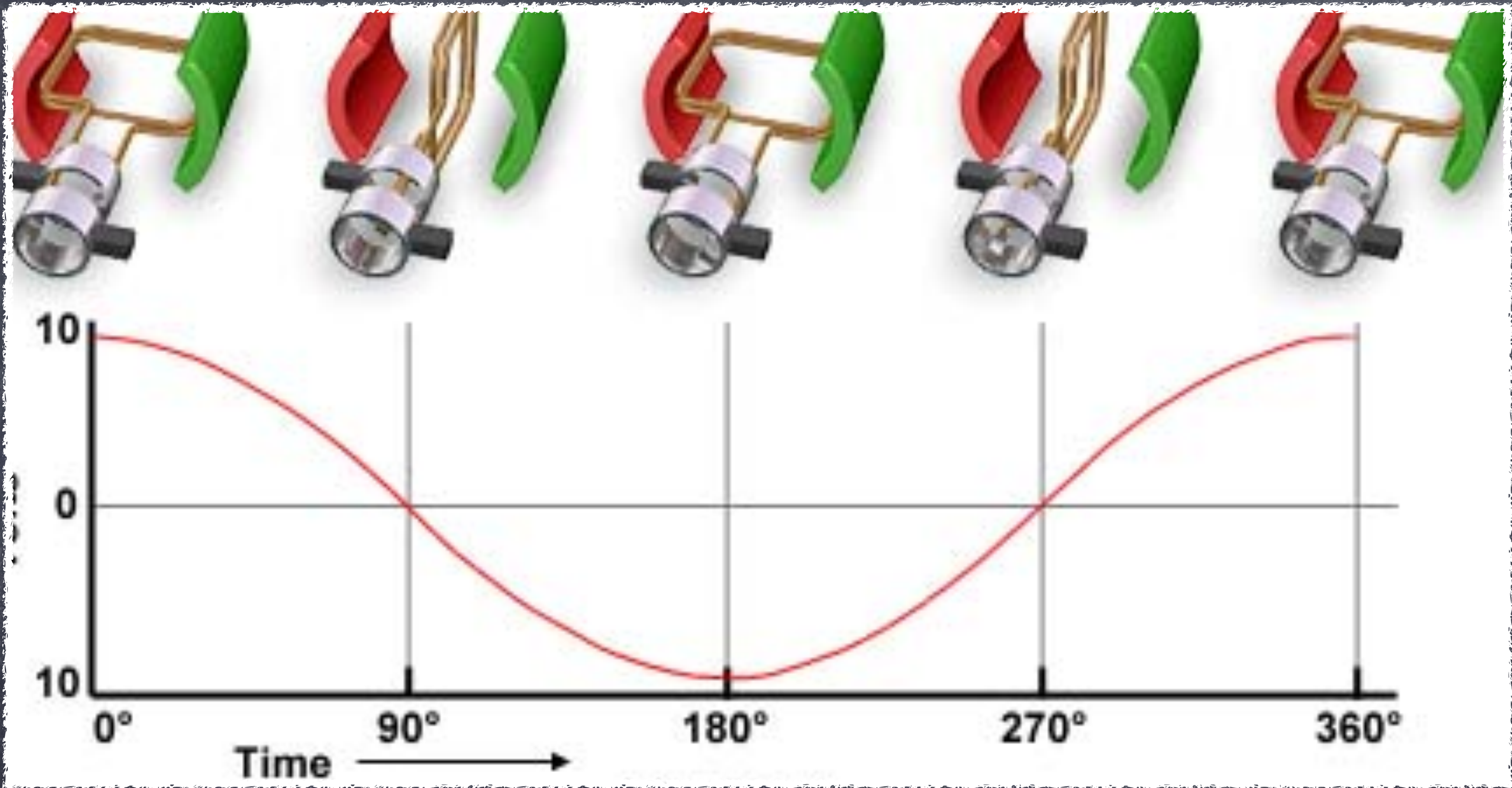


Experimento 1

Filtros e corrente alternada

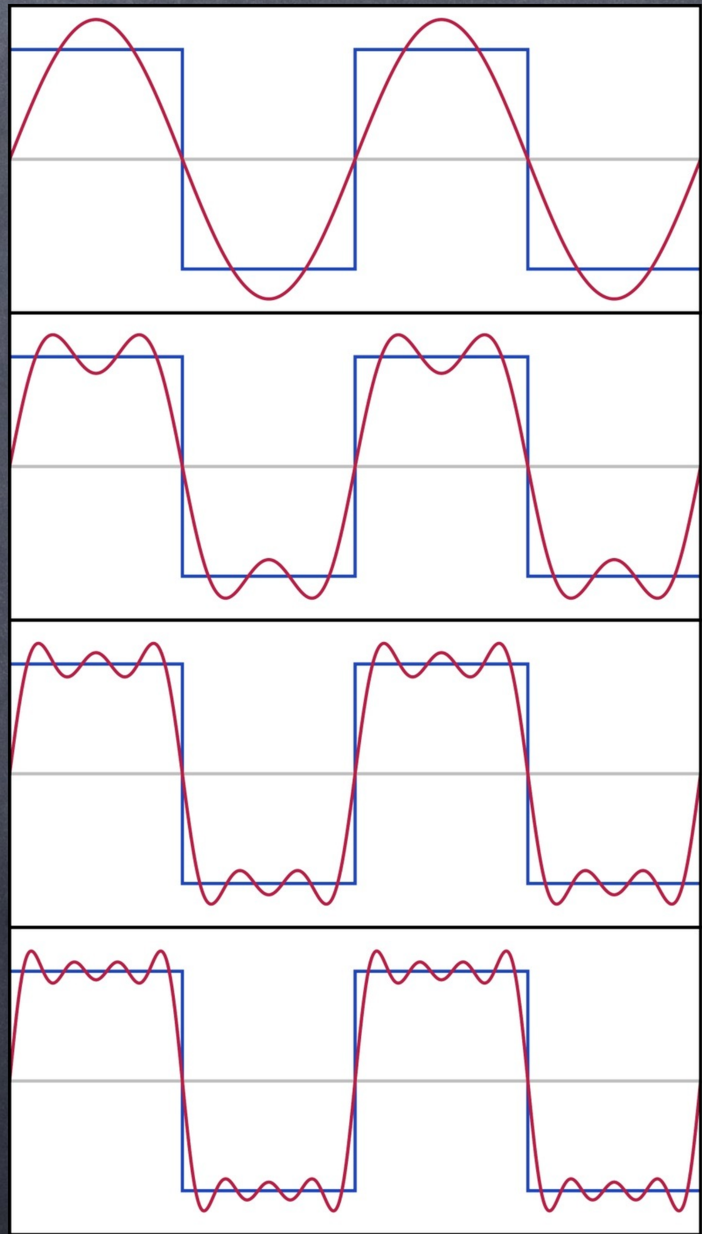
Séries de Fourier

- Decomposição de um sinal periódico em ondas harmônicas com diferentes fases e amplitudes

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnx}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-jnx} dx$$

- Você provavelmente conhece a versão em senos e cosenos. Substitua a fórmula de Euler nas expressões acima e você verá que é a mesma coisa.



Impacto de um sinal não harmônico em um circuito simples

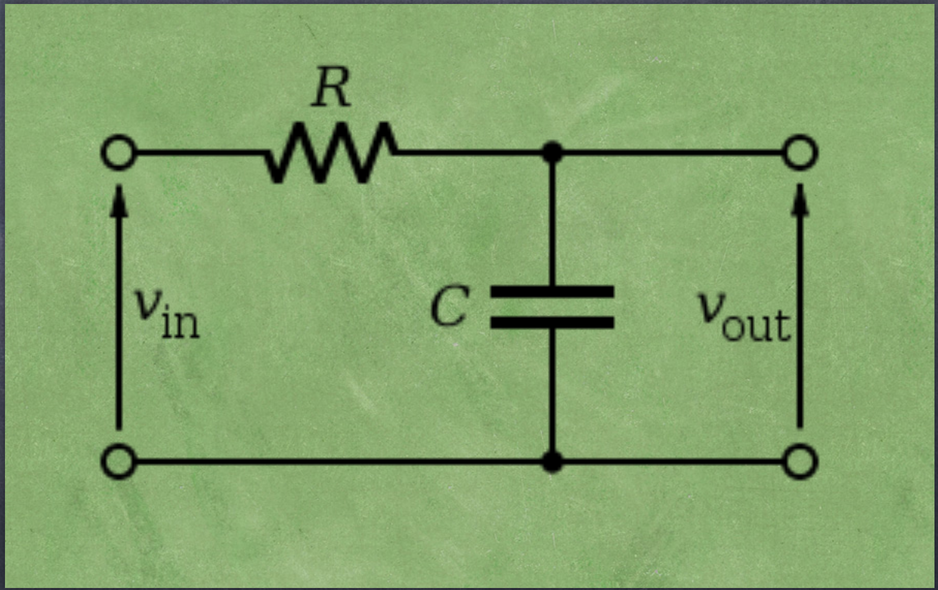
- Tomemos o circuito RC ao lado.

- Tensão não harmônica, escrita em termos de uma série de Fourier

$$V_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t}$$

  - cn são números complexos!

- Como ficam as equações que descrevem o circuito?



Equação diferencial de um circuito RC em série

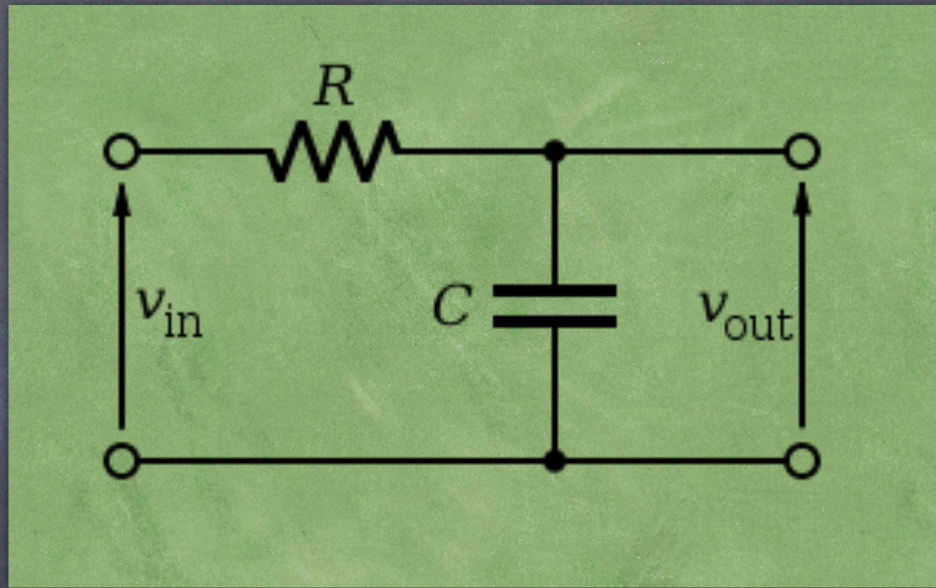
$$V_e(t) = V_R(t) + V_C(t)$$

$$V_e(t) = Ri(t) + V_C(t)$$

$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \rightarrow Q(t) = CV_C(t)$$

$$i(t) = \frac{d}{dt}Q(t) \rightarrow i(t) = C\frac{d}{dt}V_C(t)$$

$$V_e(t) = RC\frac{d}{dt}V_C(t) + V_C(t)$$



Equação diferencial de um circuito RC em série

- Podemos escrever as tensões como:

$$V_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t} \qquad V_C(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{j\omega_n t}$$

- Substituindo na equação diferencial

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t} = RC\frac{d}{dt}\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{j\omega_n t} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{j\omega_n t}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (RCj\omega_n + 1) b_n e^{j\omega_n t}$$

Equação diferencial de um circuito RC em série

- ou seja:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (RCj\omega_n + 1) b_n e^{j\omega_n t}$$

$$c_n = (RCj\omega_n + 1) b_n \qquad b_n = \frac{c_n}{1 + jRC\omega_n}$$

- Se vocês resolveram a lista de exercícios para o RC passa baixa

$$\hat{V}_C = \frac{\hat{V}_e}{1 + jRC\omega_n}$$

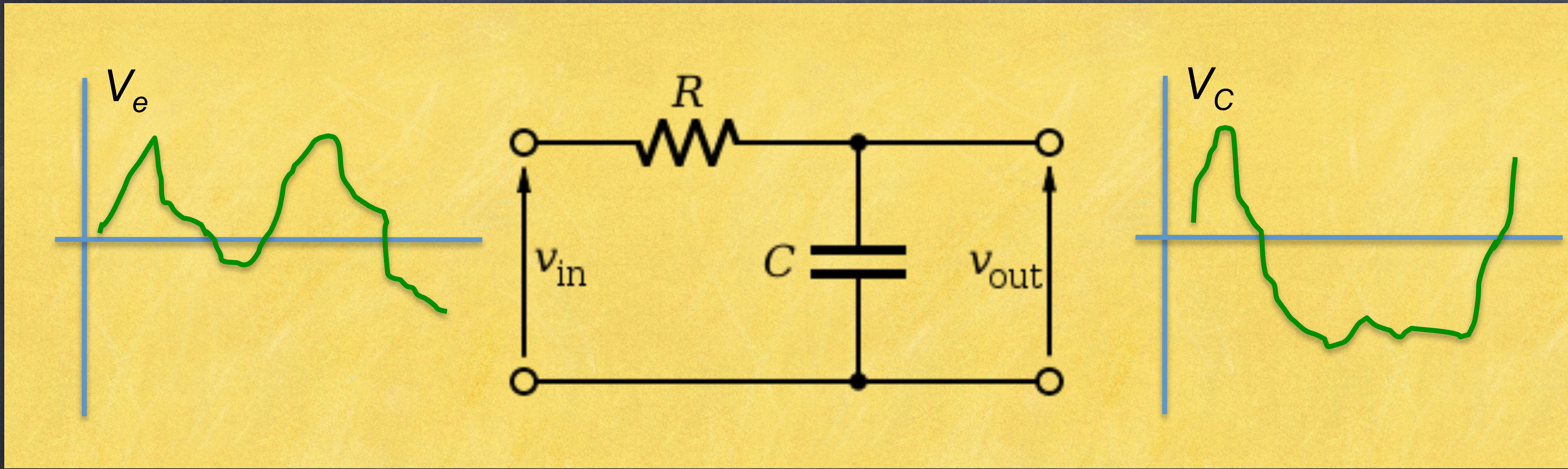
Equação diferencial de um circuito RC em série

- isto é:

$$b_n = \frac{c_n}{1 + jRC\omega_n} \qquad \hat{V}_C = \frac{\hat{V}_e}{1 + jRC\omega_n}$$

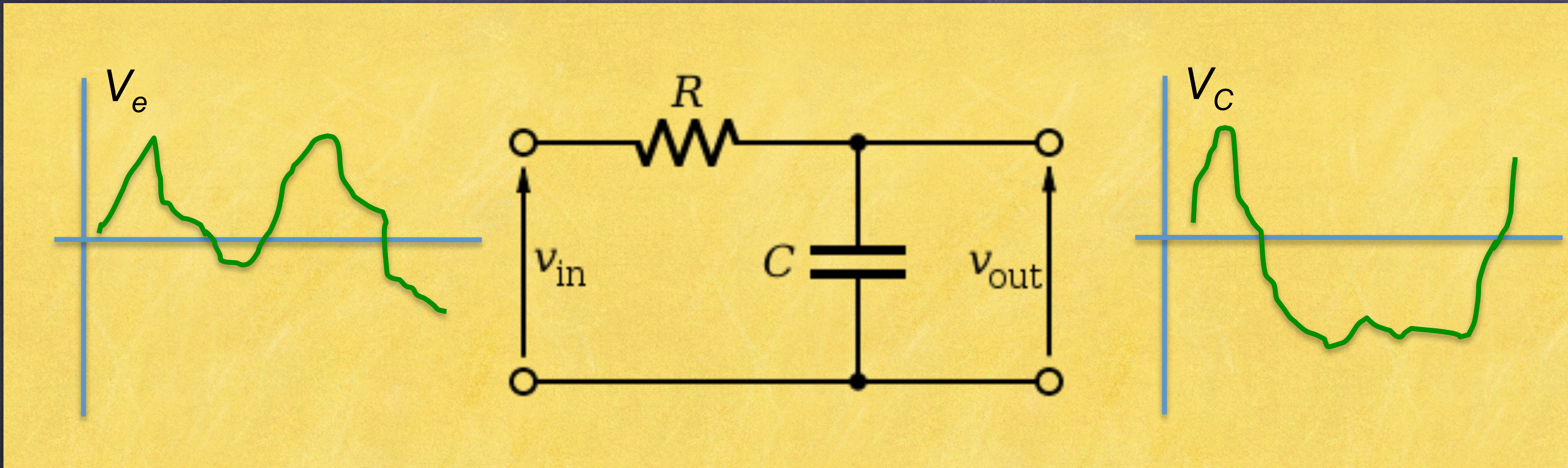
- O estudo de um sinal não harmônico em um circuito cuja E.D. seja linear pode ser feito decompondo o sinal em suas freqüências harmônicas e estudando o comportamento deste circuito para cada uma destas componentes.

Ou seja



- Como cada componente harmônica é modificada de forma diferente, por conta de terem frequências diferentes, o sinal medido não tem a mesma forma do sinal original, sendo modificado.
- Construindo o circuito adequadamente, podemos manipular a forma do sinal medido → FILTRO de sinais.

Ou seja

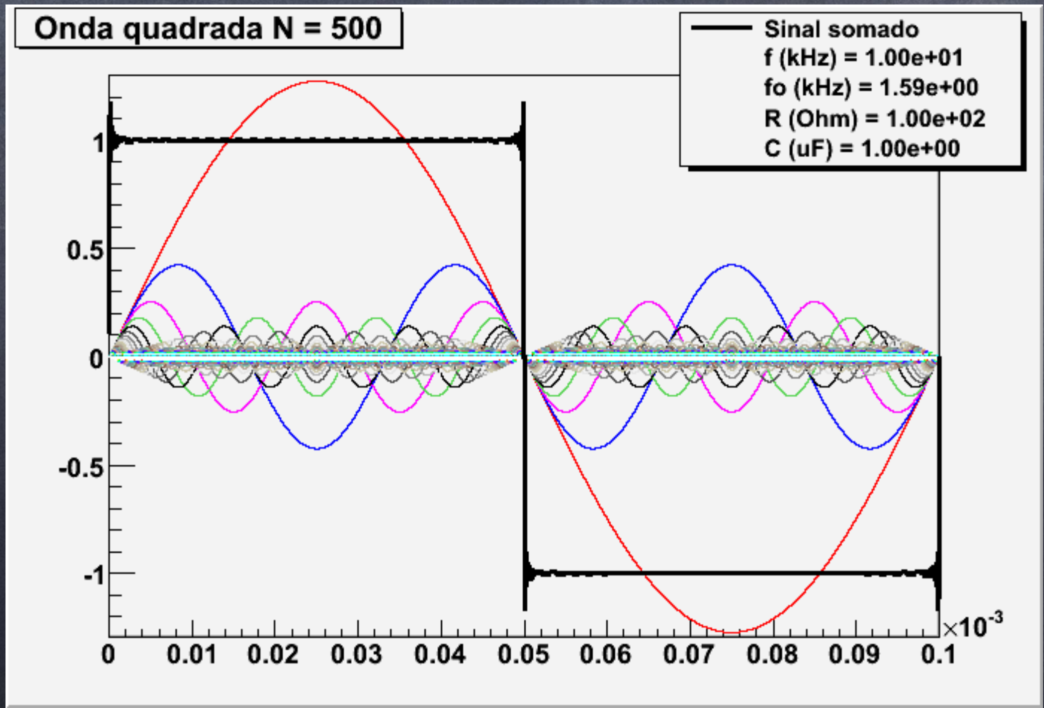


$$V_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t} \longrightarrow \hat{V}_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\hat{G}_n c_n) e^{j\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (G_n c_n) e^{j(\omega_n t + \phi_n)}$$

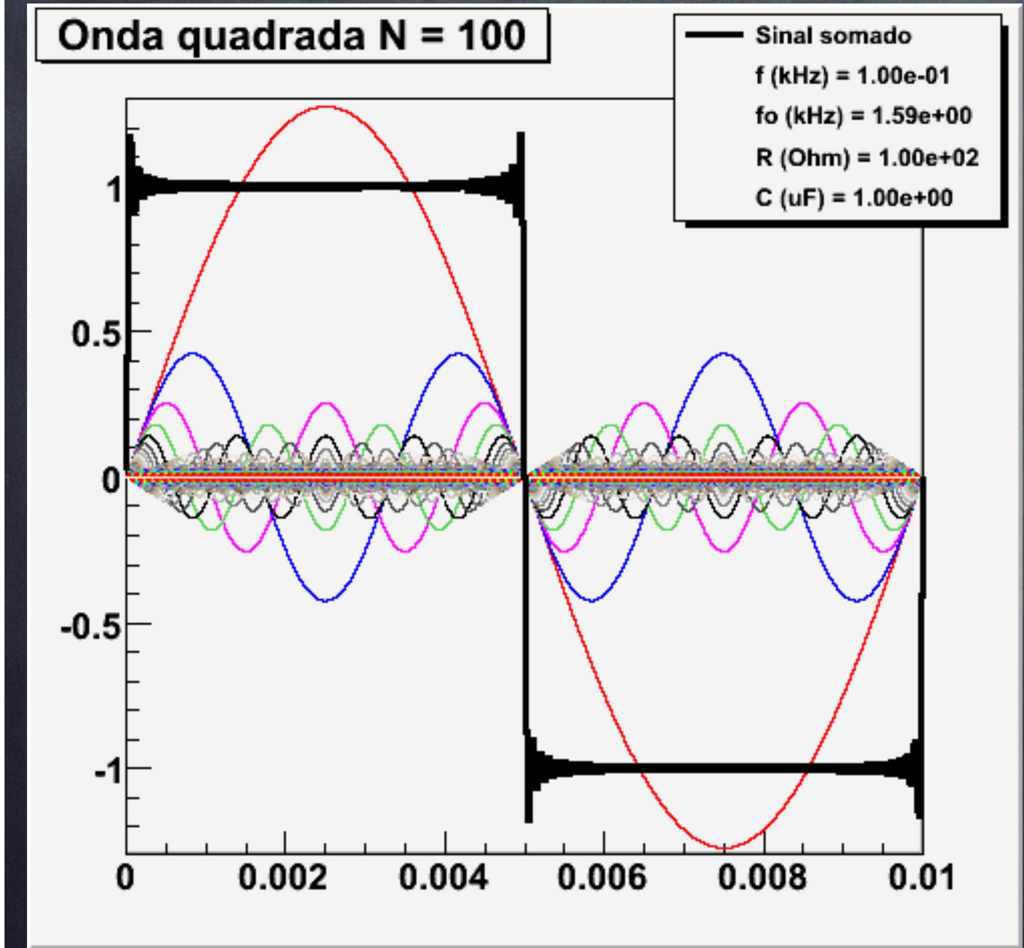
Onda quadrada

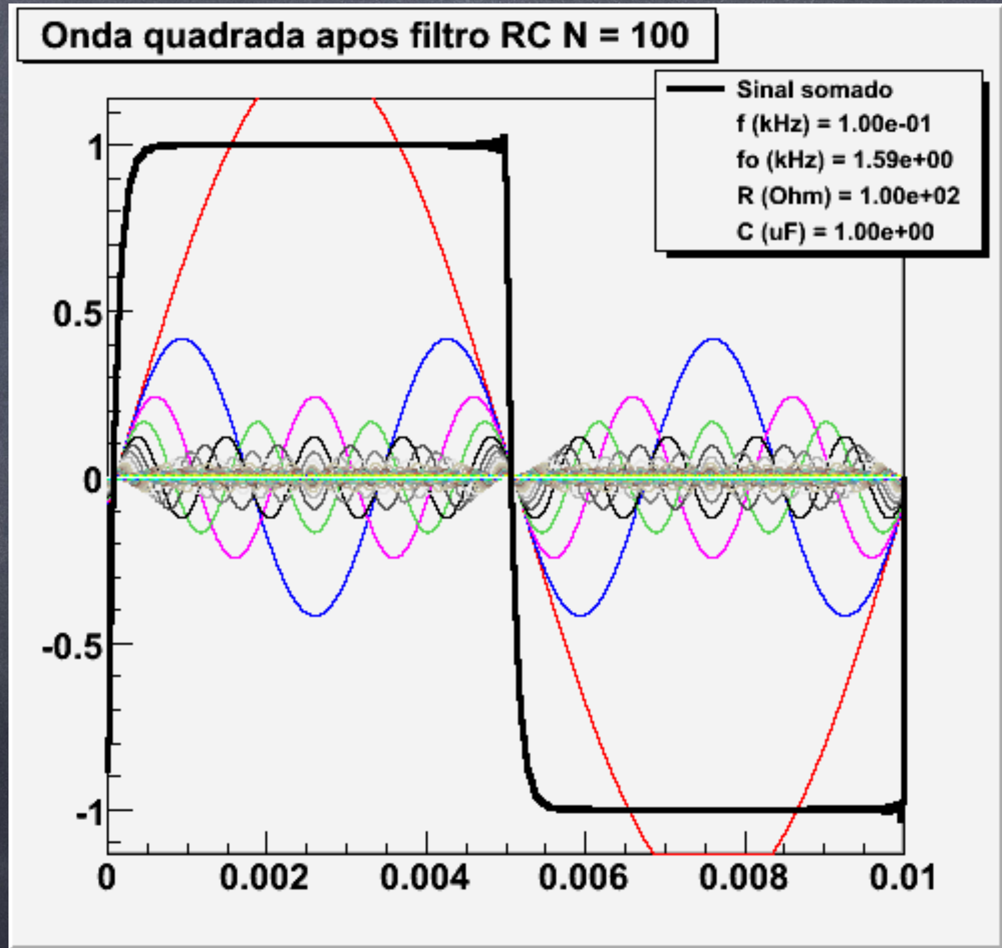
- As exponencial se reduzem aos termos de seno apenas para n ímpares.

$$V(t) = \frac{4}{\pi} V_0 \sum_{n=1,3,5,\ldots} \left(\frac{1}{n} \sin(n\omega t) \right)$$

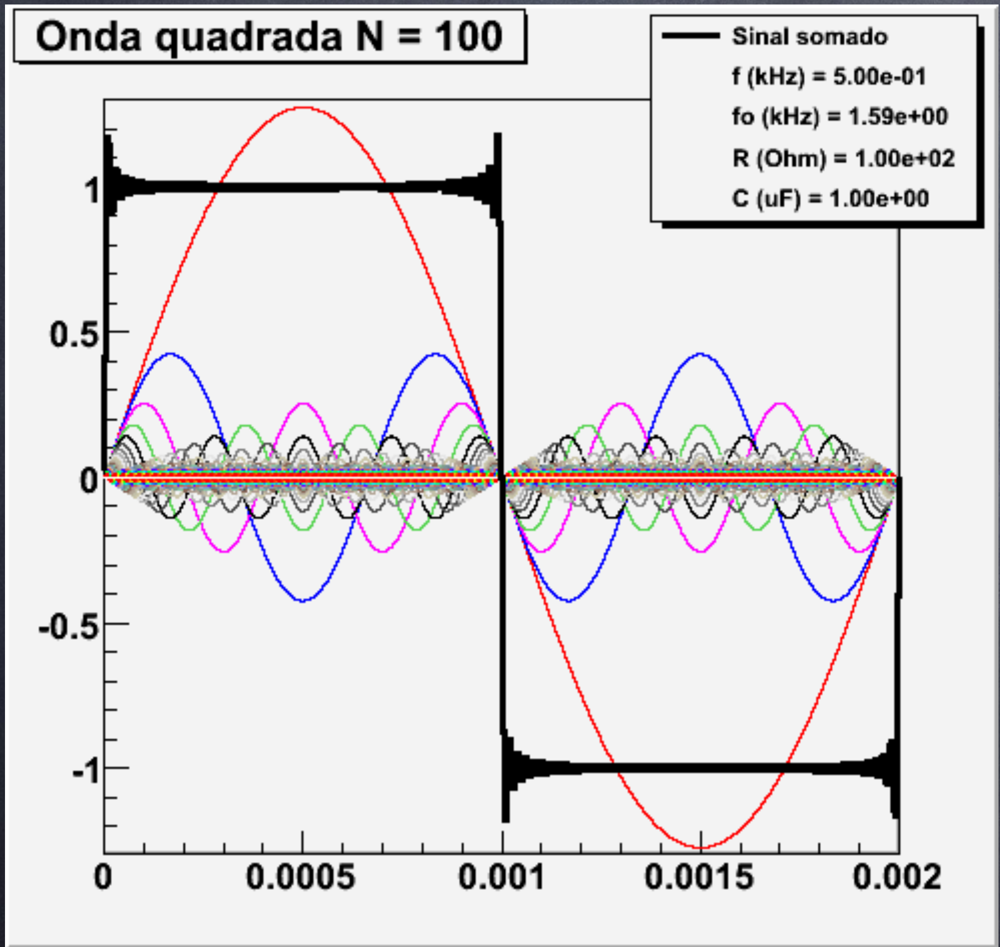


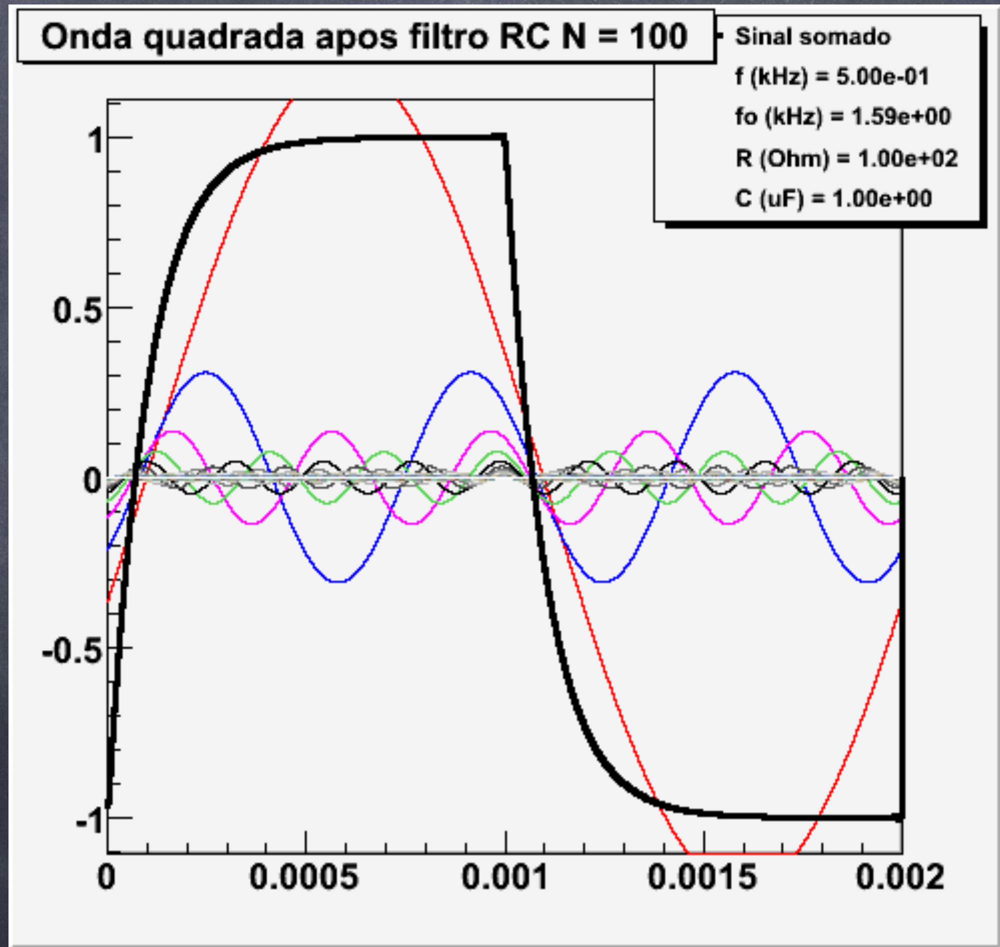
Onda quadrada em um filtro passa baixa f ~ 1/10 fc



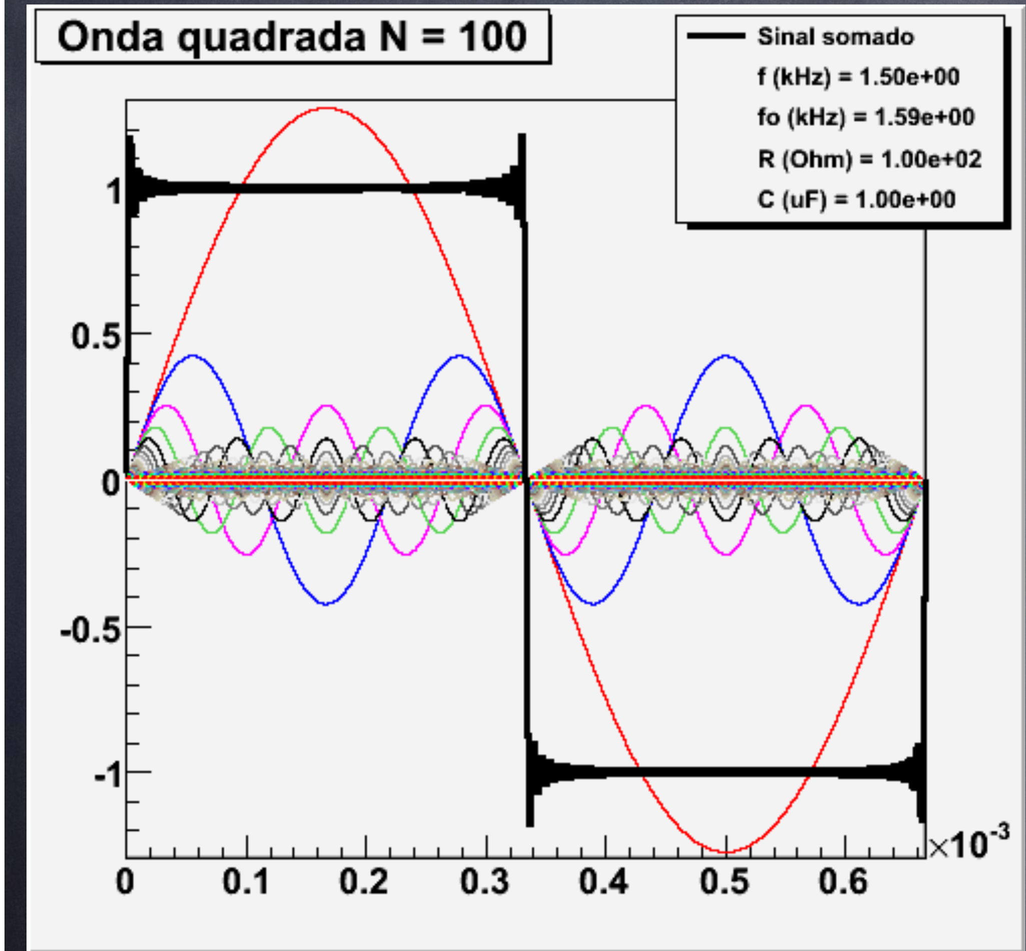


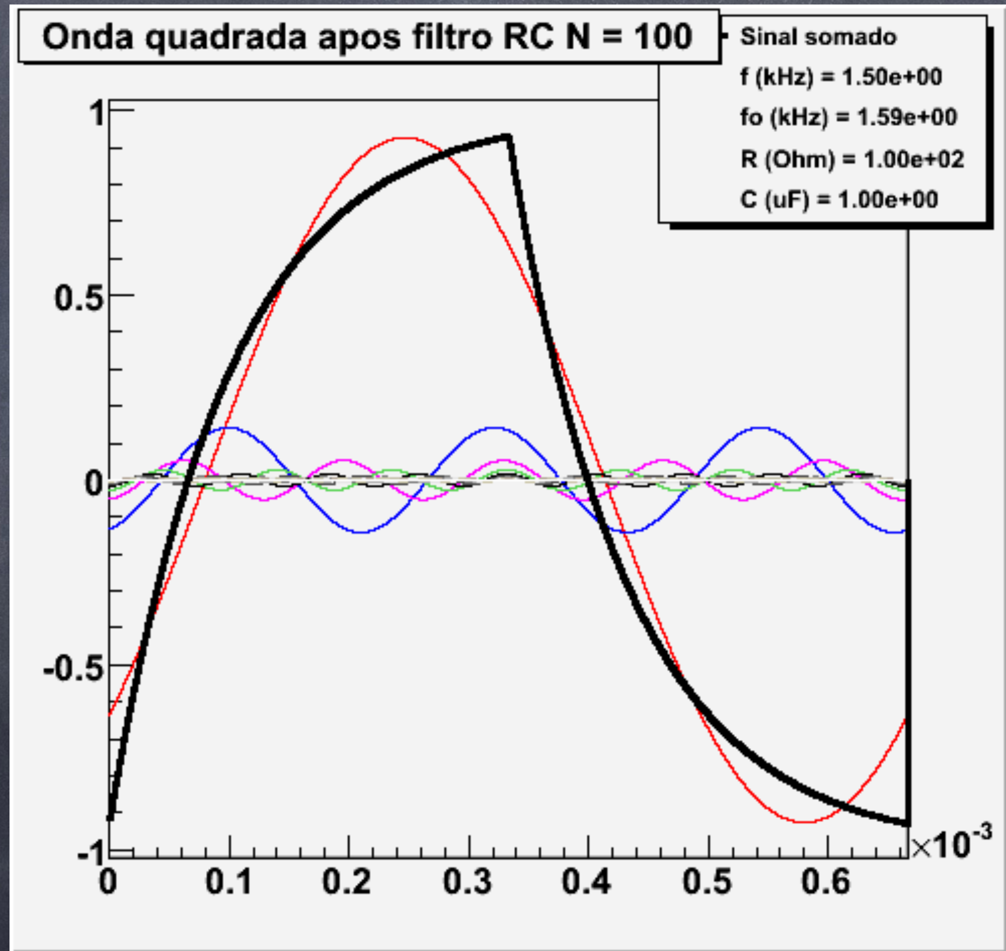
Onda quadrada em um filtro passa baixa f ~ 1/3 fc



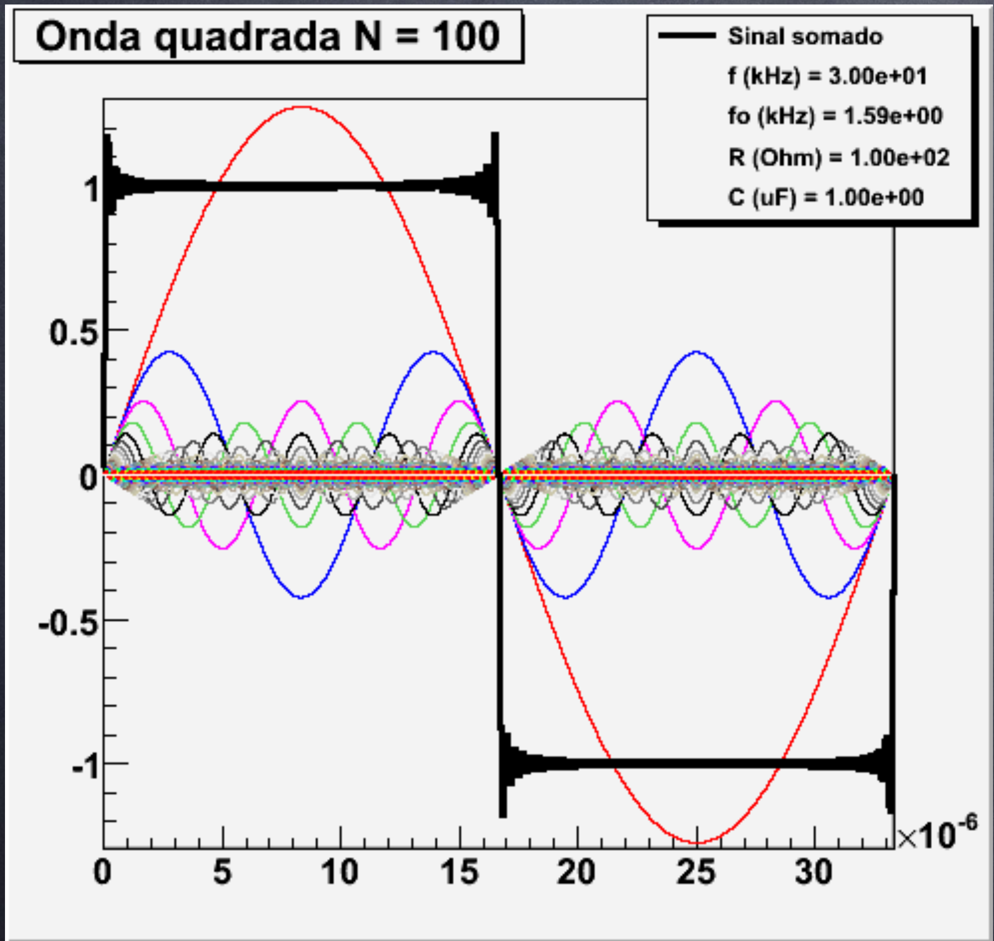


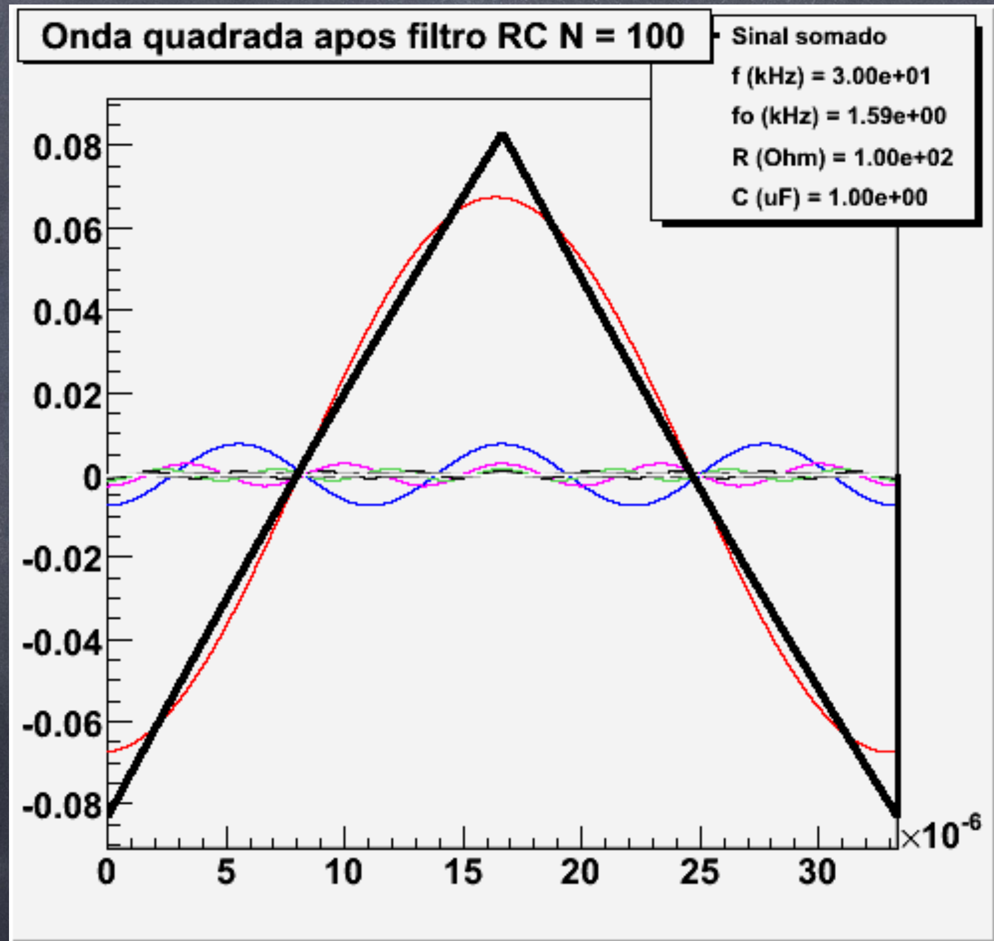
Onda quadrada em um filtro passa baixa f ~ fc





Onda quadrada em um filtro passa baixa f ~ 20 fc

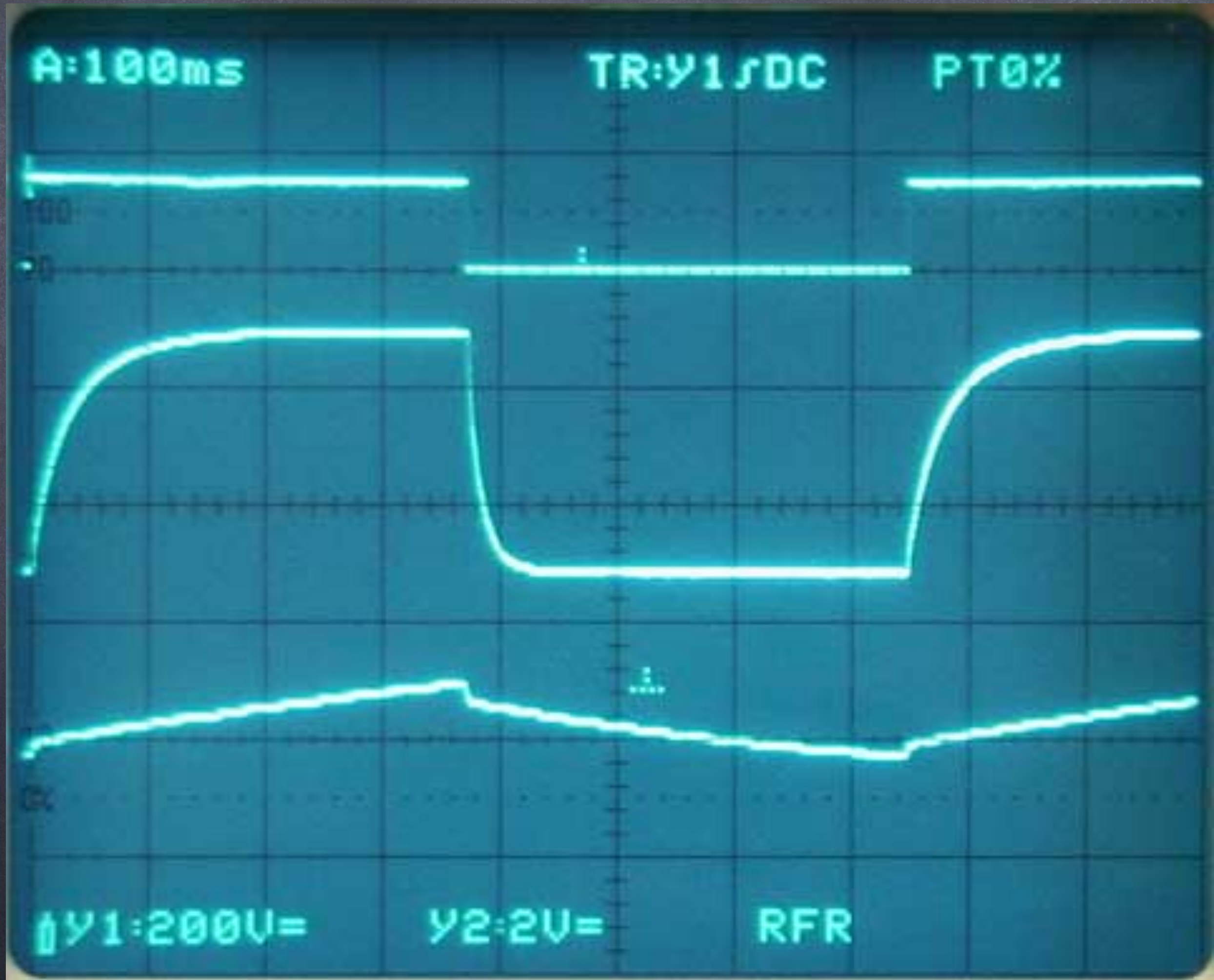




Propostas para esta semana

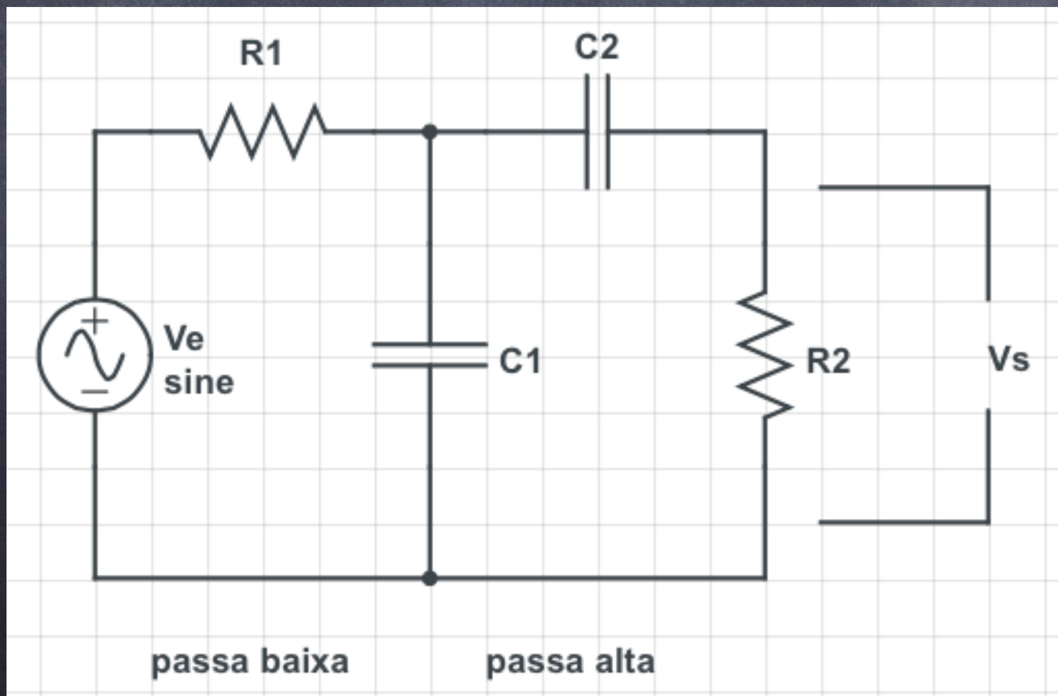
- Com o filtro passa baixa da semana passada
  - Usando uma onda quadrada com f ~ fc
  - Medir o sinal de saída no filtro
    - O osciloscópio grava o sinal em um arquivo
  - Simular o sinal com série de Fourier e comparar ao sinal observado experimentalmente

Onda quadrada no osciloscópio com passa baixa



Propostas para esta semana

- Construir e caracterizar o filtro passa banda
  - Filtro passa alta + filtro passa baixa ligados em série
    - Medir ganho e fase para este filtro e comparar ao modelo teórico construído na lista de exercícios.



Propostas para esta semana

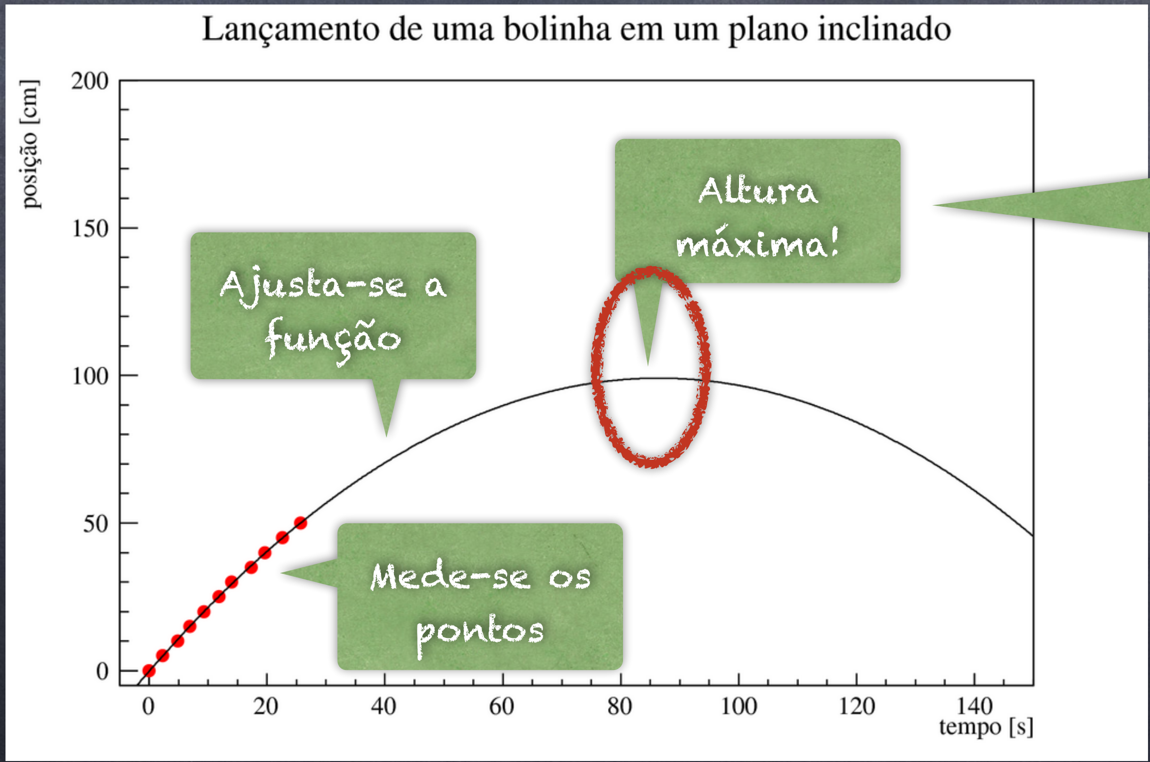
- Vejam o site da disciplina para mais detalhes e sugestões de como fazerem mas medidas propostas!

Covariância - episódio 1
Alguns conceitos básicos

Experimento 1 - aula 3

O problema clássico

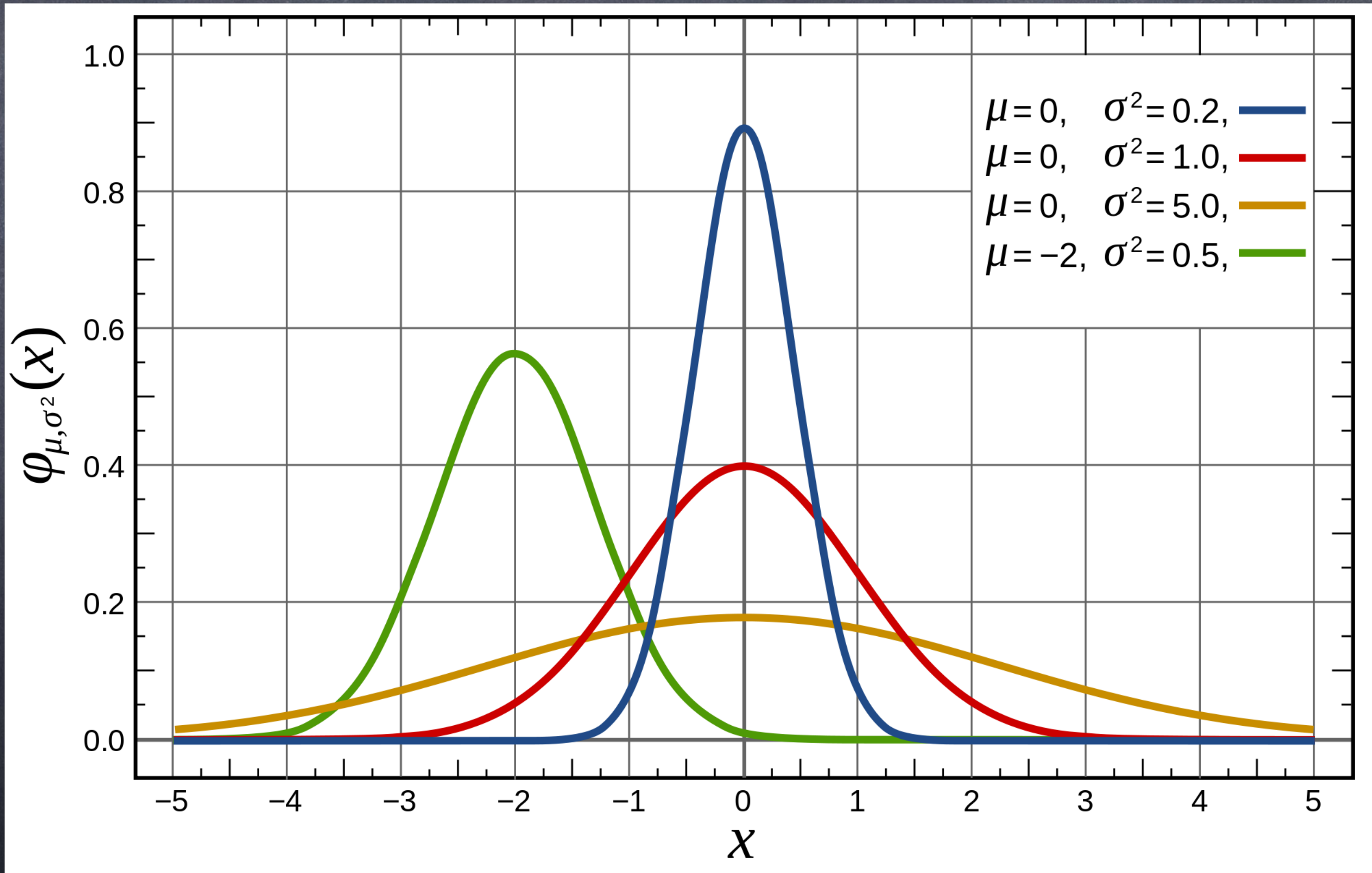
- Extrapolações de funções
    - Ex: lançamento de uma bolinha em um plano inclinado. Qual altura máxima ela atinge?



Qual a incerteza na altura máxima?

A gaussiana

$$G_{\mu,\sigma}(x) = G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$



Uma propriedade importante

- Cálculo de valores médios

$$\langle (x-\mu)^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^n G(x) dx$$

- fazendo uma mudança de variável

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma} \rightarrow \langle (x-\mu)^n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma^n \int_{-\infty}^{+\infty} y^n \exp\left[-\frac{1}{2} y^2 \right] dy$$

Uma propriedade importante

- Definindo

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} y^n \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] dy$$

- Consultando uma tabela de integrais

$$I_0 = \sqrt{2\pi}$$

$$I_n = 0 \text{ se } n \text{ for ímpar}$$

$$\frac{I_n}{I_{n-2}} = (n-1) \text{ para } n \text{ par e } n > 1$$

Uma propriedade importante

- Fazendo um pouquinho de contas chegamos que

$$\langle (x-\mu)^n \rangle = \frac{I_n}{I_0}\sigma^n$$

- Exemplo:

$$\langle (x-\mu)^4 \rangle = \frac{I_4}{I_0}\sigma^4 = \frac{I_4}{I_2}\frac{I_2}{I_0}\sigma^4 = (4-1)(2-1)\sigma^4 = 3\sigma^4$$

$$\langle (x-\mu)^2 \rangle = \frac{I_2}{I_0}\sigma^2 = (2-1)\sigma^2 = \sigma^2$$

Propagação de incertezas

- Considere um exemplo simples onde se quer calcular

$$z = x + y$$

$$\sigma_z^2 = \langle (z - \mu_z)^2 \rangle$$

- Substituindo a fórmula no cálculo da variância:

$$\sigma_z^2 = \langle (x + y - (\mu_x + \mu_y))^2 \rangle$$

$$\sigma_z^2 = \langle ((x - \mu_x) + (y - \mu_y))^2 \rangle$$

$$\sigma_z^2 = \langle ((x - \mu_x)^2 \rangle + \langle ((y - \mu_y))^2 \rangle + 2\langle (x - \mu_x)(y - \mu_y) \rangle$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2cov_{xy} \qquad cov_{xy} = \langle (x - \mu_x)(y - \mu_y) \rangle$$

Fórmula geral de propagação de incertezas

- Seja uma grandeza calculada através de uma função qualquer

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(\tilde{x})$$

$$\sigma_y^2 = \langle (f(\tilde{x}) - f(\mu_x))^2 \rangle$$

- Fazendo uma expansão em série de taylor da função em primeira ordem:

$$f(\tilde{x}) = f(\mu_x) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i - \mu_i)$$

$$\sigma_y^2 = \langle (f(\mu_x) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i - \mu_i) - f(\mu_x))^2 \rangle$$

$$\sigma_y^2 = \langle (\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i - \mu_i))^2 \rangle$$

Fórmula geral de propagação de incertezas

- Pegando esta equação e abrindo explicitamente o quadrado, podemos reagrupar os termos de tal forma que:

$$\sigma_y^2 = \langle (\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i - \mu_i))^2 \rangle$$

$$\sigma_y^2 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \langle (x_i - \mu_i)^2 \rangle + \sum_i \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\langle (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) \rangle$$

$$\sigma_y^2 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_i^2 + \sum_i \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} cov_{ij}$$

Fórmula geral de propagação de incertezas

- Esta fórmula geral de propagação de incertezas pode ser escrita em uma forma matricial do tipo

$$\sigma_y^2 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_i^2 + \sum_i \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} cov_{ij}$$

$$\boxed{\sigma_y^2 = \mathbf{T}^{\mathbf{T}}\mathbf{\Sigma}\mathbf{T}}$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix} \text{ com } \partial_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & cov_{12} & \cdots & cov_{1n} \\ cov_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & cov_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov_{n1} & cov_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

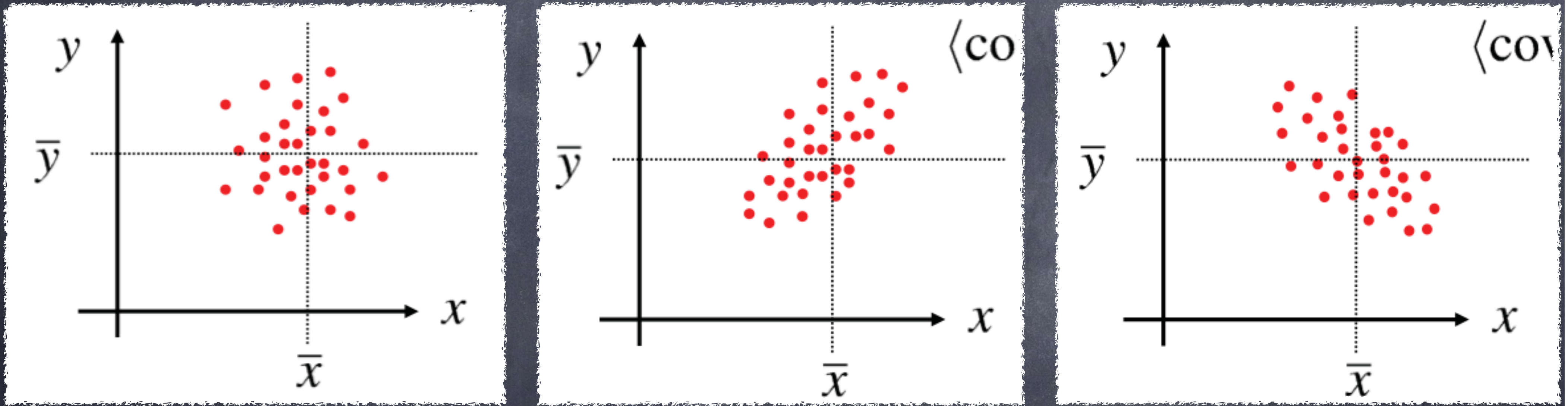
$\mathbf{\Sigma}$ é chamada de matriz de covariância

O significado da covariância

- Considere duas medidas x,y.
- Considere que podemos repetir o experimento e medir várias vezes x e y.
- Considere que a cada medida, colocamos um ponto no gráfico de y em função de x
  - Calculamos o valor médio de x e de y
  - Calculamos a covariância entre x e y

$$cov_{xy} = \langle (x - \mu_x)(y - \mu_y) \rangle$$

Há três possibilidades



$cov_{xy} = 0$ $cov_{xy} > 0$ $cov_{xy} < 0$

$$cov_{xy} = \langle (x - \mu_x)(y - \mu_y) \rangle$$

Coeficiente de correlação

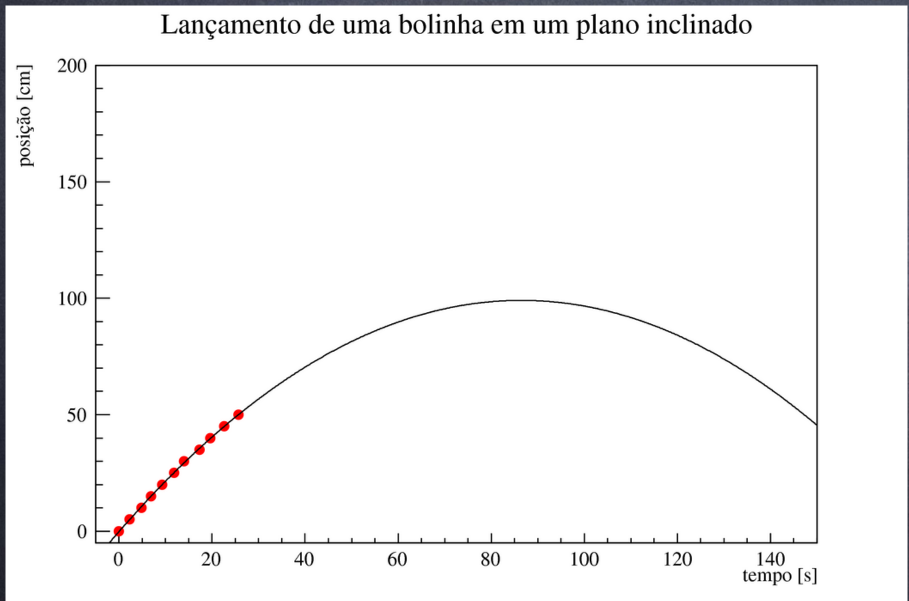
- Muitas vezes é melhor expressar a dependência de uma grandeza com outra através do coeficiente de correlação, definido como:

$$\rho_{xy} = \frac{cov_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$1 \leq \rho_{xy} \leq 1$$

Vamos voltar ao problema inicial

- Um bom programa de ajuste fornece a matriz de covariância dos parâmetros ajustados



$$f(x) = [0] + [1]x + [2]x^2$$

Resultados do ajuste

Número de parâmetros	3
Chi^2	5.3756
Número de graus de liberdade	8

parâmetro	Valor	Incerteza
0	-0.211885	0.39859
1	2.29672	0.0700687
2	-0.0132831	0.00256606

Matriz de covariância

$$\begin{bmatrix} 0.158874 & -0.0232467 & 0.000711744 \\ -0.0232467 & 0.00490963 & -0.000173525 \\ 0.000711744 & -0.000173525 & 6.58469E-06 \end{bmatrix}$$

Coeficiente de correlação

- Quão correlacionados estão os parâmetros 1 e 2?

Resultados do ajuste

Número de parâmetros	3
Chi^2	5.3756
Número de graus de liberdade	8

parâmetro	Valor	Incerteza
0	-0.211885	0.39859
1	2.29672	0.0700687
2	-0.0132831	0.00256606

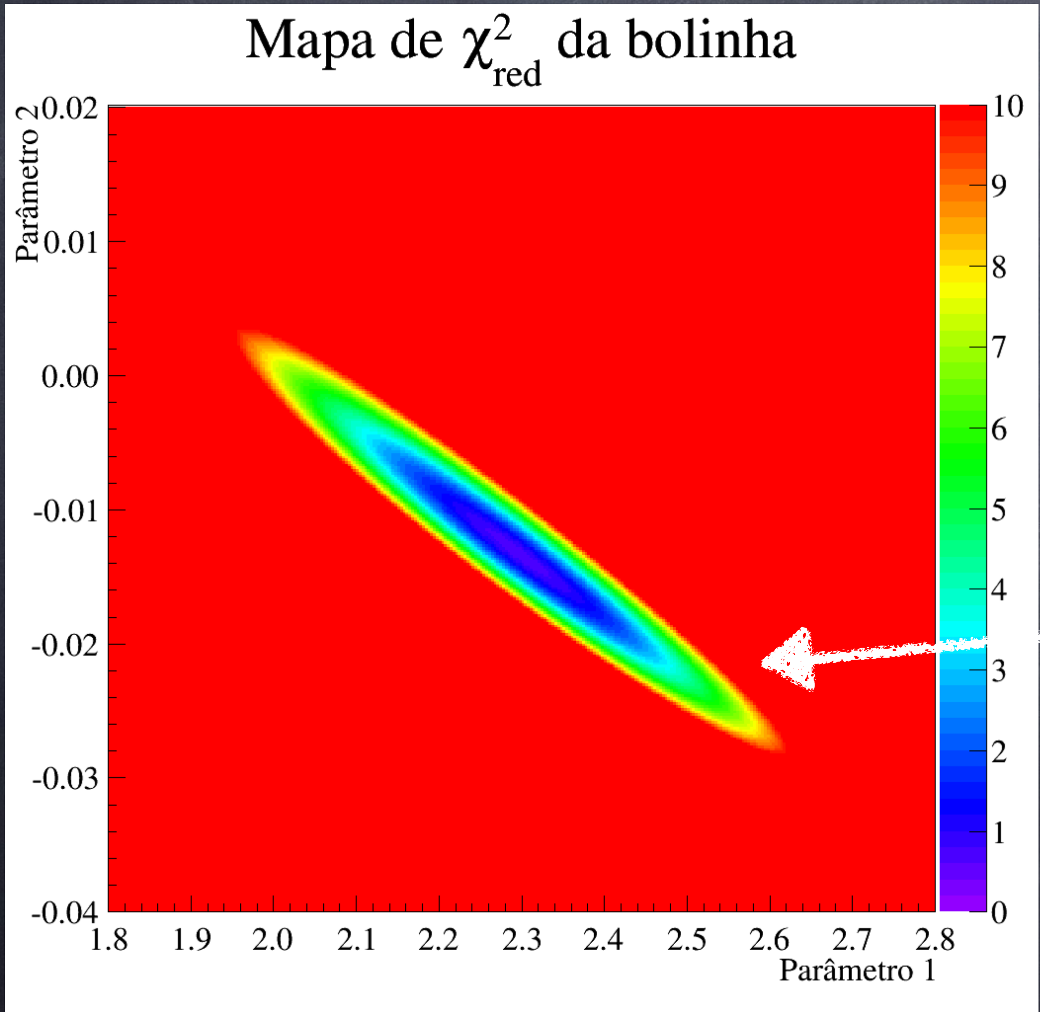
Matriz de covariância

$$\begin{bmatrix} 0.158874 & -0.0232467 & 0.000711744 \\ -0.0232467 & 0.00490963 & -0.000173525 \\ 0.000711744 & -0.000173525 & 6.58469E-06 \end{bmatrix}$$

$$\rho_{12} = \frac{cov_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} = -0.96$$

Estes parâmetros estão altamente correlacionados

Mapa de chi2 reduzido

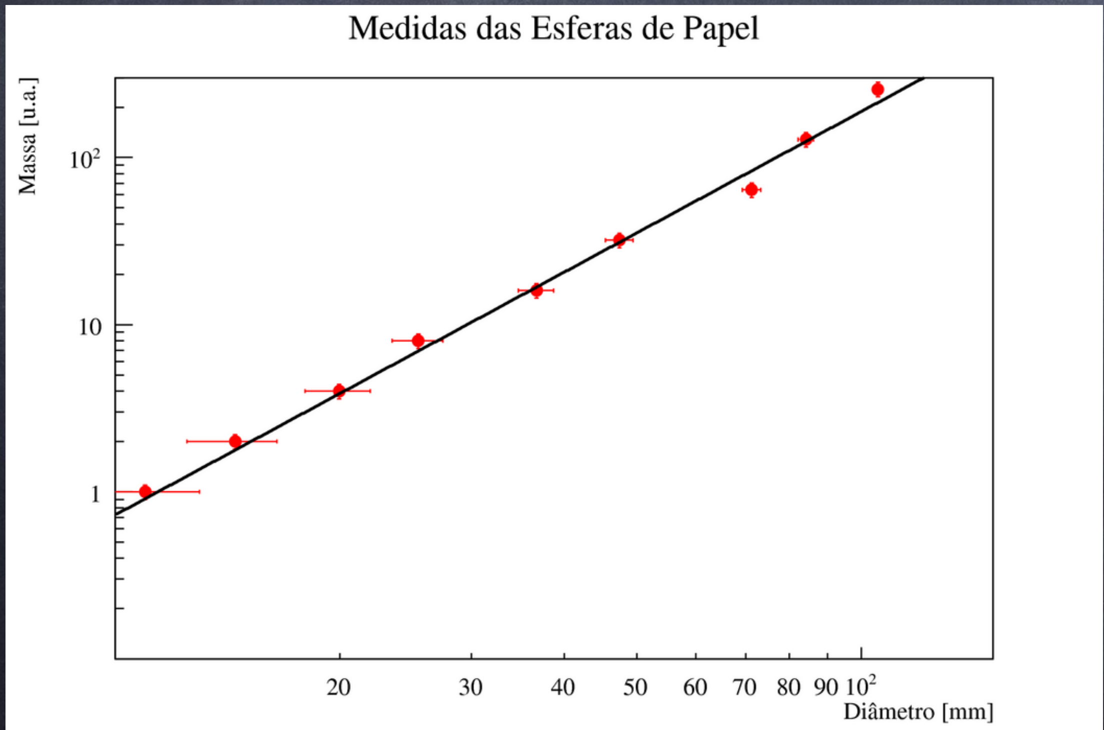


$$\rho_{12} = \frac{cov_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} = -0.96$$

É bem evidente a correlação entre os parâmetros

Efeito da covariância na incerteza de um ajuste.

- Exemplo: dimensões fractais
  - Experimento da bolinha de papel amassada



$$m = [0] \times D^{[1]}$$

Resultados do ajuste

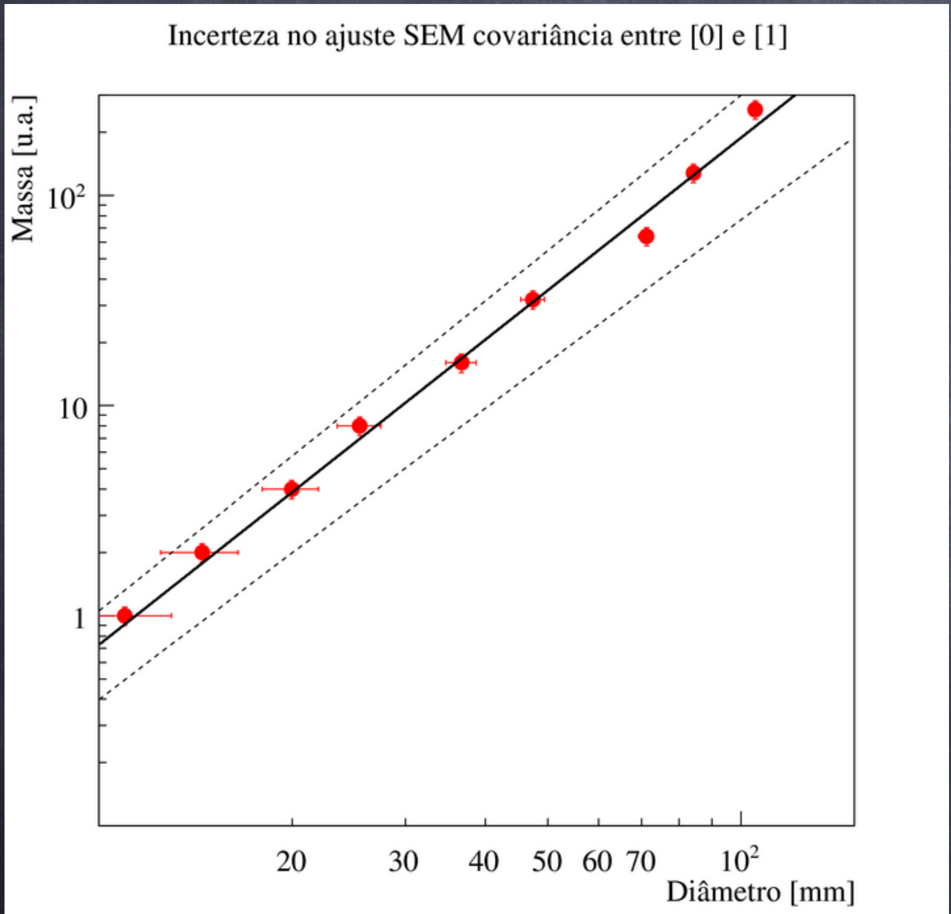
Número de parâmetros	2
Chi^2	8.36899
Número de graus de liberdade	7

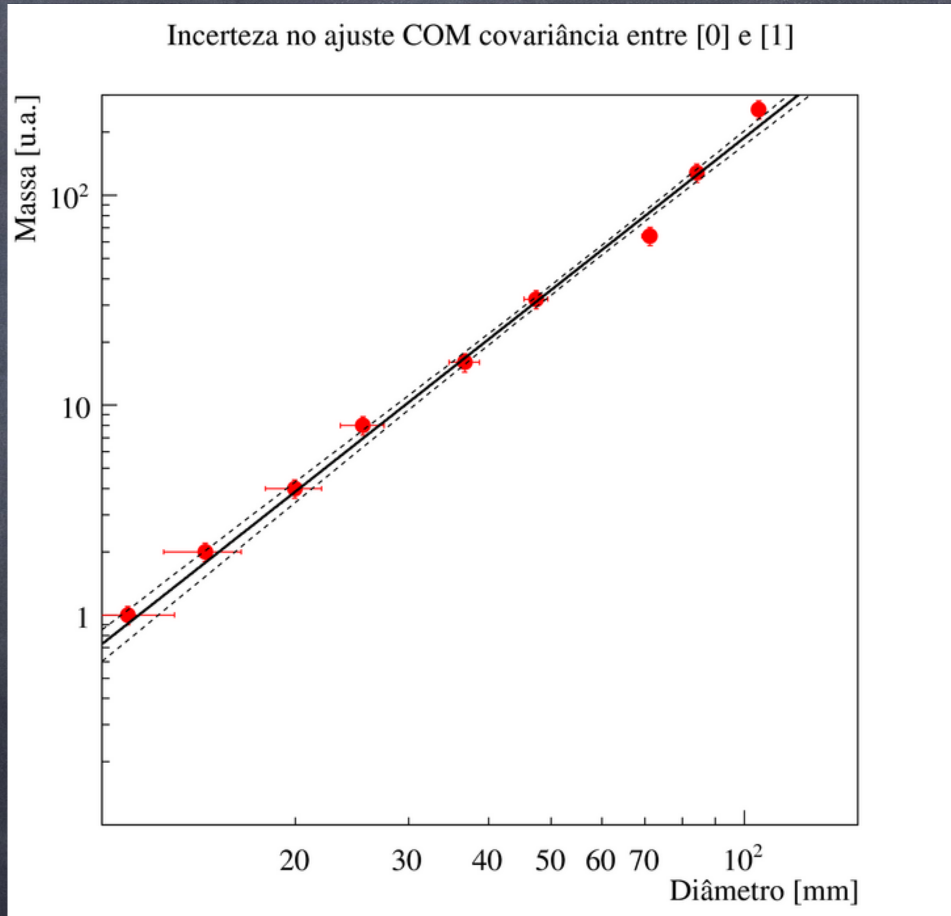
parâmetro	Valor	Incerteza
0	0.00280196	0.00109713
1	2.41398	0.0967847

Matriz de covariância

$$\begin{bmatrix} 1.2037E-06 & -0.000105186 \\ -0.000105186 & 0.00936727 \end{bmatrix}$$

Efeito da covariância na incerteza de um ajuste.





Voltando ao problema original

Altura máxima!

Qual a incerteza na altura máxima?

$$f(x) = [0] + [1]x + [2]x^2 \longrightarrow H_{max} = [0] - \frac{1}{4}\frac{[1]^2}{[2]}$$

Voltando ao problema original

$$H_{max} = [0] - \frac{1}{4}\frac{[1]^2}{[2]}$$

$$\sigma^2_{H_{max}} = \mathbf{T}^{\mathbf{T}}\mathbf{\Sigma}\mathbf{T}$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \partial_0 \\ \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix} \text{ com } \partial_i = \frac{\partial H_{max}}{\partial [i]}$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0.158874 & -0.0232467 & 0.000711744 \\ -0.0232467 & 0.00490963 & -0.000173525 \\ 0.000711744 & -0.000173525 & 6.58469\text{E-}06 \end{bmatrix}$$

Façam esta propagação como exercício!
Façam também considerando cov=0 e vejam a diferença.

Perguntas em aberto

- Como calcula-se a matriz de covariância? O que ela tem a ver com o ajuste de uma função?
- Como extraio a correlação entre dois parâmetros do mapa de chi2?
- Como eu sei se duas grandezas estão correlacionadas ou não?
  - No caso de um ajuste é fácil mas e no caso de duas grandezas medidas em um experimento?