz de covariância do ajuste

$$y = [0] + [1] * x = a + bx$$

Resultados do ajuste

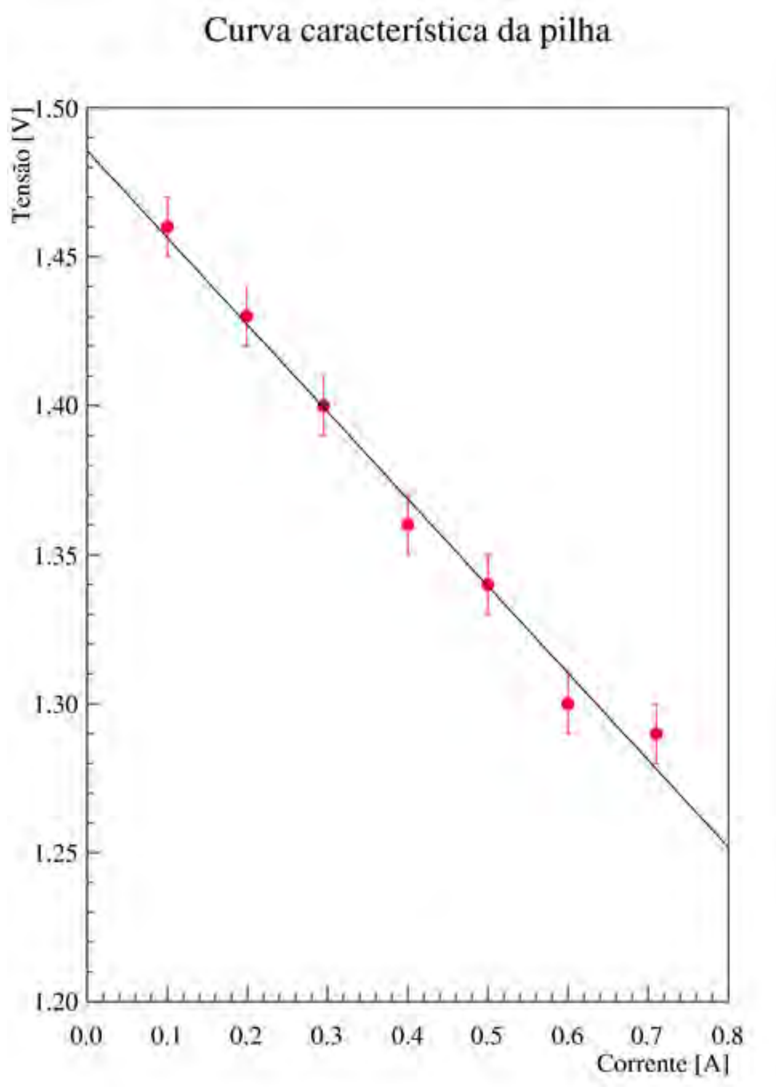
Número de parâmetros	2
Chi²	3.42626
Número de graus de liberdade	5

parâmetro	Valor	Incerteza
0	1.4856	0.00837212
1	-0.292165	0.0186493

Matriz de covariância

$$\begin{bmatrix} 7.00924E\text{-}05 & -0.000139318 \\ -0.000139318 & 0.000347797 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & cov_{12} & \cdots & cov_{1n} \\ cov_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & cov_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov_{n1} & cov_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

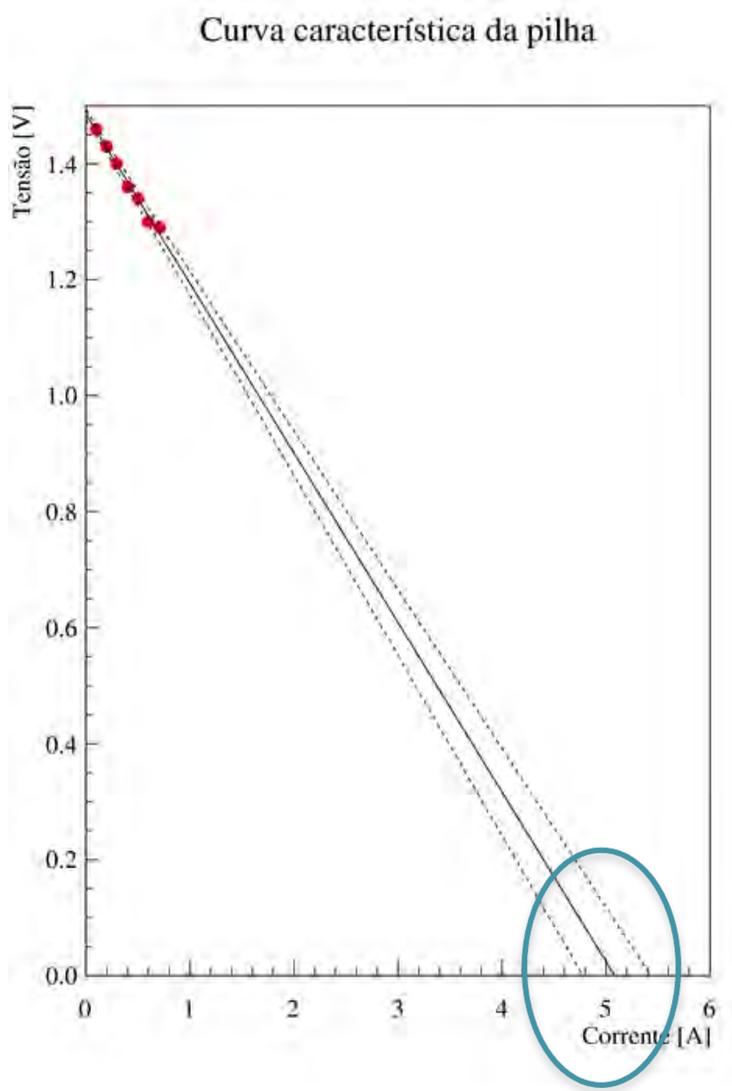


Um exemplo: a curva característica da pilha

- Qual a corrente máxima?
  - Extrapola para tensão = 0

$$i_{max} = -\frac{a}{b} = -\frac{[0]}{[1]}$$

  - Qual a incerteza na corrente máxima?



Um exemplo: a curva característica da pilha

- Qual a incerteza na corrente máxima?

$$i_{max} = -\frac{a}{b}$$

$$\sigma^2_{i_{max}} = \left(\frac{\partial i_{max}}{\partial a}\right)^2 \sigma^2_a + \left(\frac{\partial i_{max}}{\partial b}\right)^2 \sigma^2_b + 2\frac{\partial i_{max}}{\partial a}\frac{\partial i_{max}}{\partial b} cov_{a,b}$$

- Calculando as derivadas, temos:

$$\sigma^2_{i_{max}} = \frac{1}{b^2}\sigma^2_a + \frac{a^2}{b^4}\sigma^2_b - 2\frac{a}{b^3} cov_{a,b}$$

- E é só substituir os valores

Faz diferença utilizar a covariância?

- Depende da situação

- Vamos estudar a covariância em detalhes em Física Experimental IV
  - Por enquanto, vamos nos acostumar com a existência dela e utilizar quando necessário.
  - Sempre que formos utilizar parâmetros de um ajuste para fazer contas, fiquem atentos à covariância.

Cuidados importantes

- Todas as grandezas envolvidas possuem distribuições gaussianas
  - E se não possuírem?
    - Veremos como lidar com isto em breve

- Fizemos uma expansão em Taylor de primeira ordem.
  - Esta expansão é razoável sempre?
  - E se não for? O que devo fazer?
    - Respostas em um futuro próximo ☺

Experimento I – Circuitos de C.C.

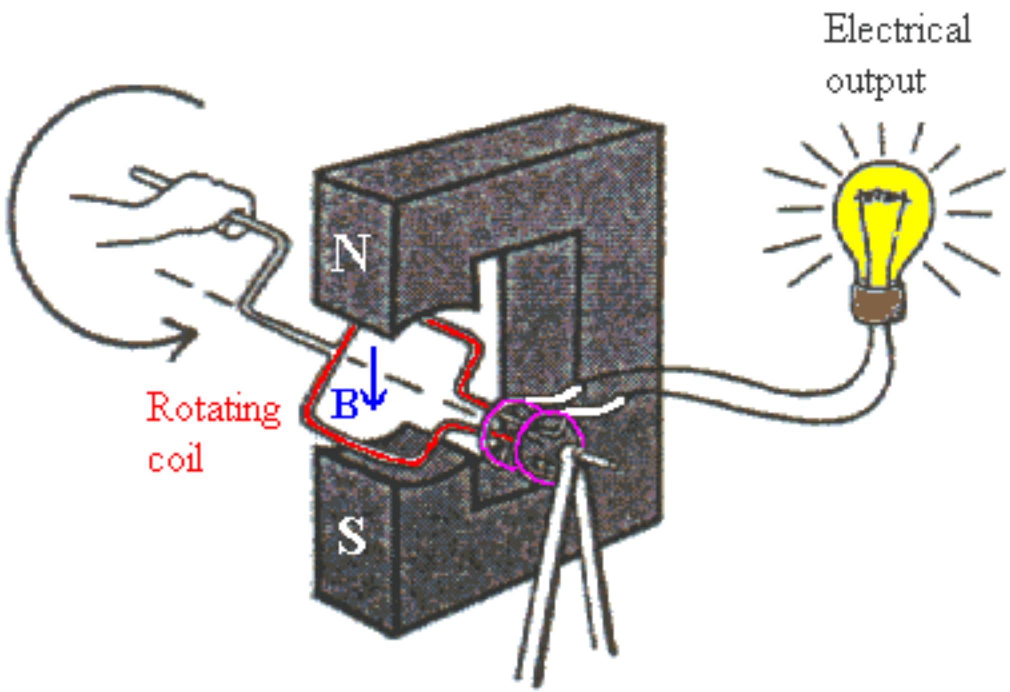
- Projetar e montar um circuito elétrico de iluminação de uma casa

O que precisamos fazer …

- … para atingir os nossos objetivos
  - Estudar o LED e suas propriedades elétricas
  - Como uma bateria fornece energia para um circuito
    - Curva característica, potência, correntes, etc.
  - Como converter energia solar em elétrica
  - Como armazenar esta energia
  - Projetar e montar a casa

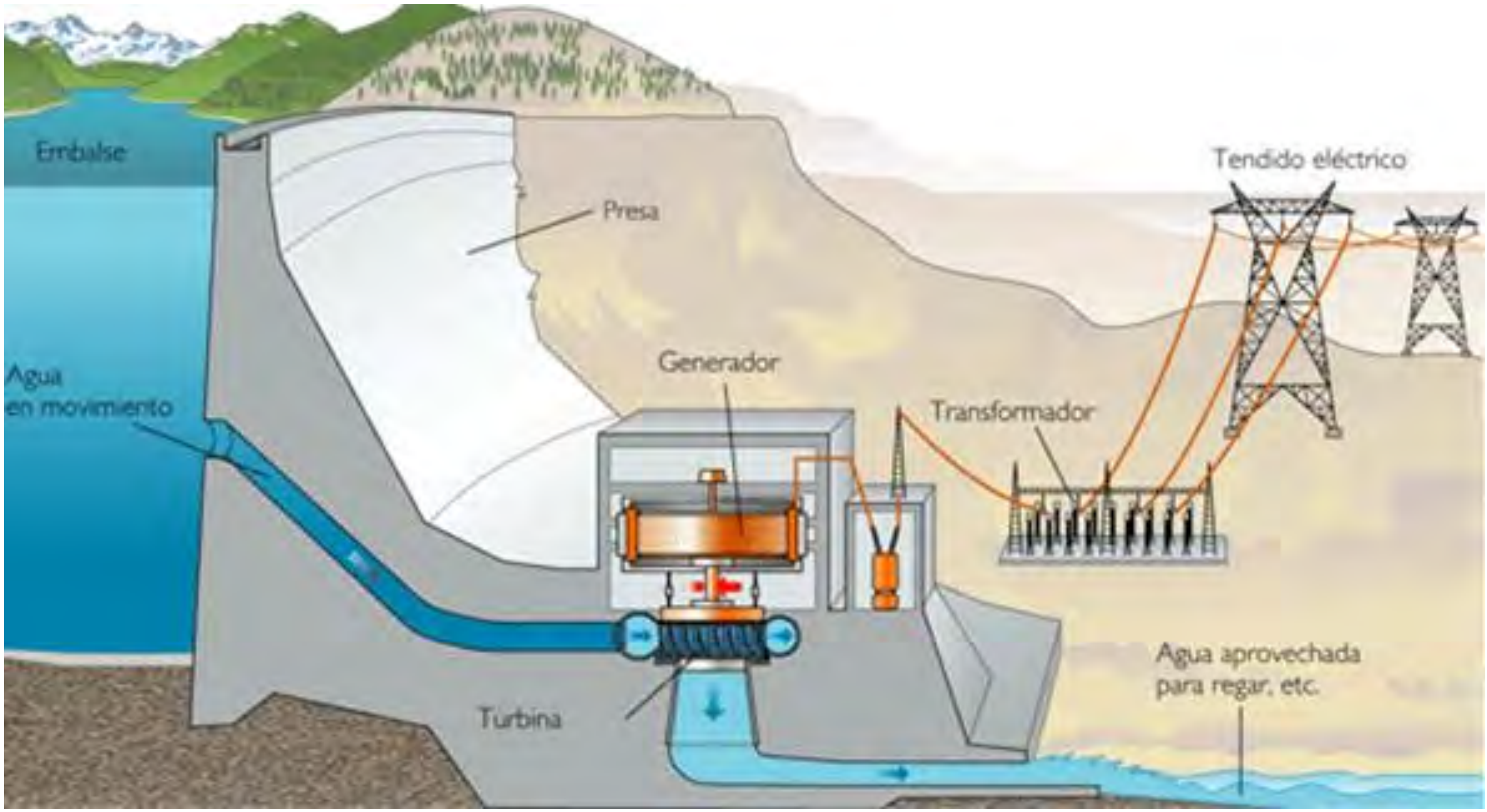
Na vida real

- Energia é normalmente gerada utilizando a Lei de Indução de Faraday
  - Terceiro experimento desta disciplina



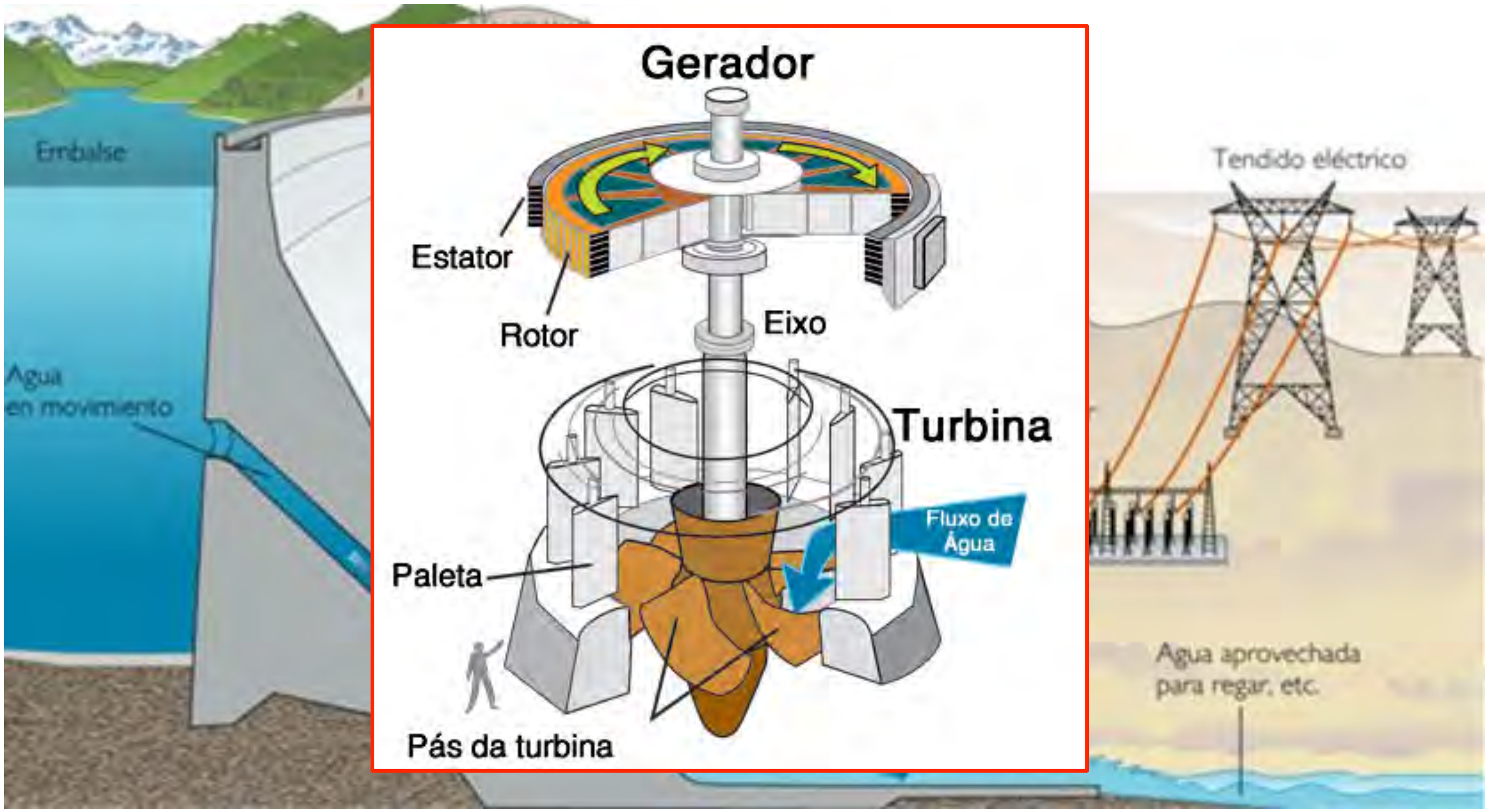
Na vida real

- Muito útil pois podemos utiliar vários mecanismos para girar uma bobina em campo magnético



Na vida real

- Muito útil pois podemos utiliar vários mecanismos para girar uma bobina em campo magnético

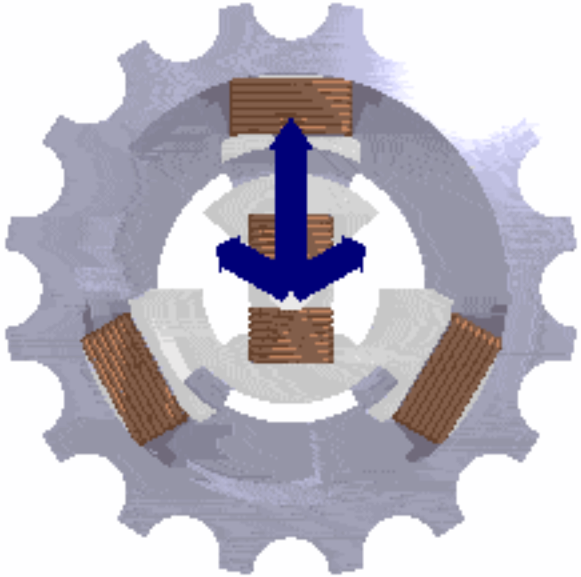


Na vida real

- A corrente gerada no processo é alternada
  - Varia no tempo de forma harmônica
  - Tensão na rede elétrica do Brasil tem uma frequência de 60 Hz
  - Transmitida em várias fases
    - Mais comum é o sistema trifásico
    - O que isto significa?

fases

- Imagine uma geometria para o gerador onde há três bobinas independentes
  - O máximo de tensão em cada bobina ocorre em instantes diferetes
  - A tensão gerada por cada bobina é uma fase



- Um sistema trifásico há três destas fases, separadas, cada uma, de 120 graus.
- Há também uma referência, chamada de “neutro”

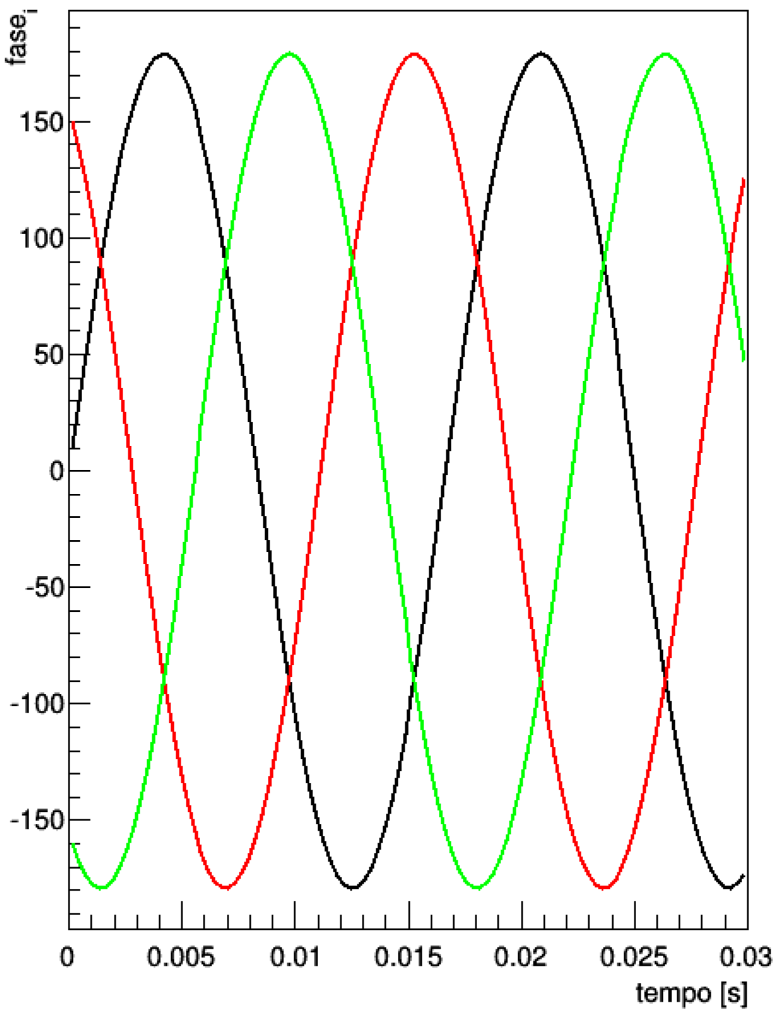
Fases no Brasil

- 3 fases de amplitude ~180 V
  - O que equivale a uma tensão efetiva de 127 V

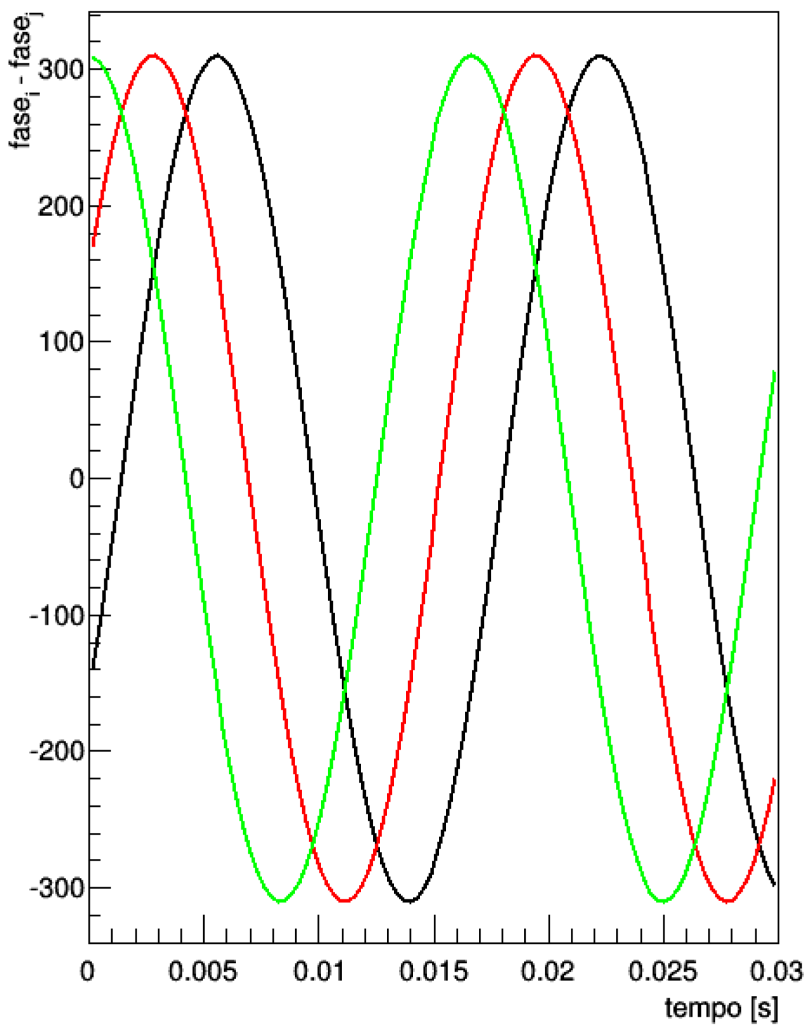
- Diferença de tensão entre uma fase e o neutro dá os "127 V"

- Diferença entre duas fases qualquer dá os "240 V"

Fases no Brasil



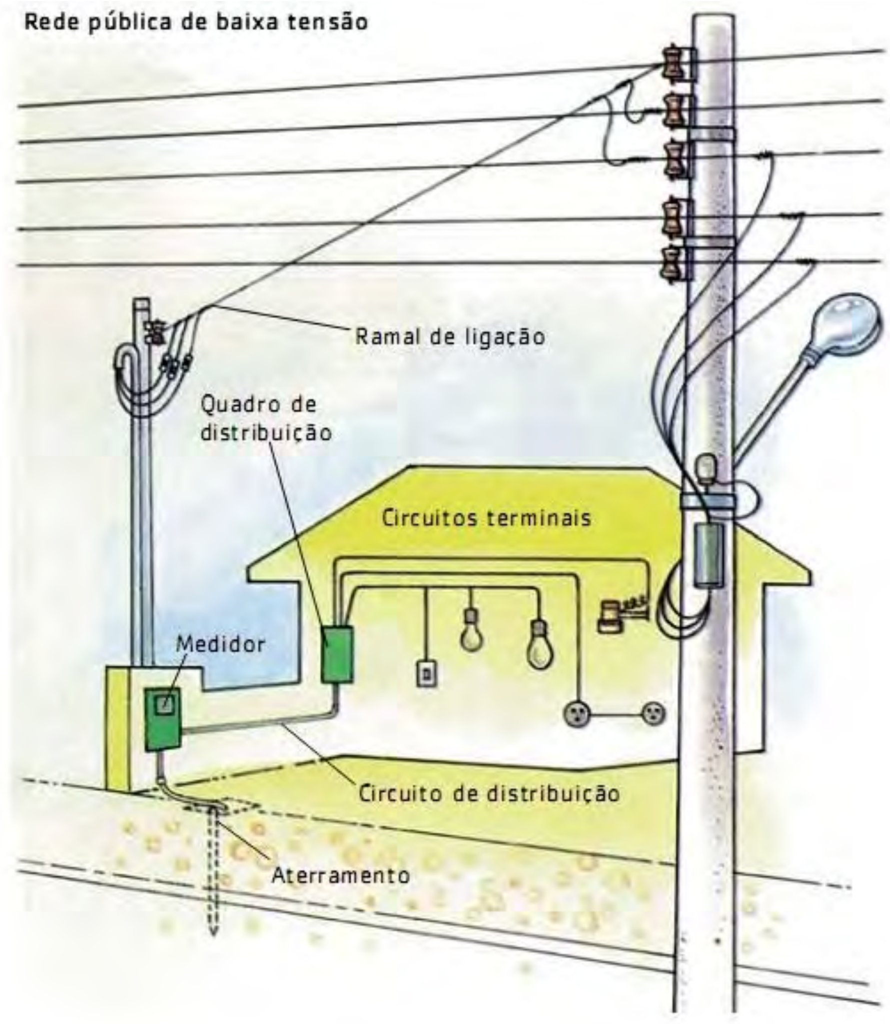
Fase - neutro



Fase 1 – fase 2

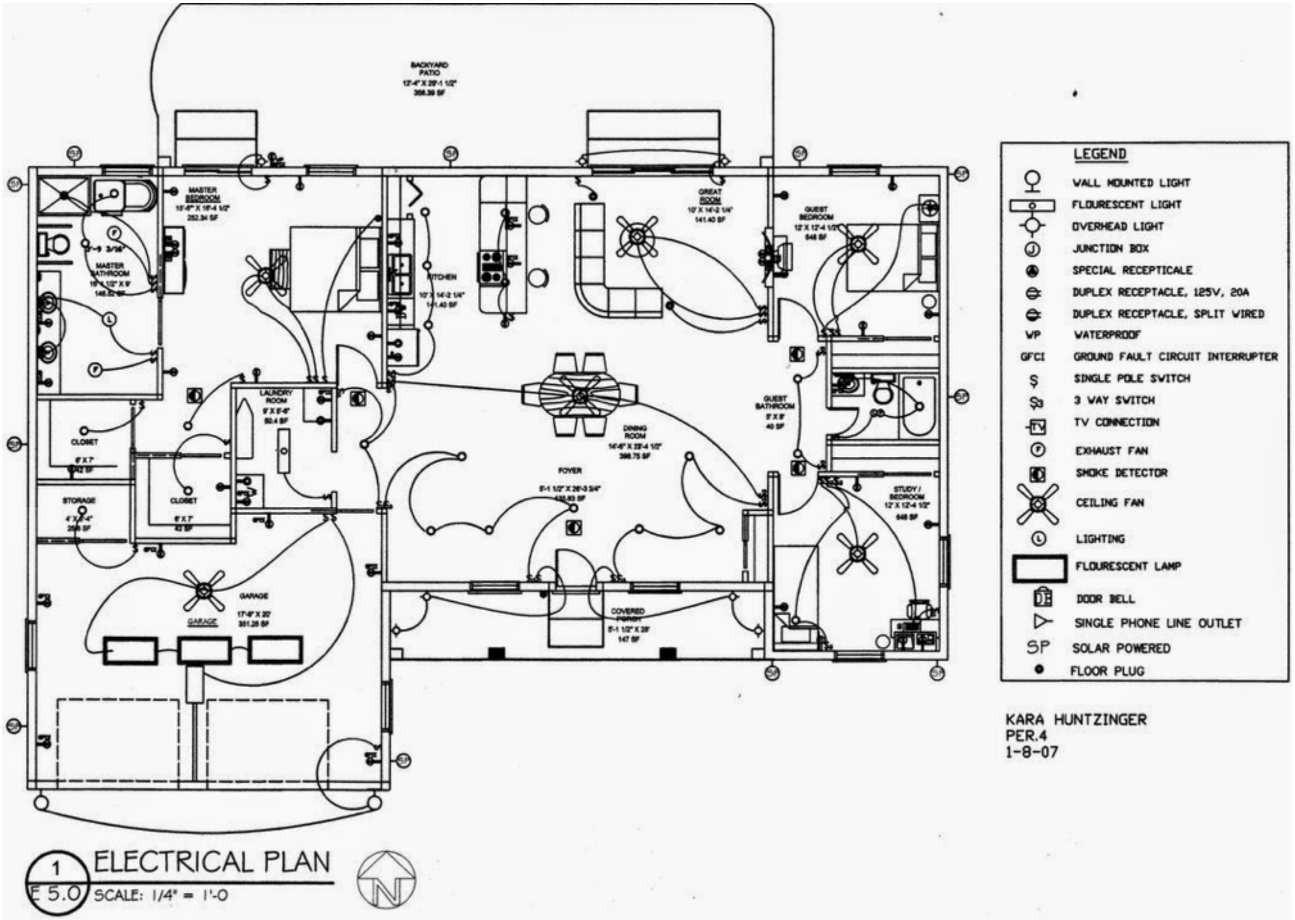
Fases no Brasil

- Em casa, em geral, recebemos 2 destas fases e o neutro.
  - Nas instalações residenciais o neutro é aterrado na porta de casa, garantindo uma referência equivalente a 0 V.
- O uso de uma fase ou outra depende de balancear a potência de forma equilibrada para não sobrecarregar um circuito.



Projeto elétrico de uma casa

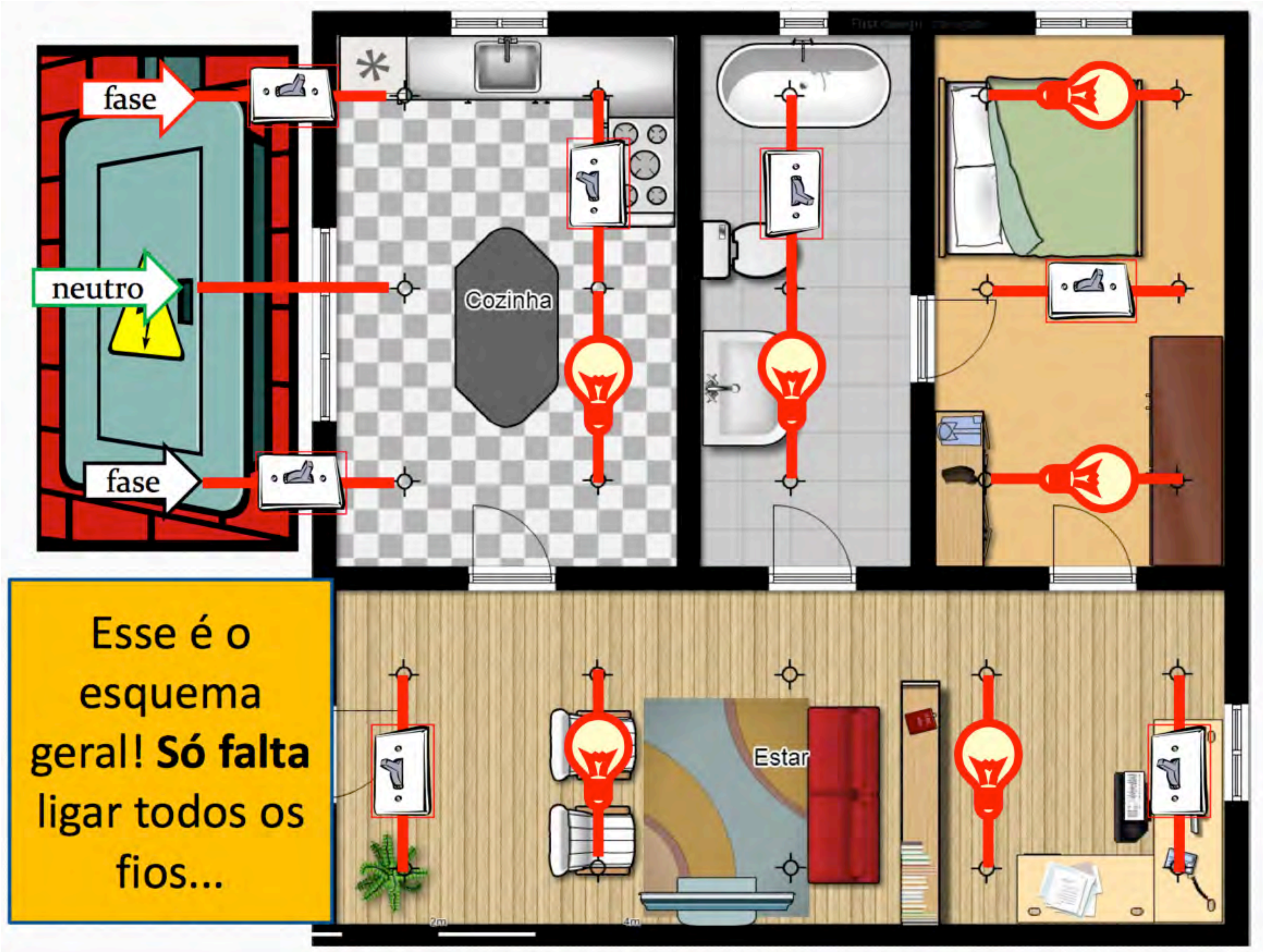
- Em geral complicado
  - Tomadas, luzes, interruptores, etc.



Nosso projeto

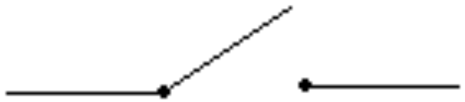
- Imagine uma casa com uma cozinha, um quarto, um banheiro e uma sala
- Características do projeto
  - A alimentação da casa se dará em duas fases e um neutro.
  - As lâmpadas nos cômodos serão dispostas da seguinte maneira:
    - Banheiro com 1 lâmpada e 1 interruptor
    - Quarto com 2 lâmpadas que acendem ao mesmo tempo e são controlados por 1 interruptor
    - Cozinha com 1 lâmpada e 1 interruptor
    - Sala com 2 lâmpadas que acendem ao mesmo tempo. O conjunto é controlado por 2 interruptores em paralelo, de maneira que a iluminação na sala pode ser acesa ou apagada por qualquer um dos interruptores.
  - O sistema de iluminação de cada aposento deve ser independente de todos os outros.
  - As duas fases devem ter mais ou menos a mesma carga: significa que a potência fornecida deve estar igualmente distribuída (ou próximo disso).
  - Deve haver uma chave geral, que desliga toda a energia da casa.

Nossa casa (posicionamento das lâmpadas e interruptores)

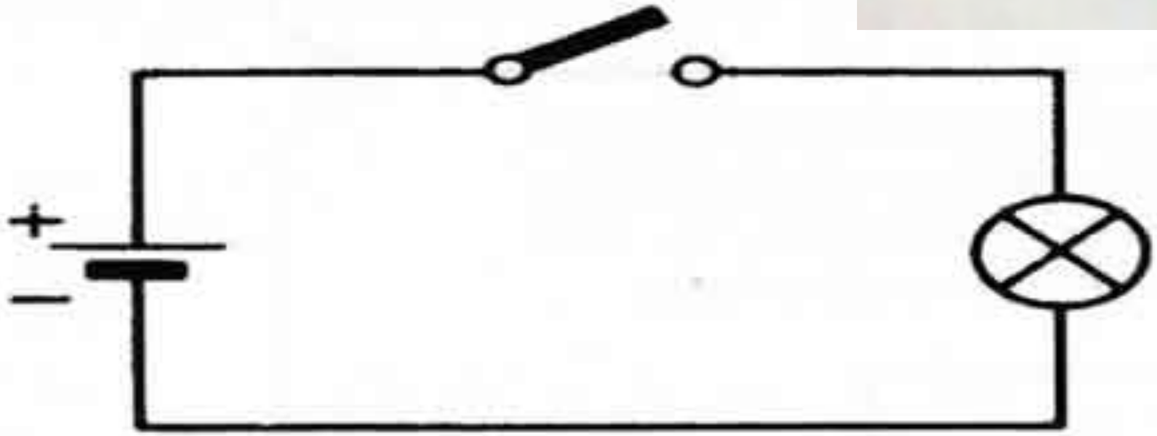


Interruptorres (chaves)

- Chave simples
  - Somente fecha/abre o circuito (liga/desliga)

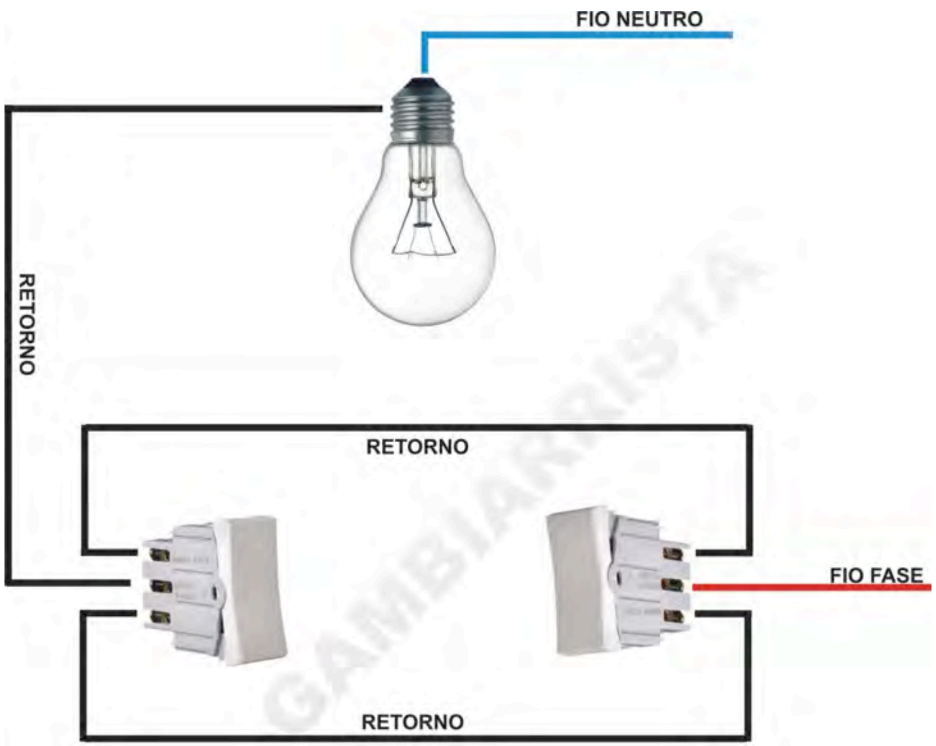


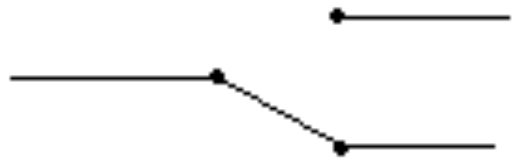
interruptor simples



Interruptorres (chaves)

- Chave seletora (paralela)
  - Seleciona entre dois caminhos diferentes





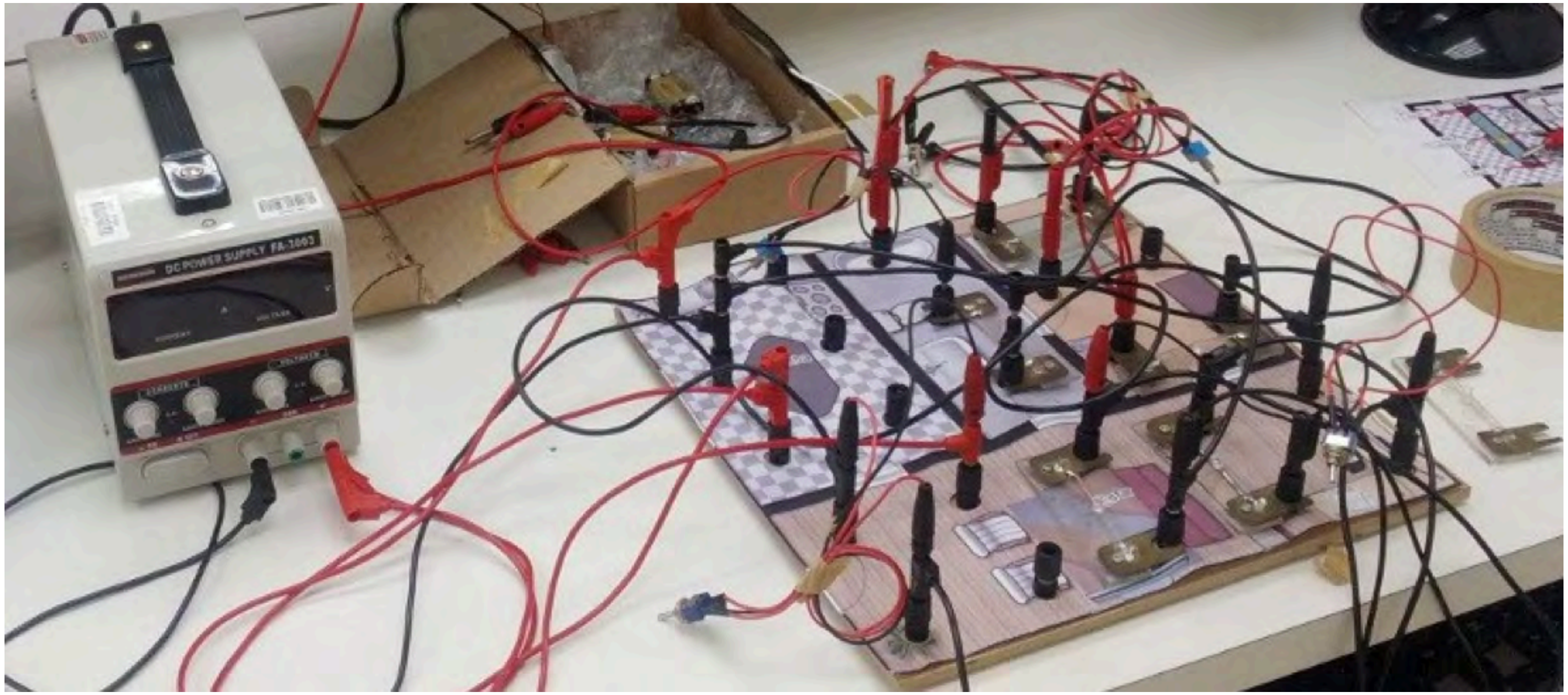
interruptor paralelo

Atividades (parte 1)

- Faça o esquema do circuito elétrico a ser montado, de acordo com as especificações. Monte o circuito projetado na planta baixa.
- Demonstre o funcionamento do circuito para o professor ou monitor que estiver na sala com você
- Mais detalhes no site da disciplina sobre o procedimento.
- NÃO PODE QUEIMAR OS LEDS ☺

Nossa usina elétrica

- Fonte DC de 0-30 V
  - Só tem uma fase então vamos dividir esta fase em duas e utilizar como se fossem duas fases distintas



Atividades (parte 2)

- Vamos utilizar a bateria carregada com energia "solar" para alimentar a casa
  - Por questões práticas, usaremos para alimentar apenas uma das fases
- Estudar o consumo de energia desta fase e comparar à energia armazenada na bateria
  - Ver site da disciplina para maiores informações sobre o procedimento