Experimento I

Ótica geométrica

Objetivos do experimento

- Explorar fenômenos de reflexão e refração do ponto de vista da óptica geométrica
  - Noções de ótica geométrica
  - Estudo de lentes delgadas e espessas

Cronograma

- 4 semanas
  - Semana 1
    - Lentes delgadas
  - Semana 2
    - Estudo de aberrações cromáticas em lentes
  - Semana 3
    - Lentes espessas
    - Lei de Snell
  - Semana 4
    - Algumas análises com dados tomados anteriormente

O prisma

- Luz branca incidindo em um prisma é decomposta em várias cores

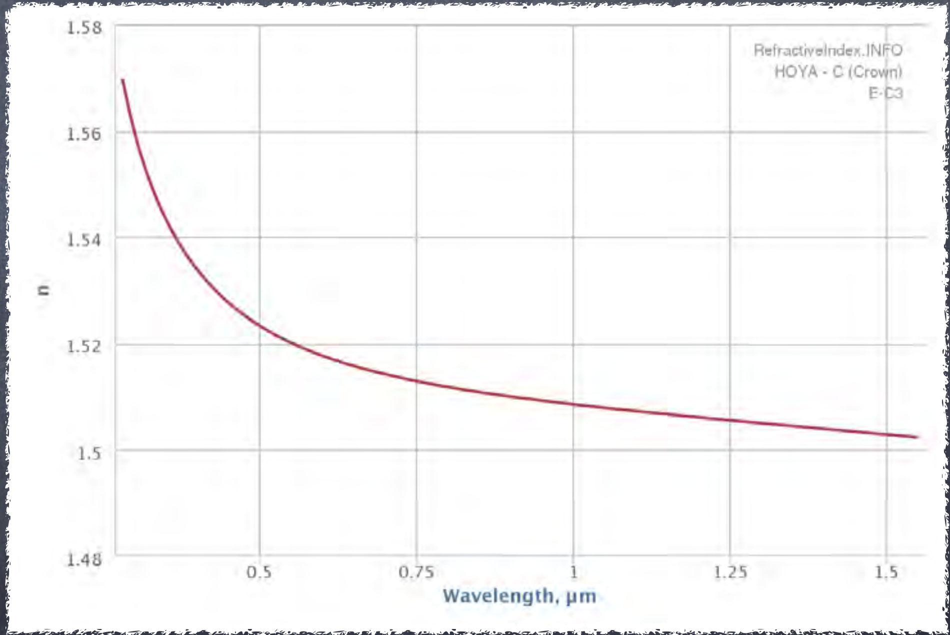
- Índice de refração depende do comprimento de onda da luz

- Este efeito deve estar presente em lentes também!

índice de refração

- Conceito de dispersão ótica
  - Variação do índice de refração com comprimento de onda

$$\frac{dn}{d\lambda}$$

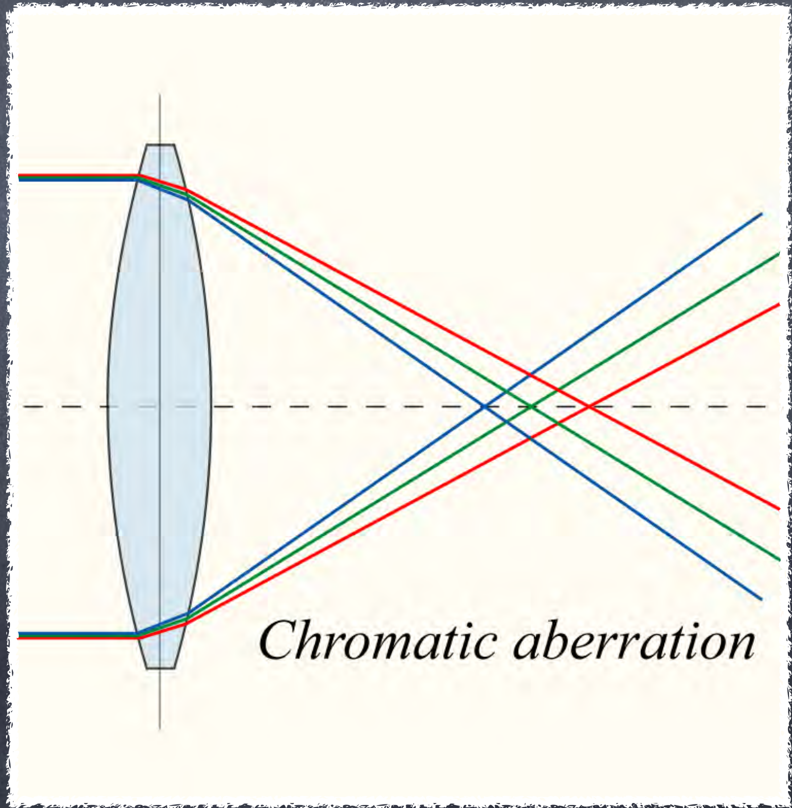


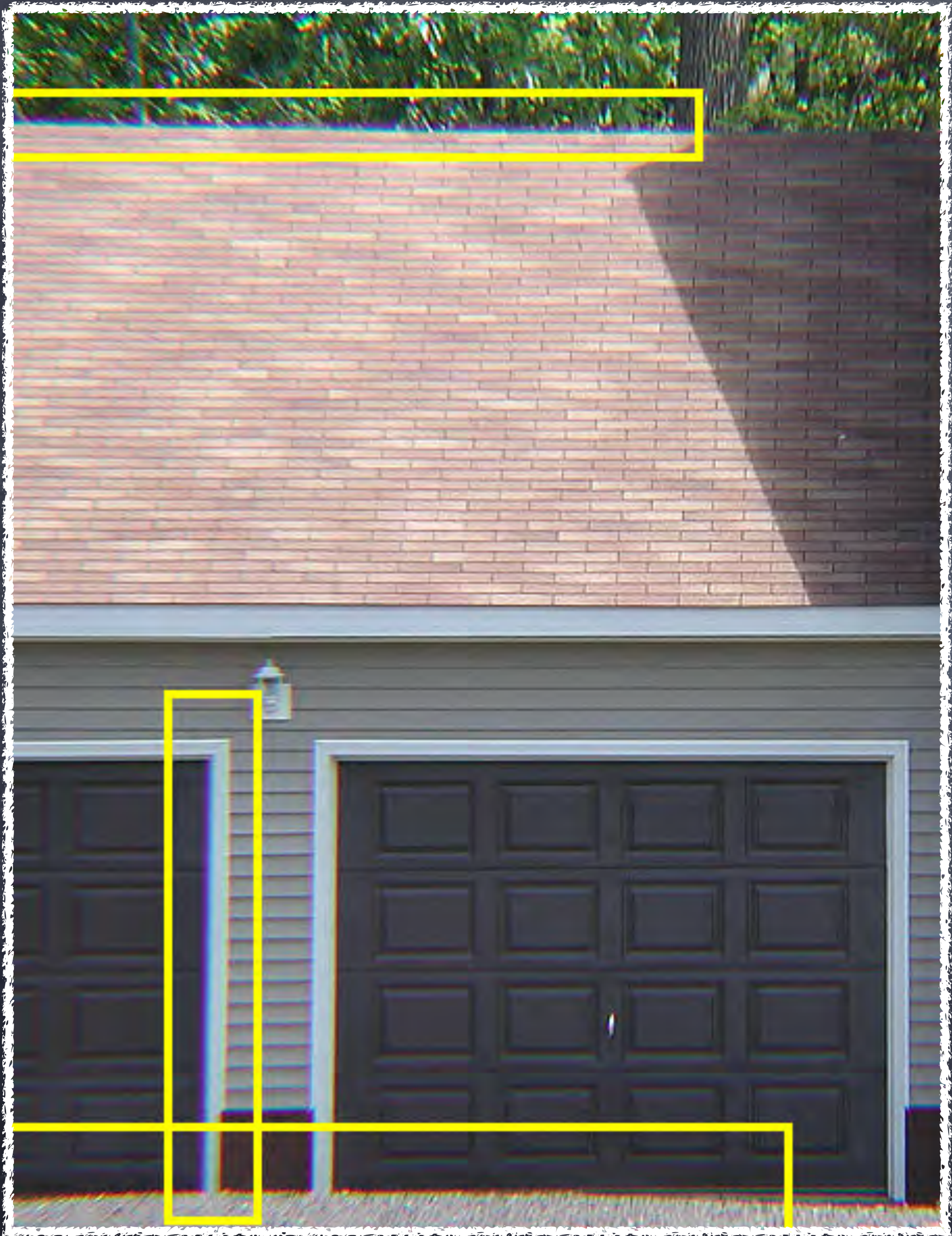
- Em geral encontram-se fórmulas empíricas para descrever curva ao lado
  - Ex: Eq. de Sellmeier com coeficientes tabelados

$$n^2(\lambda) = 1 + \sum_i \frac{B_i \lambda^2}{\lambda^2 - C_i}$$

Aberração cromática

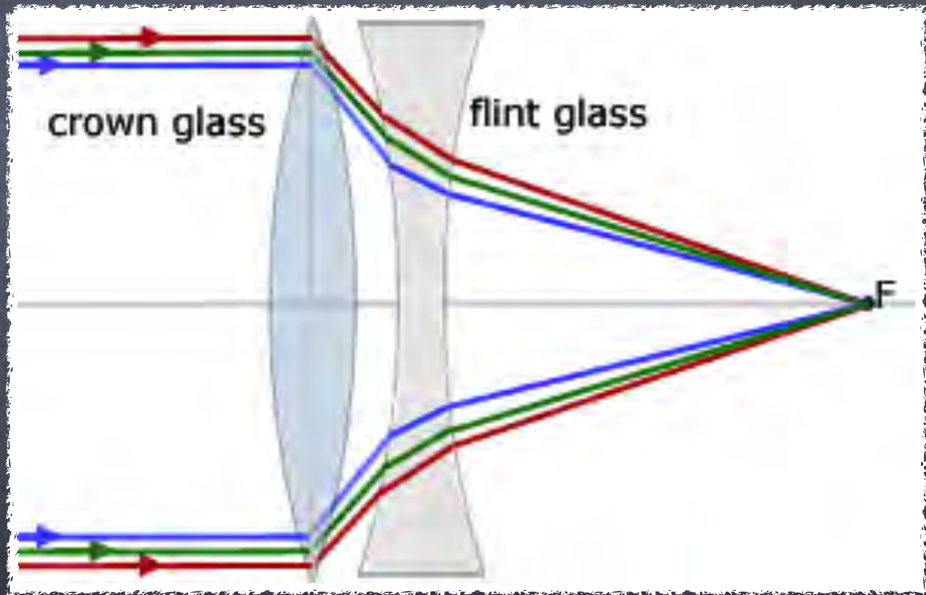
- Distância focal de uma lente varia com o comprimento de onda
- Imagens coloridas não podem ser focalizadas perfeitamente
  - Aberração cromática





Correção da aberração cromática

- Em geral utilizam-se sistemas de lentes de materiais diferentes para minimizar aberrações cromáticas

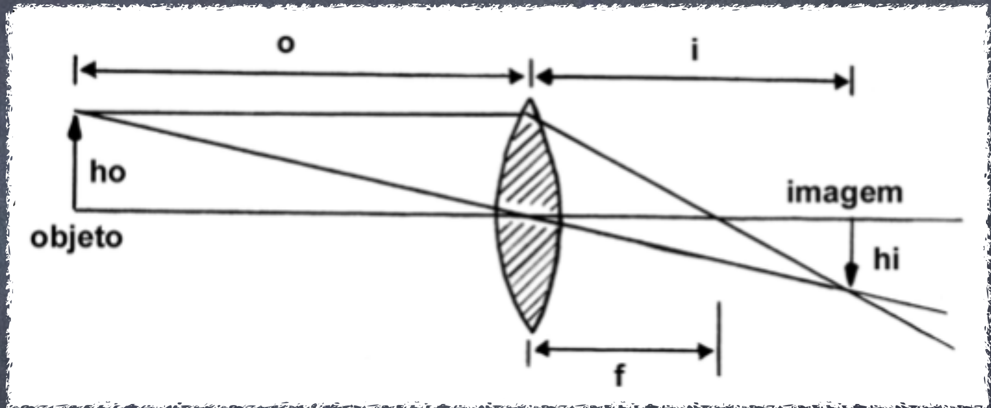


Objetivos da semana

- Estudar como a distância focal da lente convergente usada na semana passada varia com o comprimento de onda
    - vermelho, amarelo, verde e azul.

Arranjo experimental

- O mesmo da semana passada somente com uma lente (a convergente)
- Método do objeto e imagem
  - Cuidado na tomada de dados (ver site)



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o}$$

dados e análise

- Meça posição da imagem para várias posições de objeto para cada cor.
  - É importante medir com cuidado. As distâncias focais de cores diferentes são muito próximas e é necessário ter precisão nas medidas
- Ajuste o modelo adequado para lentes delgadas e obtenha o valor da distância focal para cada cor
- Ver mais detalhes da análise e outros pedidos no site da disciplina

Tarefa pré-lab

- Estimar os valores das distâncias focais para as várias cores que faremos as medidas
  - Ver detalhes de como fazer isto no site da disciplina

Covariância - episódio 2
Mapa de chi 2

Matriz de covariância

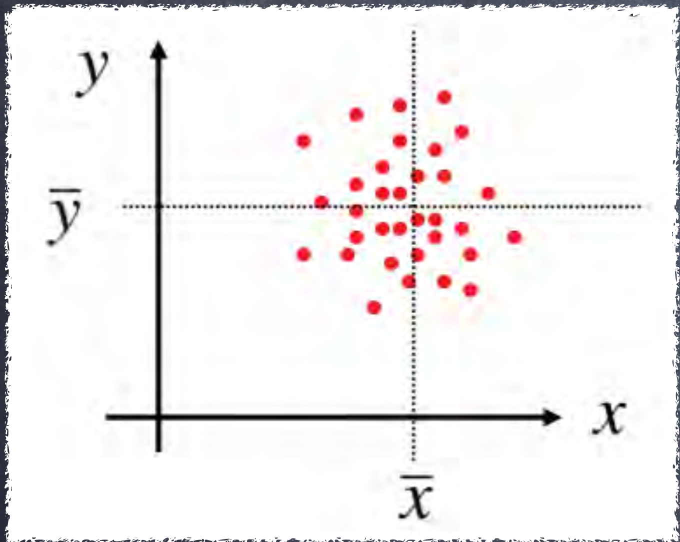
- Esta fórmula geral de propagação de incertezas pode ser escrita em uma forma matricial do tipo

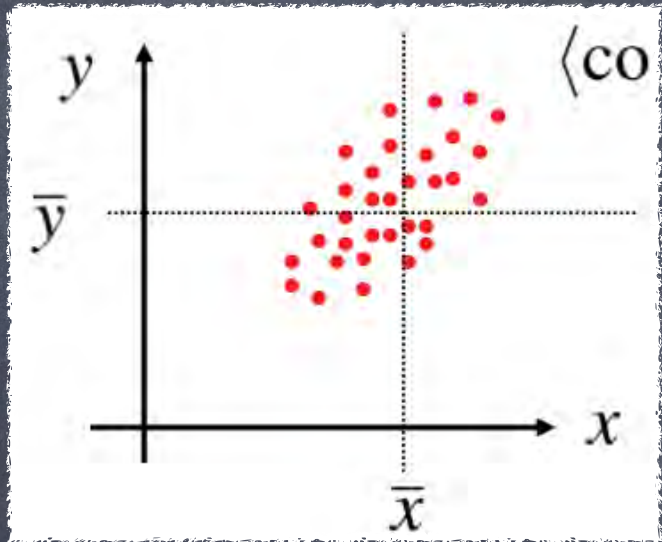
$$\boxed{\sigma_y^2 = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}\mathbf{T}}$$

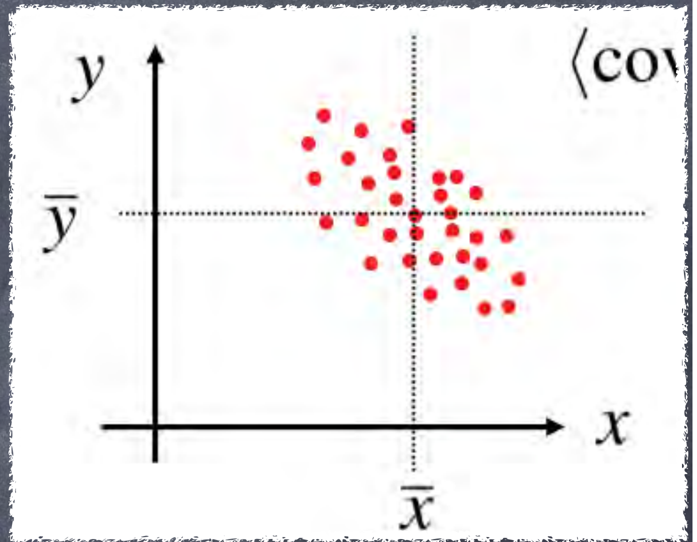
$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix} \text{ com } \partial_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & cov_{12} & \cdots & cov_{1n} \\ cov_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & cov_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov_{n1} & cov_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{\Sigma}$ é chamada de matriz de covariância

Covariância e correlação





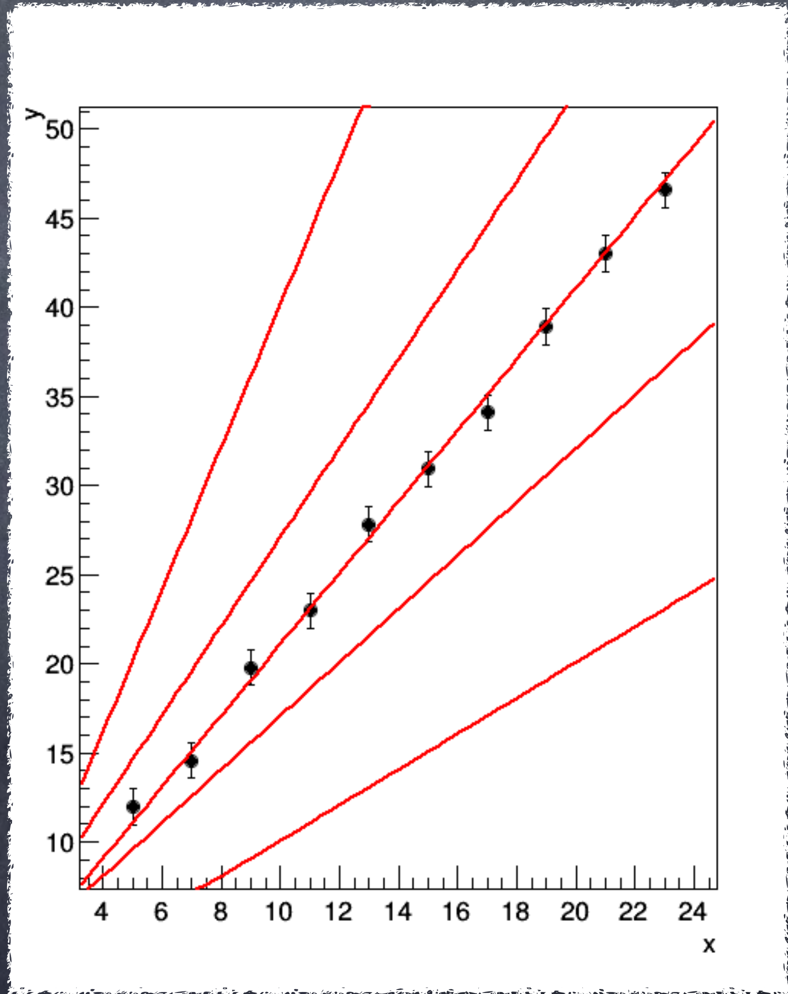


$cov_{xy} = 0$ $\qquad$ $cov_{xy} > 0$ $\qquad$ $cov_{xy} < 0$

$$\rho_{xy} = \frac{cov_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \qquad -1 \leq \rho_{xy} \leq 1$$

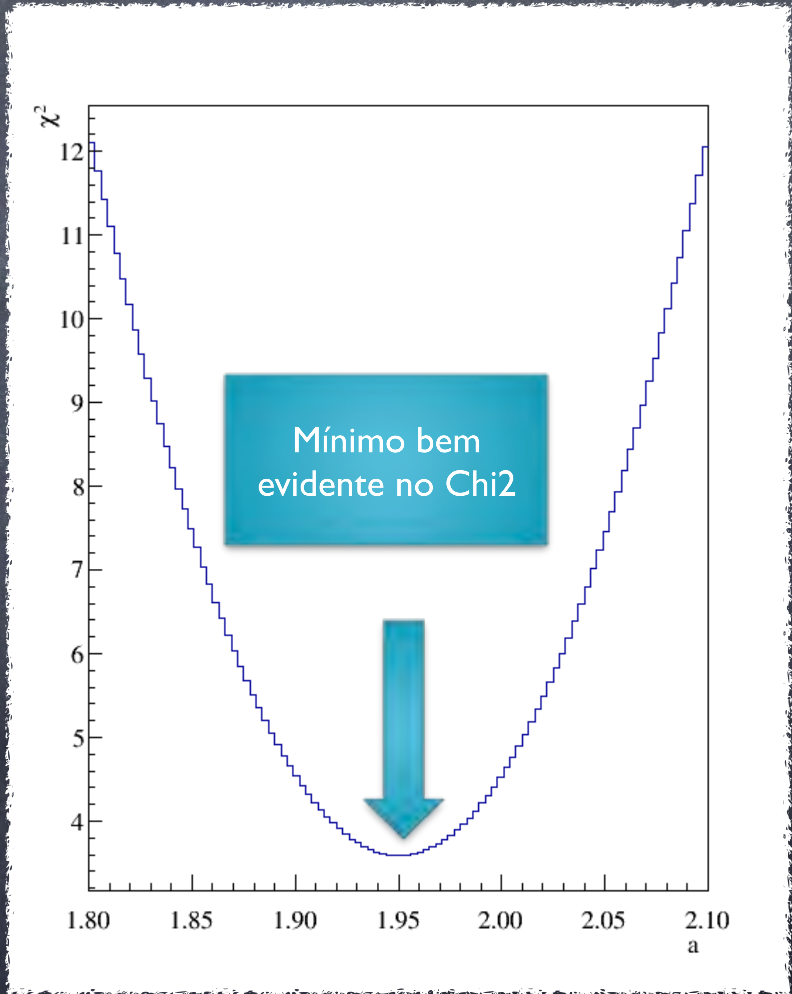
Mapas de chi2

- Método dos mínimos quadrados
  - Maximizar a probabilidade da função descrever os dados = minimizar o chi2



Mapas de chi2

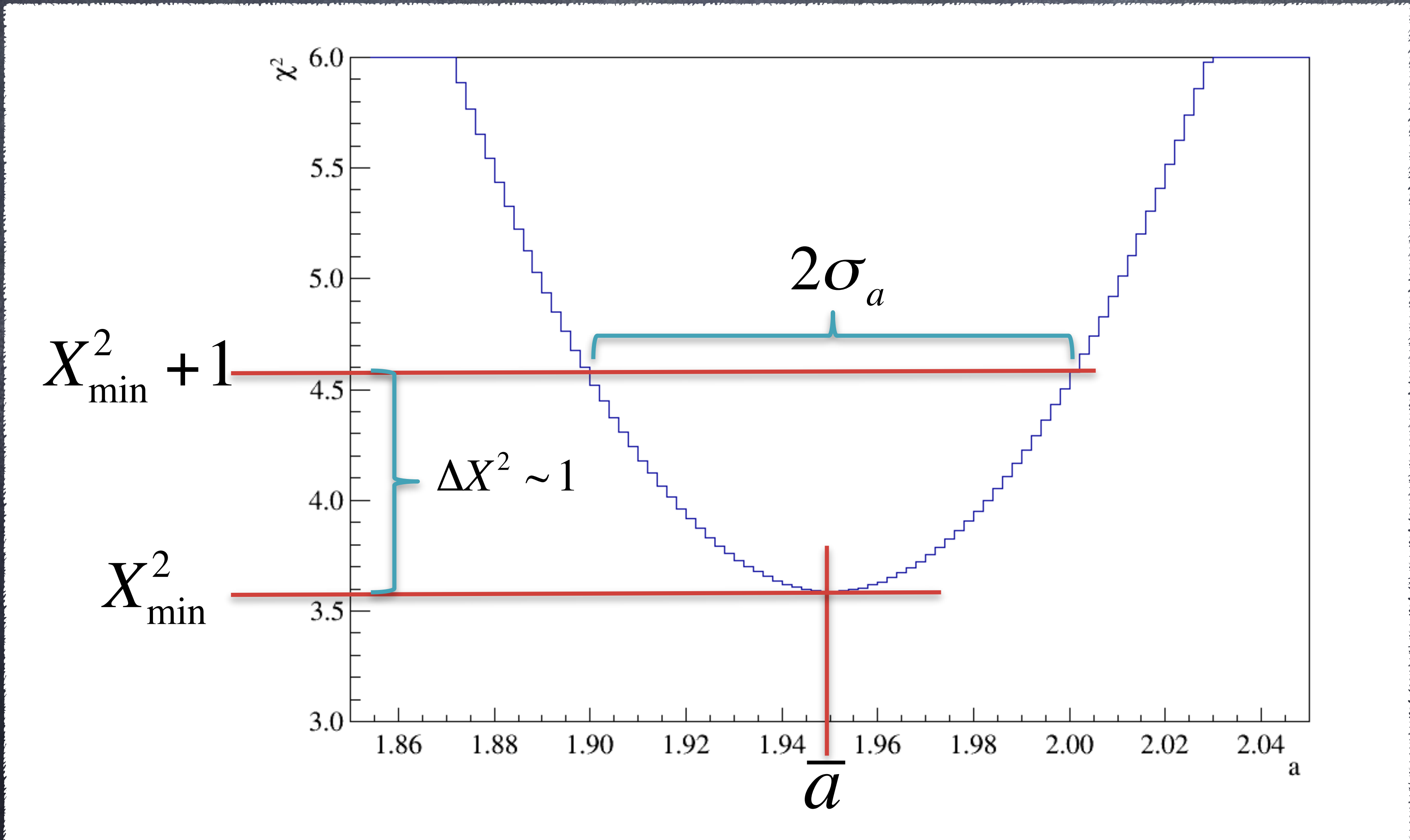
- Método dos mínimos quadrados
  - Maximizar a probabilidade da função descrever os dados = minimizar o chi2



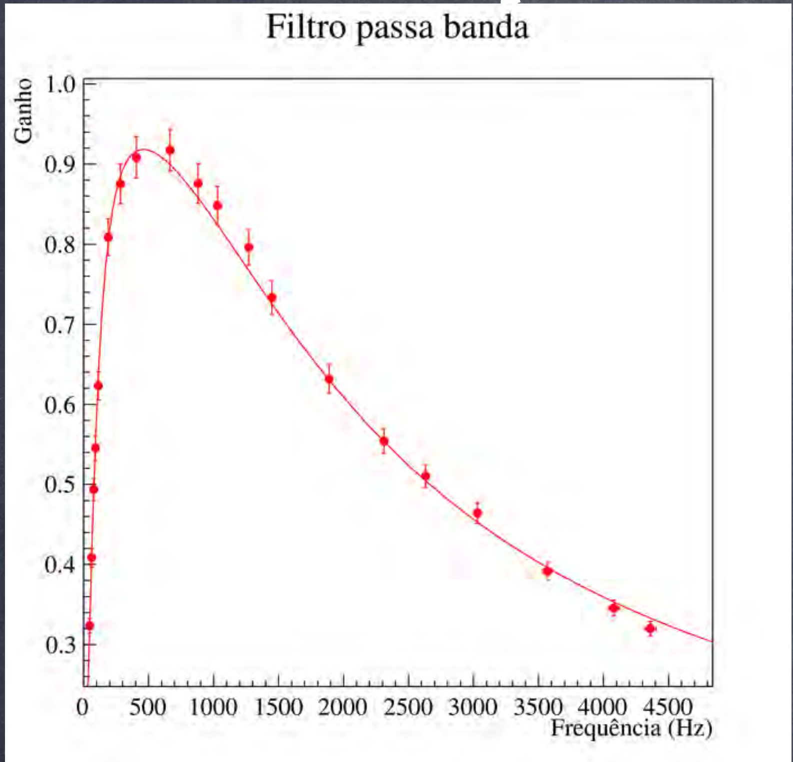
Incerteza no parâmetro ajustado

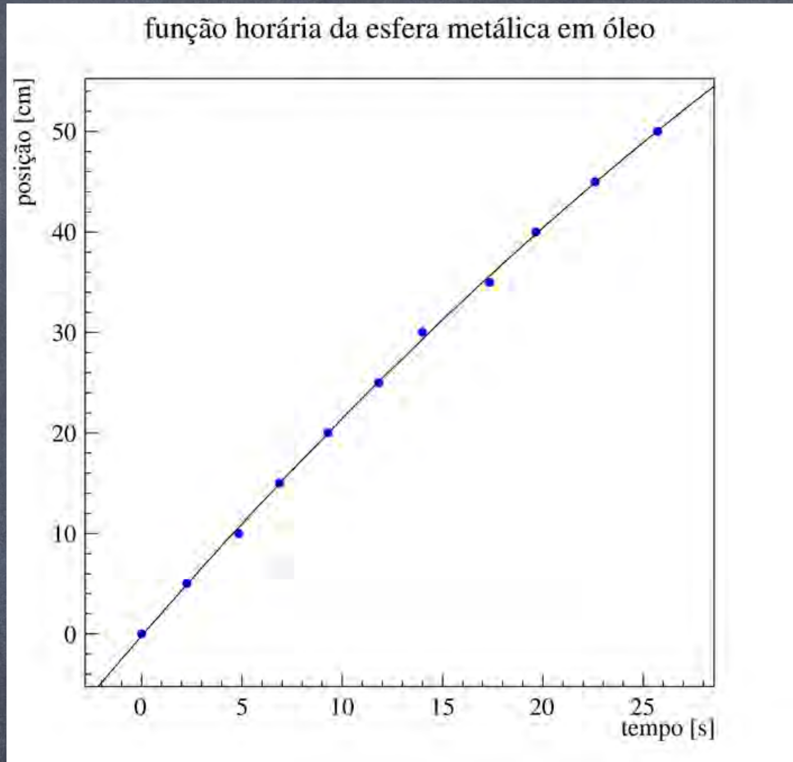
ver Física Exp. III

http://sampa.if.usp.br/~suaide/blog/files/aula07_2.pdf



Mapas de chi2 2D





Resultados do ajuste

Número de parâmetros	2
Chi^2	8.48087
Número de graus de liberdade	18

parâmetro	Valor	Incerteza
0	137.519	2.29791
1	1541	20.2911

Matriz de covariância

$$\begin{bmatrix} 5.28038 & 0.814965 \\ 0.814965 & 411.73 \end{bmatrix}$$

Resultados do ajuste

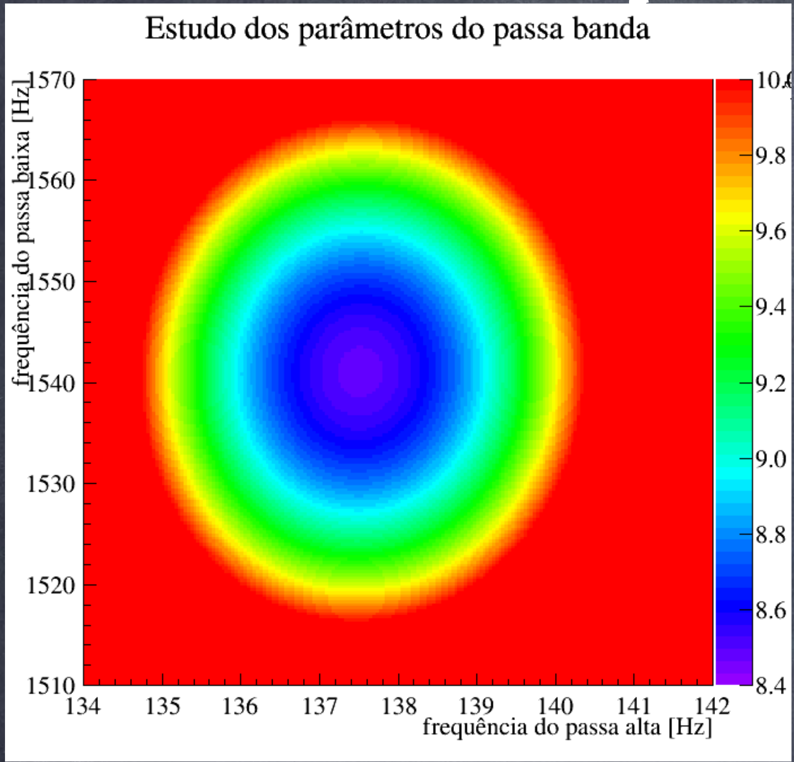
Número de parâmetros	3
Chi^2	6.77906
Número de graus de liberdade	8

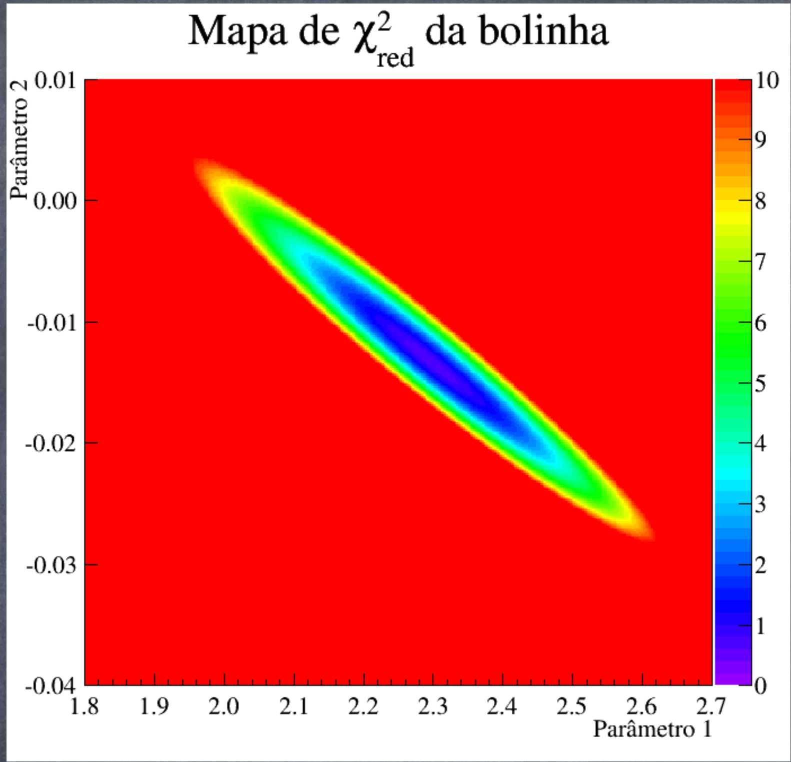
parâmetro	Valor	Incerteza
0	-0.216646	0.362052
1	2.29752	0.062854
2	-0.0133085	0.00228345

Matriz de covariância

$$\begin{bmatrix} 0.131082 & -0.0190145 & 0.000579051 \\ -0.0190145 & 0.00395063 & -0.000138616 \\ 0.000579051 & -0.000138616 & 5.21416E-06 \end{bmatrix}$$

Mapas de chi2





$$\rho_{01} = \frac{cov_{01}}{\sigma_0 \sigma_1} = 0.02$$

$$\rho_{12} = \frac{cov_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} = -0.96$$

Como extrair a covariância ou correlação entre dois parâmetros do mapa de chi2?

Estudando o mapa de chi2

- Vamos começar com duas grandezas gaussianas, independentes entre si, cada uma com uma variância conhecida. A probabilidade de obtermos, simultaneamente, um determinado valor de a e b é:

$$P(a,b) = P(a)P(b) = \frac{1}{2\pi\sigma_a\sigma_b}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{a-\mu_a}{\sigma_a}\right)^2\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{b-\mu_b}{\sigma_b}\right)^2\right)$$

$$P(a,b) = P(a)P(b) = \frac{1}{2\pi\sigma_a\sigma_b}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{a-\mu_a}{\sigma_a}\right)^2+\left(\frac{b-\mu_b}{\sigma_b}\right)^2\right)\right)$$

Estudando o mapa de chi2

- Ou seja

$$P(a,b) = P(a)P(b) = \frac{1}{2\pi\sigma_a\sigma_b}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{a-\mu_a}{\sigma_a}\right)^2 + \left(\frac{b-\mu_b}{\sigma_b}\right)^2\right)\right)$$

$$P(a,b) = \frac{1}{2\pi\sigma_a\sigma_b}\exp\left(-\frac{1}{2}\chi^2\right)$$

- A probabilidade é máxima quando o chi2 é mínimo

Os contornos no mapa de chi2

- Limites no mapa de chi2

$$1\sigma \rightarrow \chi^2 = \chi^2_{\text{min}} + 1$$

$$2\sigma \rightarrow \chi^2 = \chi^2_{\text{min}} + 4$$

- Podemos desenhar estas linhas

Mapa para duas grandezas independentes

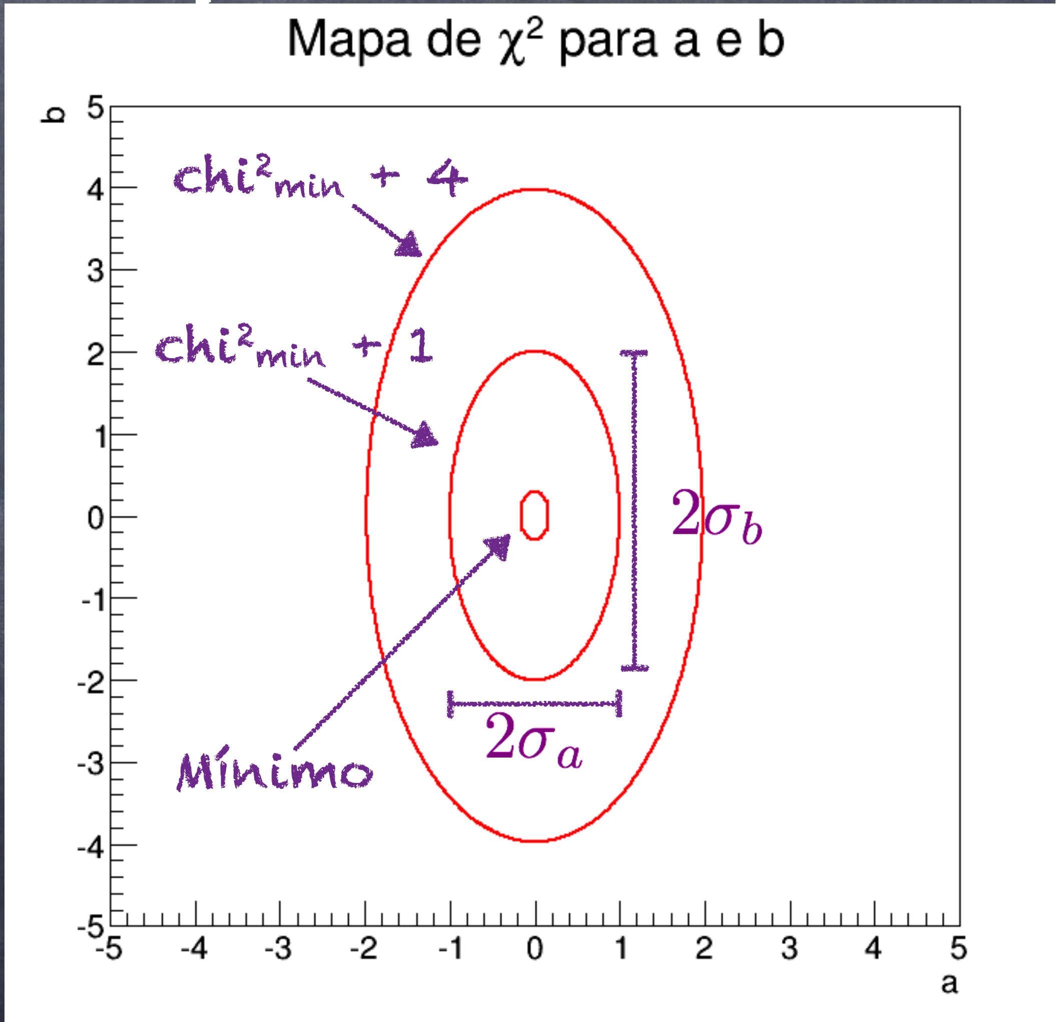
- Assumindo valor médio zero para ambas e

  $\sigma_a = 1$

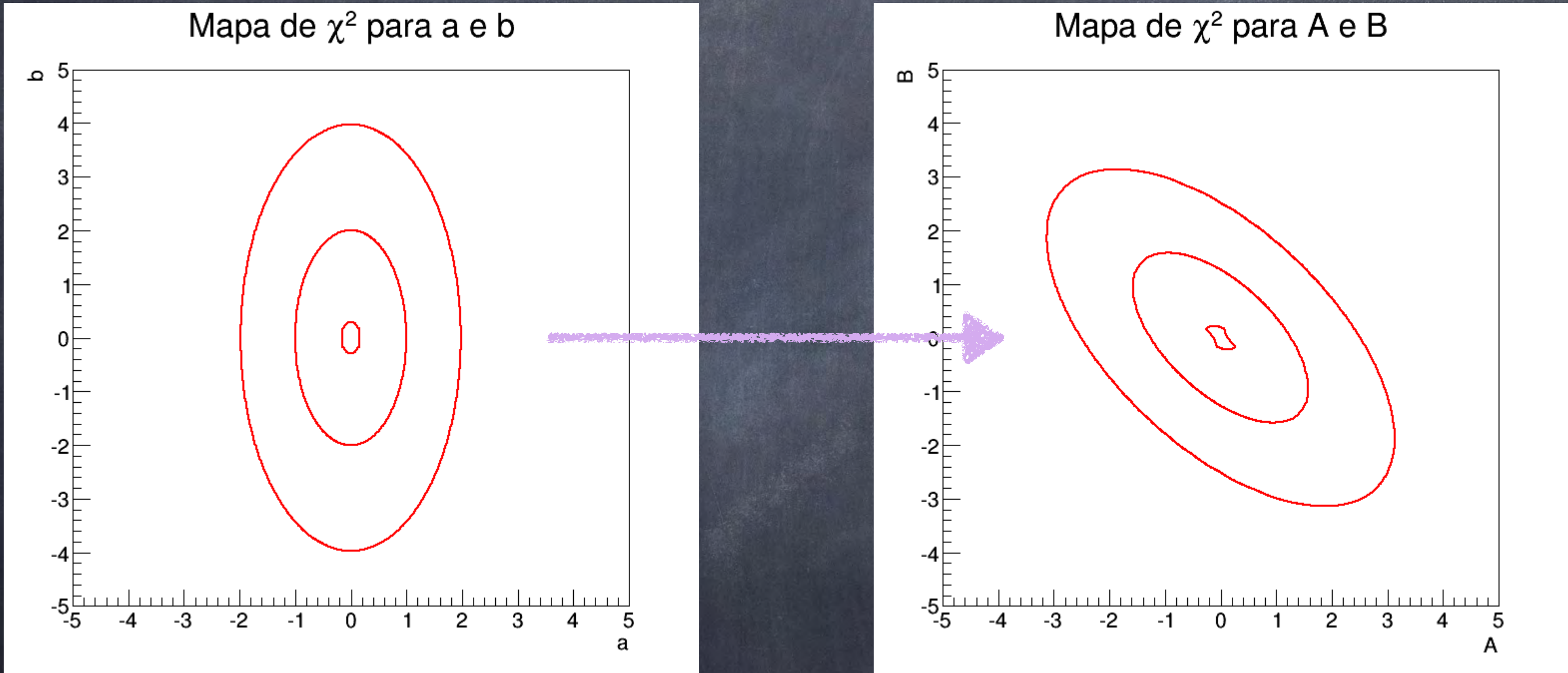
  $\sigma_b = 2$

- Contornos em 1 e 2 sigmas

$$P(a,b) = \frac{1}{2\pi\sigma_a\sigma_b}\exp\left(-\frac{1}{2}\chi^2\right)$$

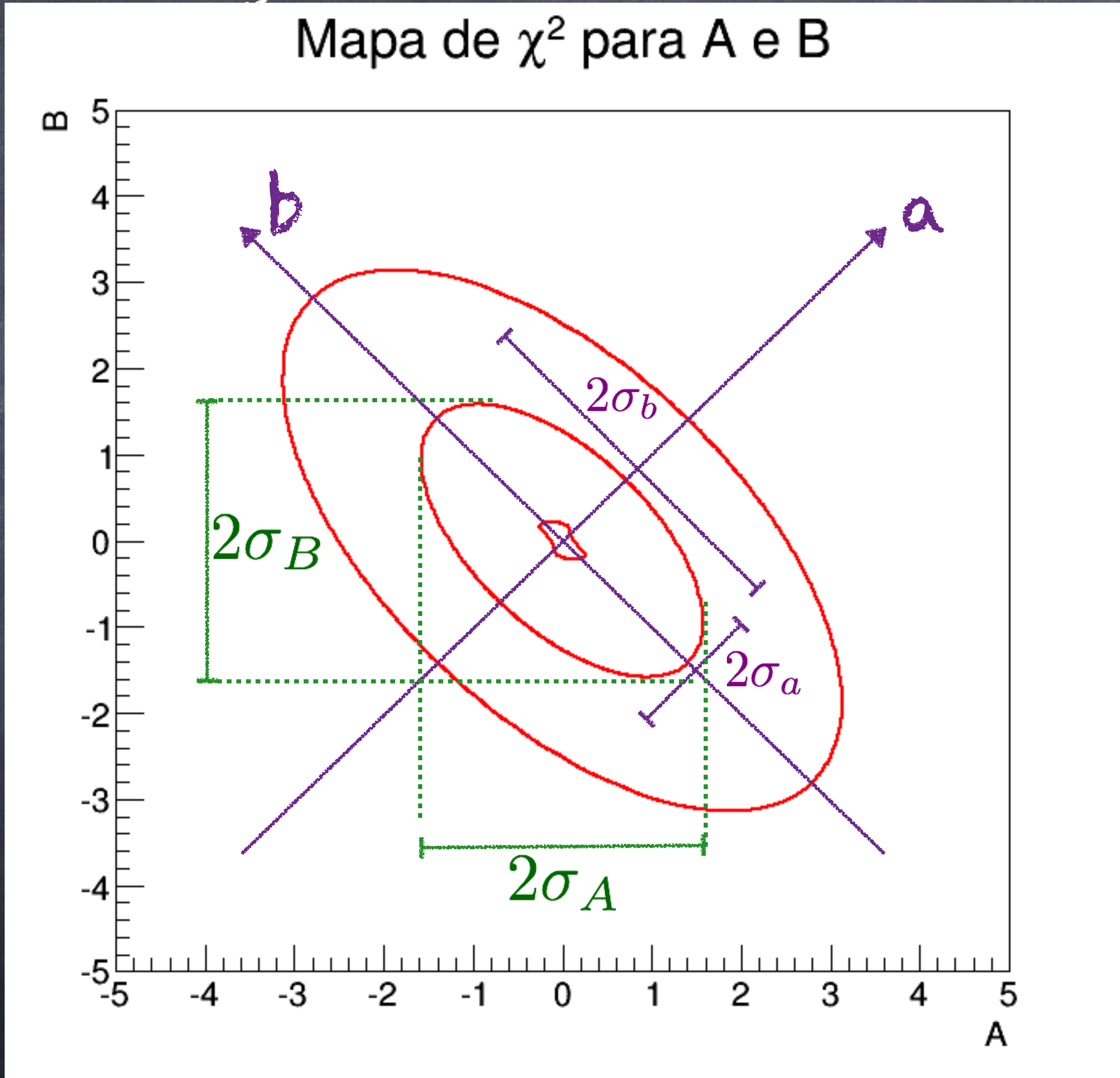


Introduzir covariância significa girar estas elipses



$$a, b \rightarrow A, B$$

Relação de A,B com a,b



Muito bem...

- Como eu matematizo esta rotação?
- Como eu extraio as relações entre as incertezas e as covariâncias?

Girando uma elipse

- Rotação de um ângulo teta

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

- Simplificando a notação

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$A = ca + sb \ , \ B = -sa + cb$$

Calculando a covariância entre A e B

- Calculando a covariância

$$cov_{AB} = \langle (A - \mu_A)(B - \mu_B) \rangle = \langle AB \rangle$$

$$cov_{AB} = \langle (ca + sb)(-sa + cb) \rangle$$

$$cov_{AB} = \langle scb^2 - sca^2 + (c^2 - s^2)ab \rangle$$

- Como a e b são independentes

$$cov_{AB} = sc(\sigma_b^2 - \sigma_a^2)$$

Calculando a covariância entre A e B

- Escrevendo a covariância em termos do coeficiente de correlação

$$\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B = sc(\sigma_b^2 - \sigma_a^2)$$

- Como eliminar a dependência com o ângulo?
  - Podemos calcular as variâncias de A e B

Calculando variâncias

- Da definição

$$\sigma_A^2 = \langle (A - \mu_A)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle$$
$$\sigma_A^2 = \langle (ca + sb)^2 \rangle$$
$$\sigma_A^2 = \langle c^2 a^2 + s^2 b^2 + 2csab \rangle$$

- Como a e b não possuem covariância

$$\sigma_A^2 = c^2 \sigma_a^2 + s^2 \sigma_b^2$$

- Similarmente para B

$$\sigma_B^2 = s^2 \sigma_a^2 + c^2 \sigma_b^2$$

Sendo assim

- Calculando o produto das variâncias

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 = s^2c^2(\sigma_a^4 + \sigma_b^4) + (c^4 + s^4)\sigma_a^2\sigma_b^2$$

- Comparando ao quadrado de

$$\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B = sc(\sigma_b^2 - \sigma_a^2)$$

- Com pouca álgebra, chega-se à

$$\rho_{AB}^2 = 1 - \left(\frac{\sigma_a\sigma_b}{\sigma_A\sigma_B}\right)^2$$

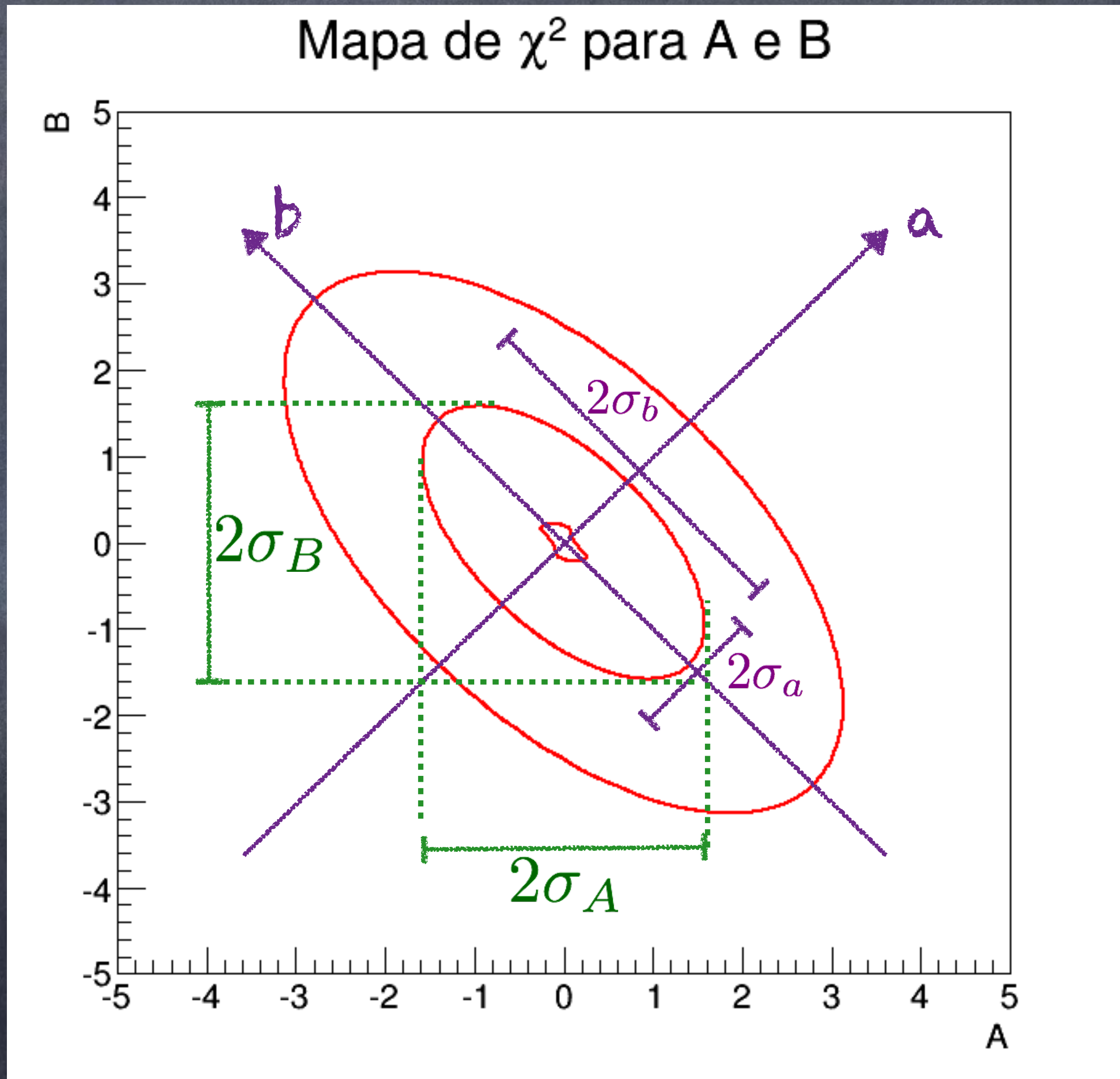
Em resumo...

$$A = ca + sb\ ,\ B = -sa + cb$$

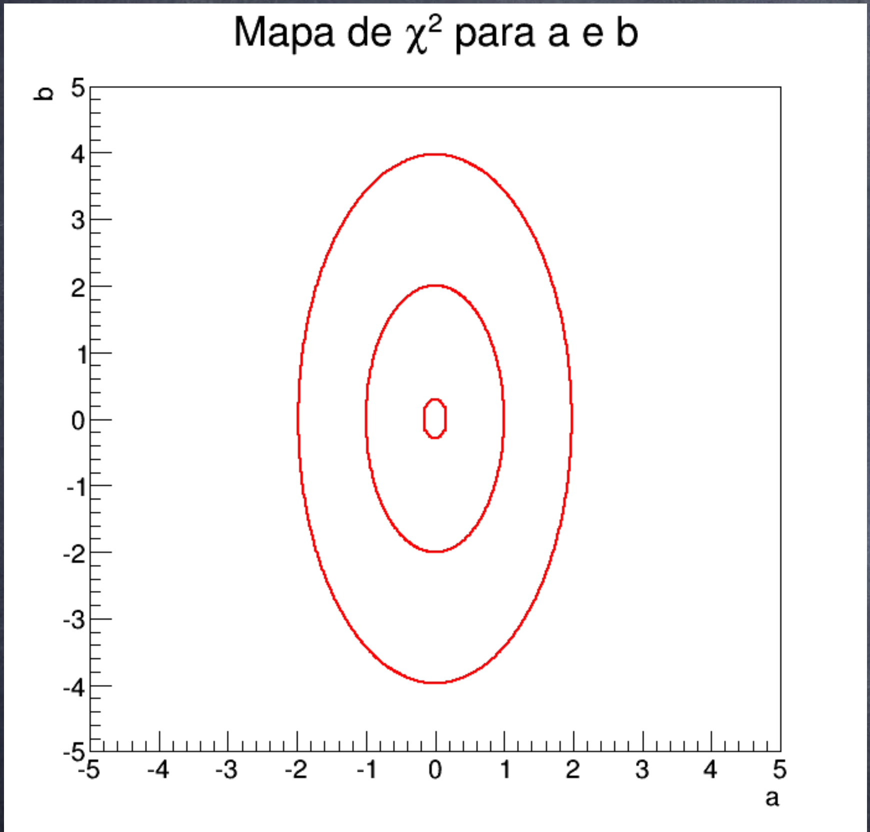
$$\sigma_A^2 = c^2\sigma_a^2 + s^2\sigma_b^2$$

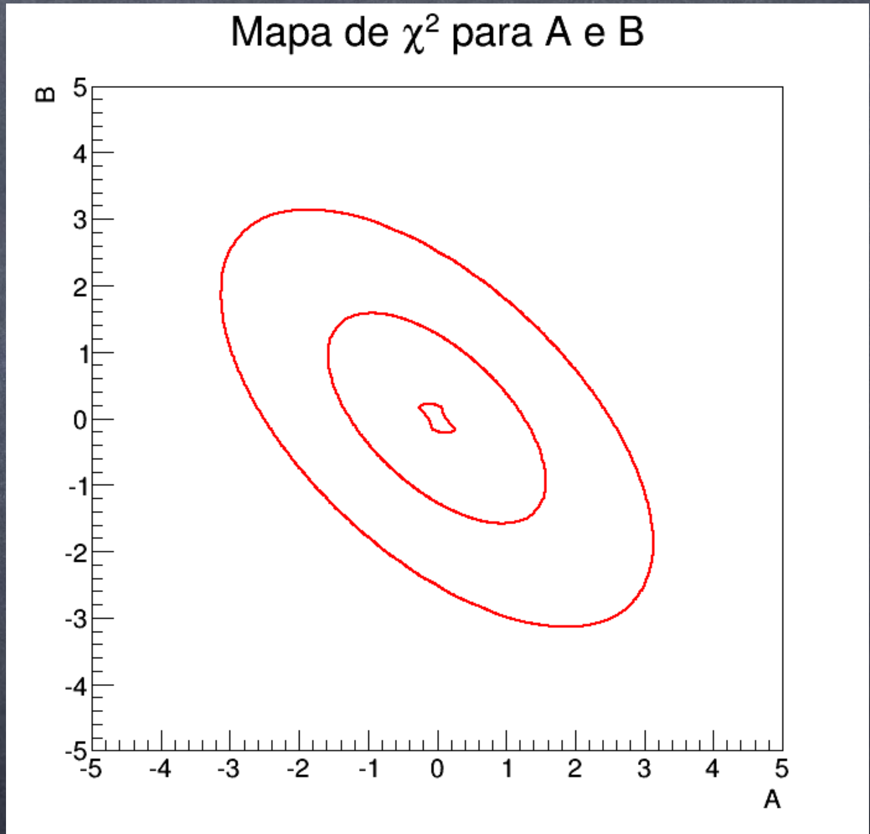
$$\sigma_B^2 = s^2\sigma_a^2 + c^2\sigma_b^2$$

$$\rho_{AB}^2 = 1 - \left(\frac{\sigma_a\sigma_b}{\sigma_A\sigma_B}\right)^2$$



Como descrever as curvas de chi2 com covariância?





$$P(a,b) = \frac{1}{2\pi\sigma_a\sigma_b}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{a}{\sigma_a}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sigma_b}\right)^2\right)\right)$$

$$P(A,B) = ?$$

Descrevendo P(A,B)

- Começamos escrevendo a e b em função de A e B

$$a = cA - sB \ , \ b = sA + cB$$

- Substituimos em

$$P(a,b) = \frac{1}{2\pi\sigma_a\sigma_b}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{a}{\sigma_a}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sigma_b}\right)^2\right)\right)$$

- É necessário que (MOSTRE ISTO)

$$P(a,b)dadb = P(A,B)dAdB$$

Descrevendo P(A,B)

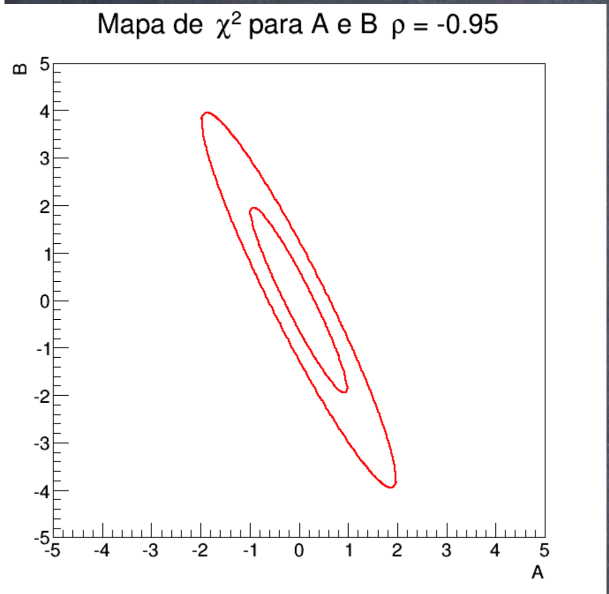
- Com um pouco de algebra e substituindo as relações necessárias entre as variâncias de a,b e A,B

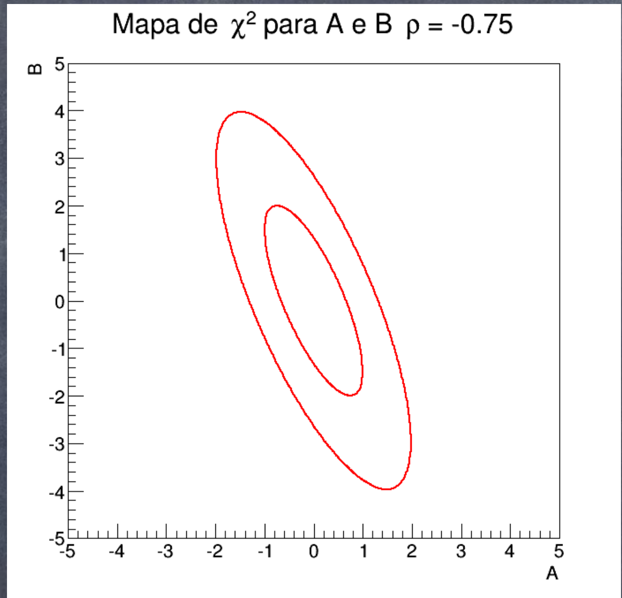
$$P(A,B) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_A\sigma_B}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{A^2}{\sigma_A^2}+\frac{B^2}{\sigma_B^2}-\frac{2\rho AB}{\sigma_A\sigma_B}\right)\right)$$

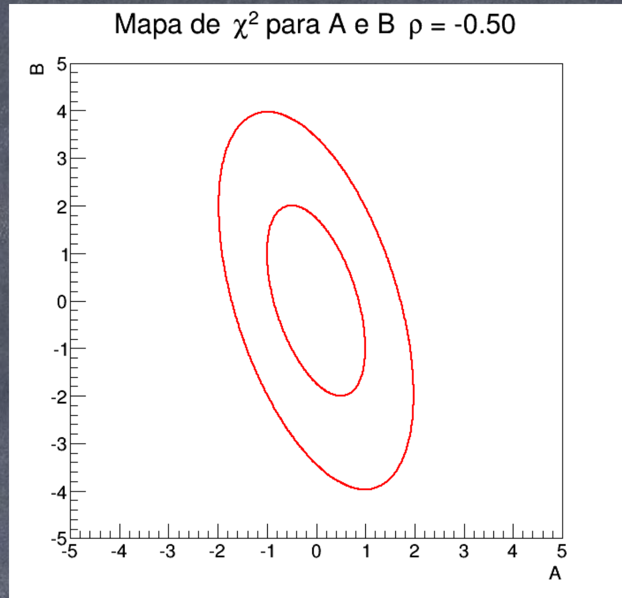
- Note que, se a correlação for nula, voltamos à expressão para duas grandezas independentes

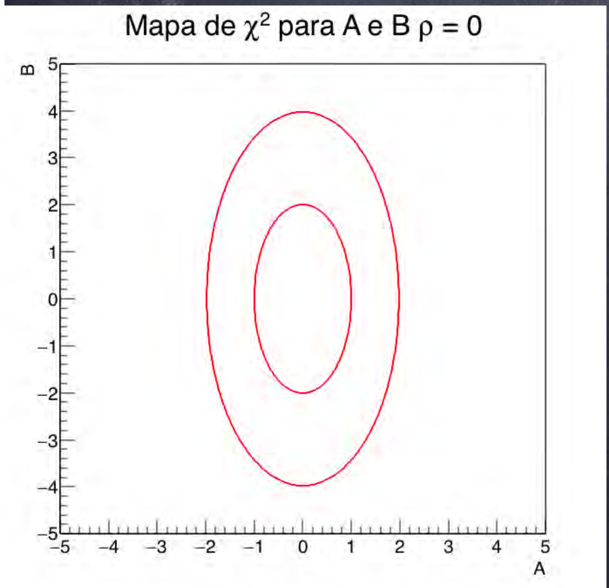
Algumas curvas

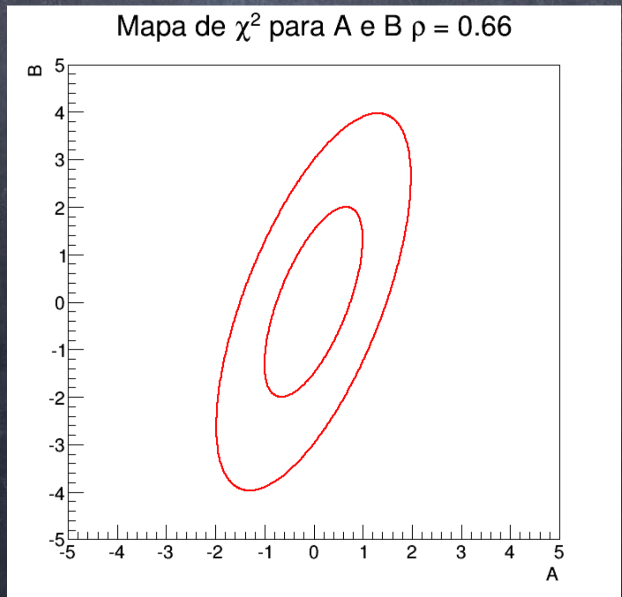
$$\sigma_A = 1 \, , \sigma_B = 2$$

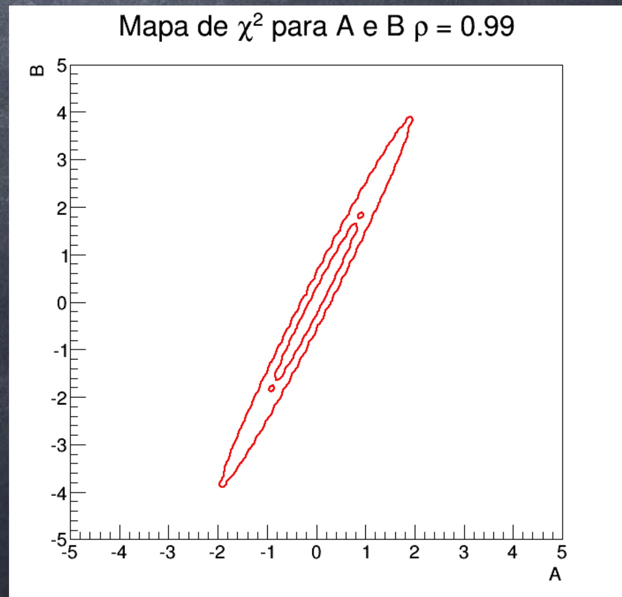






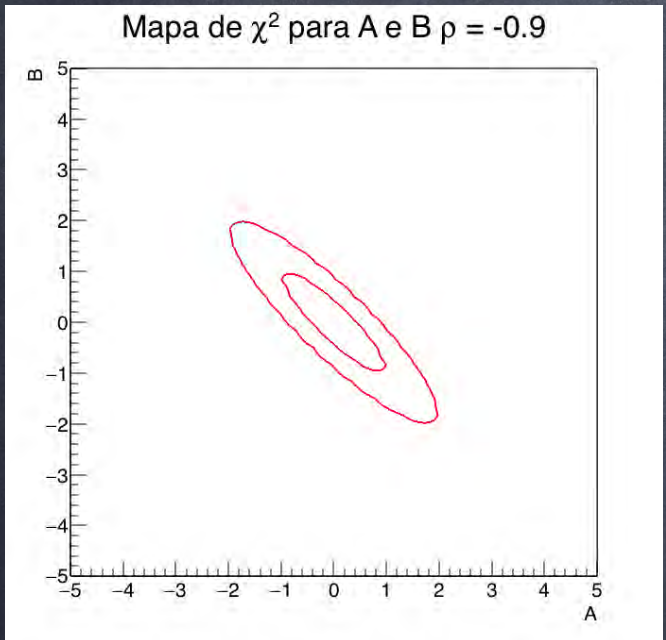


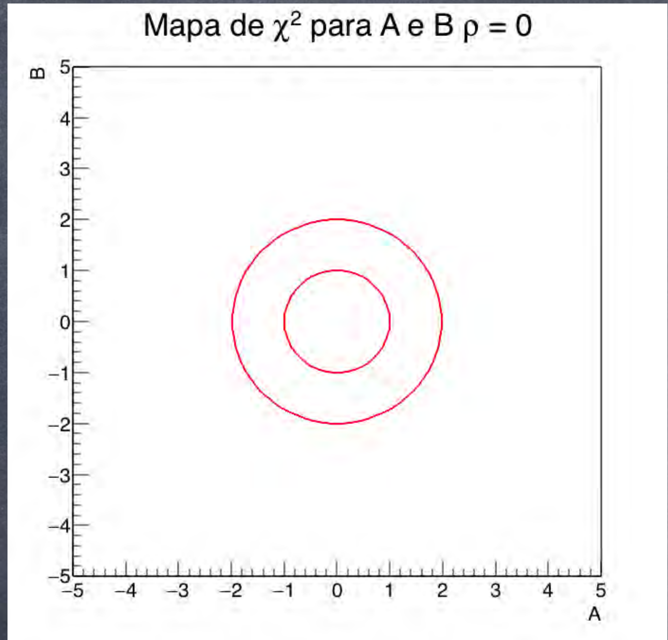


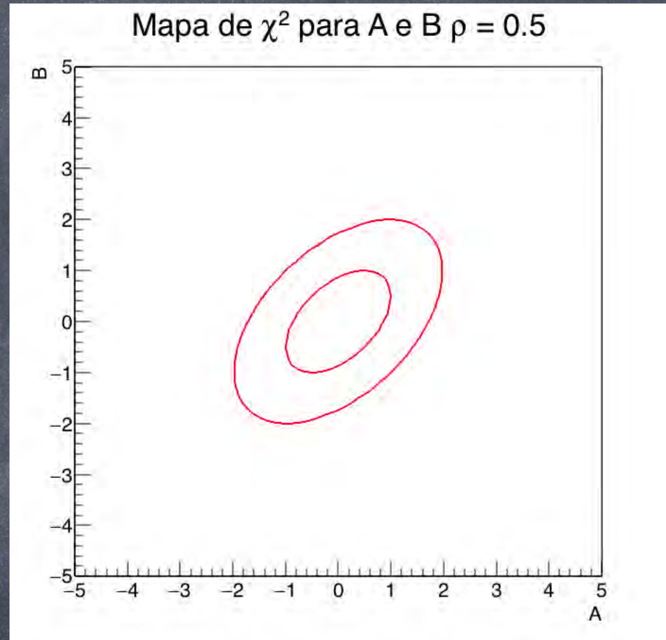


Algumas curvas

$$\sigma_A = \sigma_B = 1$$







- Incertezas iguais não significa falta de correlação –> preste atenção nisto

Alguns comentários

- Introduzir correlações entre duas grandezas significar "girar" uma curva de chi2.
  - Sempre podemos redefinir variáveis de modo a eliminar correlações entre elas
- Do mapa de chi2 é possível extrair a correlação entre duas grandezas "geometricamente"