Experimento I

Ótica geométrica

A. Suaide
Aeroporto do México, 2015

Objetivos do experimento

- Explorar fenômenos de reflexão e refração do ponto de vista da óptica geométrica
  - Noções de ótica geométrica
  - Estudo de lentes delgadas e espessas

Cronograma

- 4 semanas
  - Semana 1
    - Lentes delgadas
  - Semana 2
    - Estudo de aberrações cromáticas em lentes
  - Semana 3
    - Lentes espessas
    - Lei de Snell
  - Semana 4
    - Algumas análises com dados tomados anteriormente

IMPORTANTE!

- Muitas atividades são feitas através da comparação dos resultados de toda a turma
- Banco de dados no site da disciplina
    - Grupos DEVEM fazer upload de resultados no site.
    - A data máxima para upload é o INÍCIO da semana livre.
        - O resultado não precisa ser final

Ótica geométrica

- Luz é uma onda eletromagnética, assim todos os fenômenos ondulatórios se aplicam
  - Interferência, difração, etc.
- Contudo, os efeitos ondulatórios se fazem mais evidentes quando o sistema possui dimensões compatíveis com os comprimentos de onda envolvidos
- A óptica geométrica é uma aproximação para sistemas cujas dimensões são muito maiores que os comprimentos de onda da luz

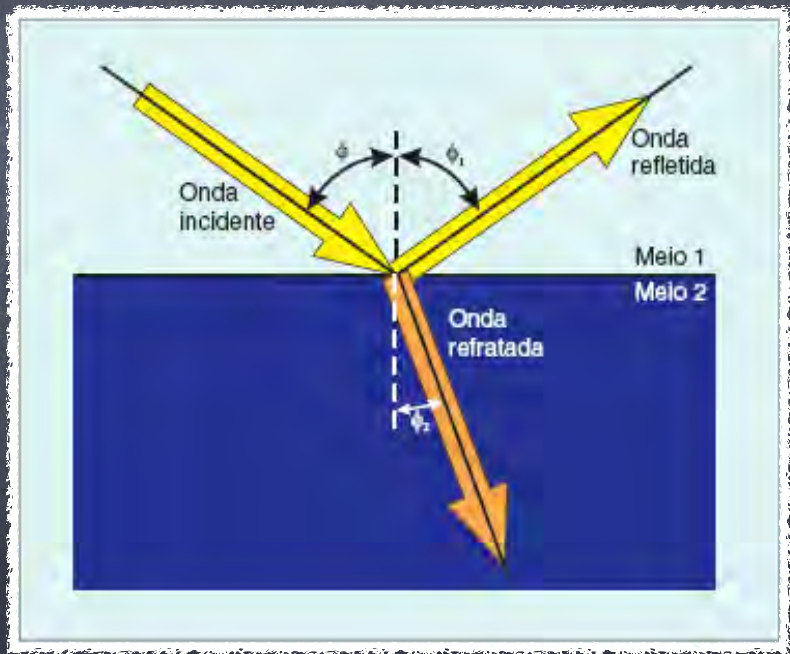
Ótica geométrica

- Os comprimentos de onda típicos da luz visível estão entre 400 a 700 nm.
    - Sistemas macroscópicos simples, do dia a dia, neste caso, possuem dimensões tais que $\lambda/d < 10^{-3}$, ou seja, os efeitos ondulatórios são muito pequenos
- Neste caso, a óptica geométrica é aquela onde:
    - Podemos aproximar a luz por raios luminosos que se propagam de forma retilínea de um ponto a outro e os fenômenos ondulatórios podem ser desprezados.

Propagação de um raio luminoso

- O que acontece quando um raio luminoso atinge uma superfície entre meios de propriedades ópticas diferentes?
  - Reflexão e refração
  - Índice de refração: razão entre a velocidade da luz no vácuo e no meio

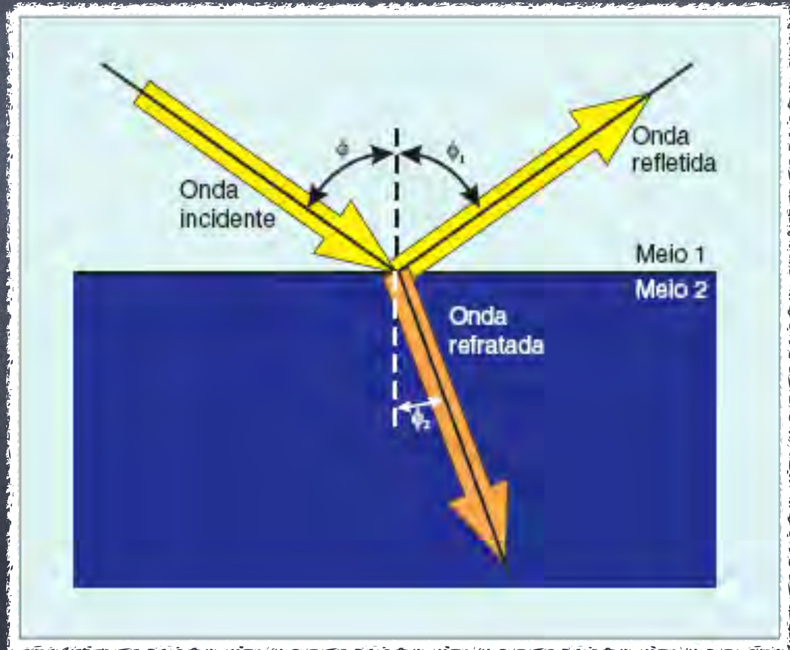
$$n = \frac{c}{v}$$



Propagação de um raio luminoso

- A raio luminoso refratado em uma superfície muda de direção de acordo com a lei de Snell

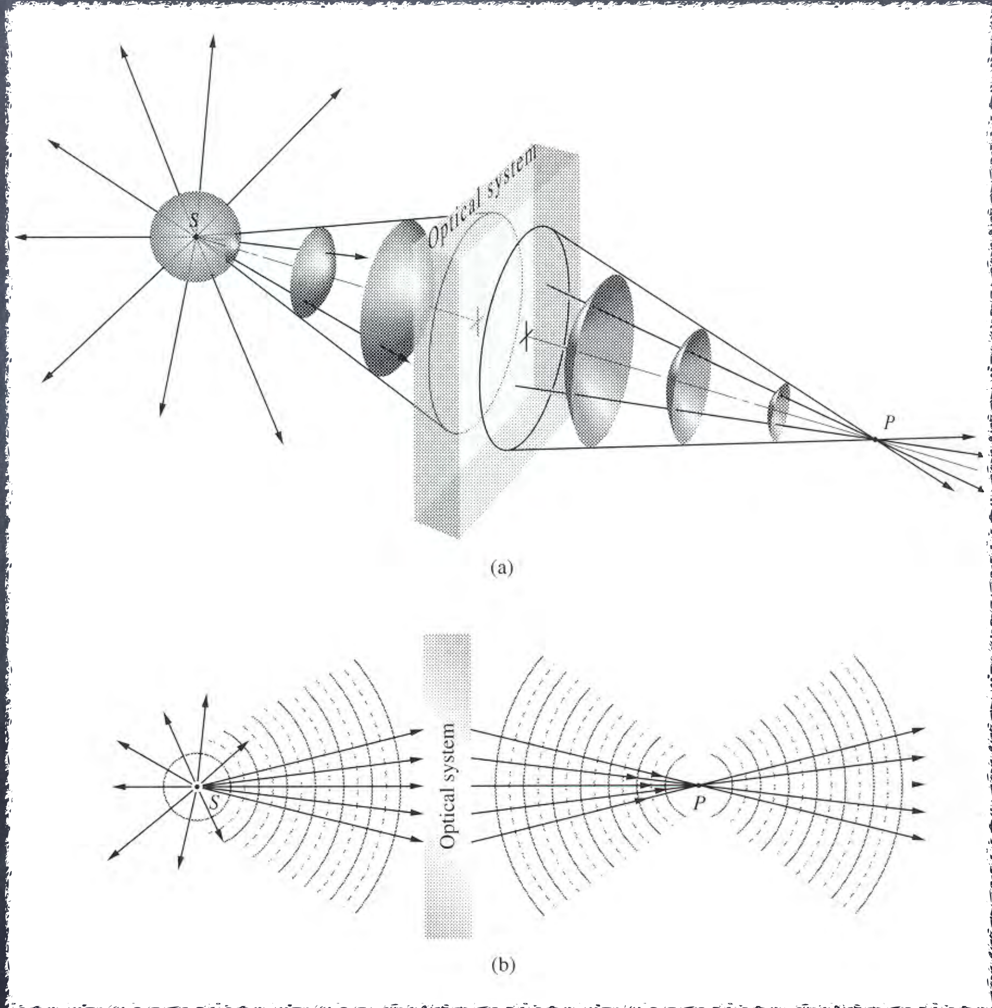
$$n_1 \sin \phi_1 = n_2 \sin \phi_2$$



- Princípio básico para a construção de lentes

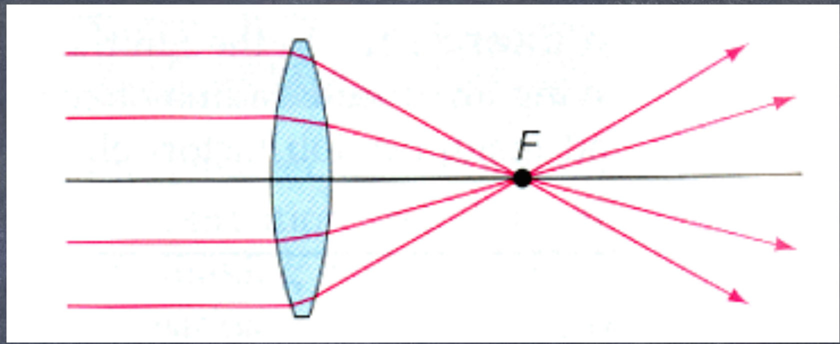
Lentes

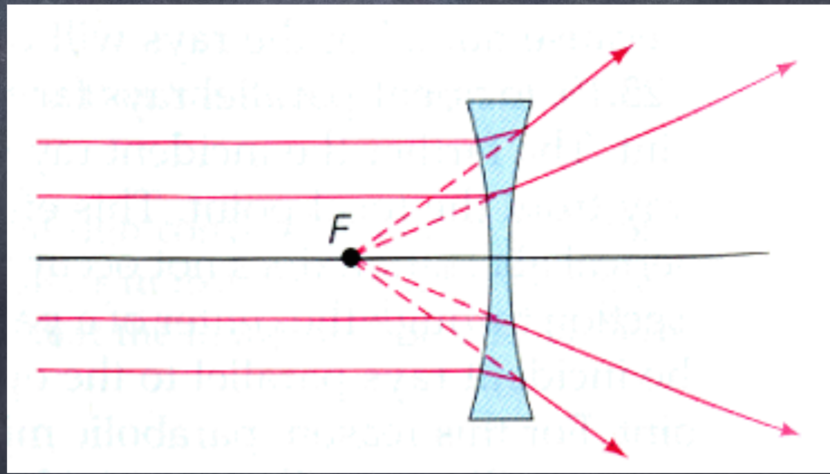
- Sistema refrator imerso em um meio.
- O índice de refração da lente é diferente do meio e o seu formato é construído de forma a alterar a direção dos raios luminosos incidentes



Tipos de lentes

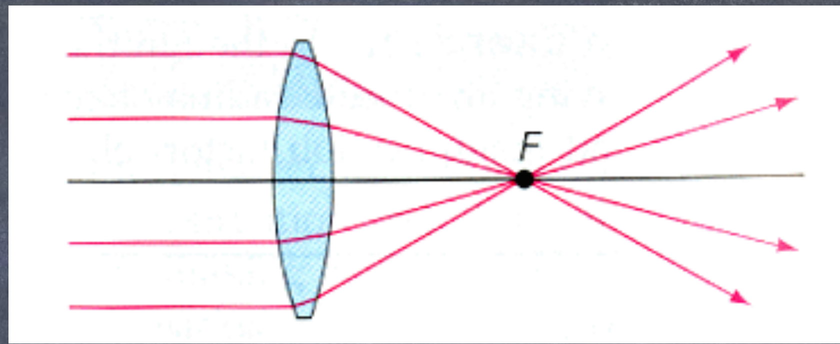
- Lentes podem ser convergentes ou divergentes
  - Convergentes (positivas) aproximam os raios luminosos
  - Divergentes (negativas) afastam os raios luminosos

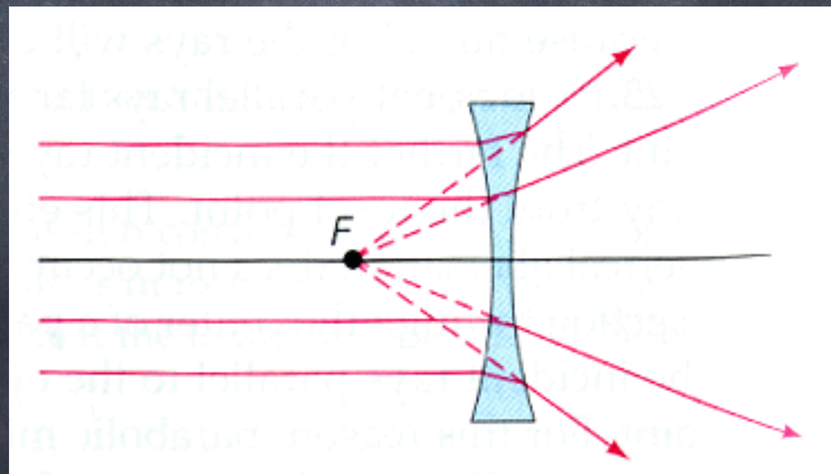




Lentes delgadas

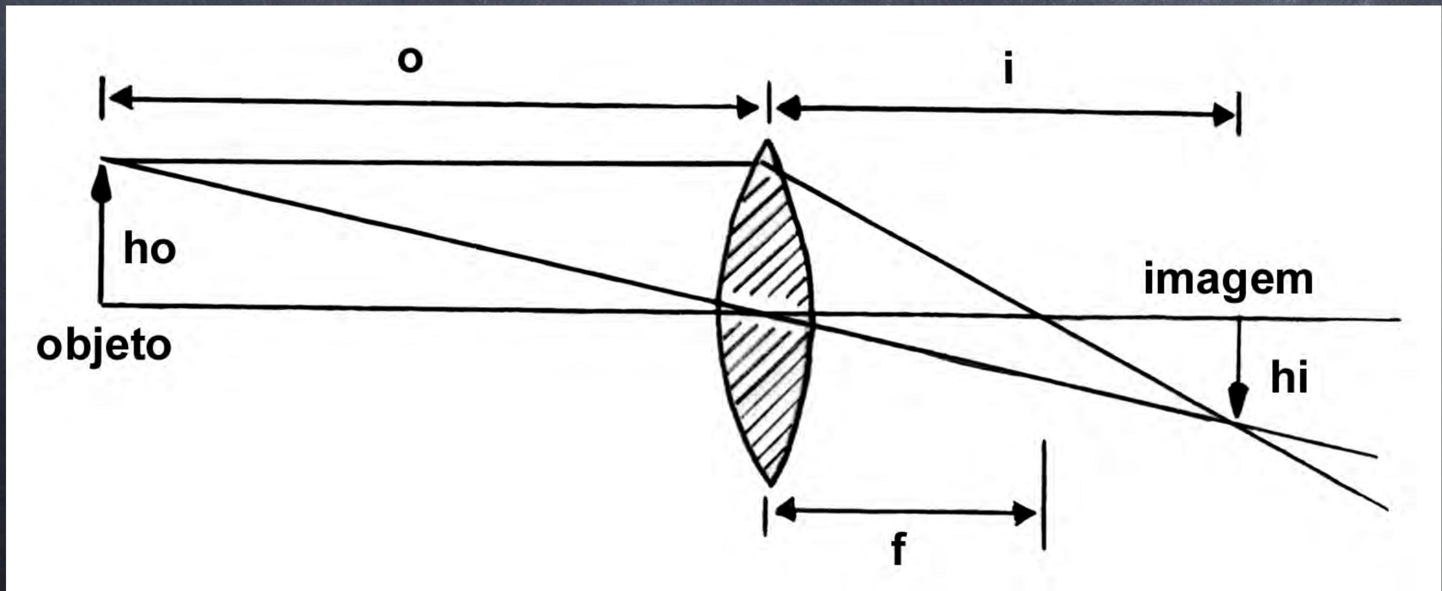
- Toda lente delgada é caracterizada por uma distância focal, única e independente da face que o raio luminoso atinge a lente
- A distância focal (f) é a distância entre o centro da lente e o ponto no qual todos os raios luminosos incidentes paralelos ao eixo da lente convergem (ou divergem)
  - Lentes convergentes: $f > 0$
  - Divergentes: $f < 0$





Algumas definições úteis

- Objeto e imagem de uma lente
  - ho = tamanho do objeto
  - hi = tamanho da imagem
  - o = distância do objeto ao centro da lente
  - i = distância da imagem ao centro da lente
  - f = distância focal da lente



Como calcular a trajetória de um raio luminoso?

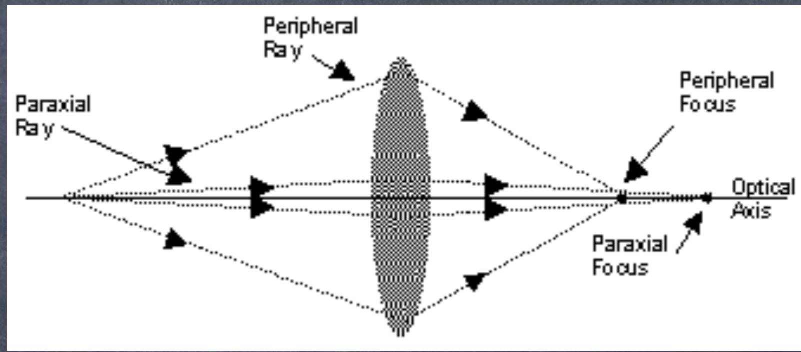
- O cálculo das trajetórias de raios luminosos é bastante complexo e trabalhoso
- Necessita-se saber os ângulos de incidência em cada uma das superfícies, os respectivos índices de refração e as distâncias/formas das superfícies
- Uma técnica utilizada para estes cálculos é o método matricial

Como calcular a trajetória de um raio luminoso?

- Para aplicar o método matricial nos moldes que iremos discutir, é necessário que os raios luminosos sejam paraxiais
- Um raio paraxial é aquele que incide na lente em ângulos pequenos, de tal modo que:

$$\cos\phi \sim 1 \text{ e } \sin\phi \sim \phi$$

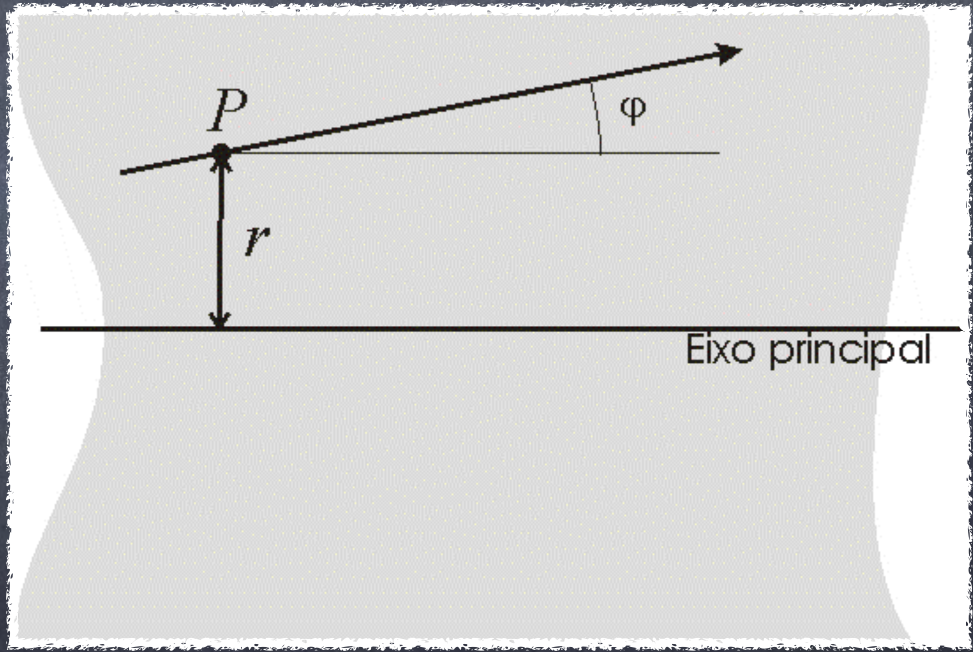
- Razoável, na precisão típica dos nossos experimentos, para $\varphi < 10$
  - $\varphi = 10^{\circ} = 0.17453$ rad
    - $\text{sen}(\varphi) = 0.17365$
    - $\cos(\varphi) = 0.98481$
    - $\tan(\varphi) = 0.17633$



http://www.optics4kids.org/

O método matricial

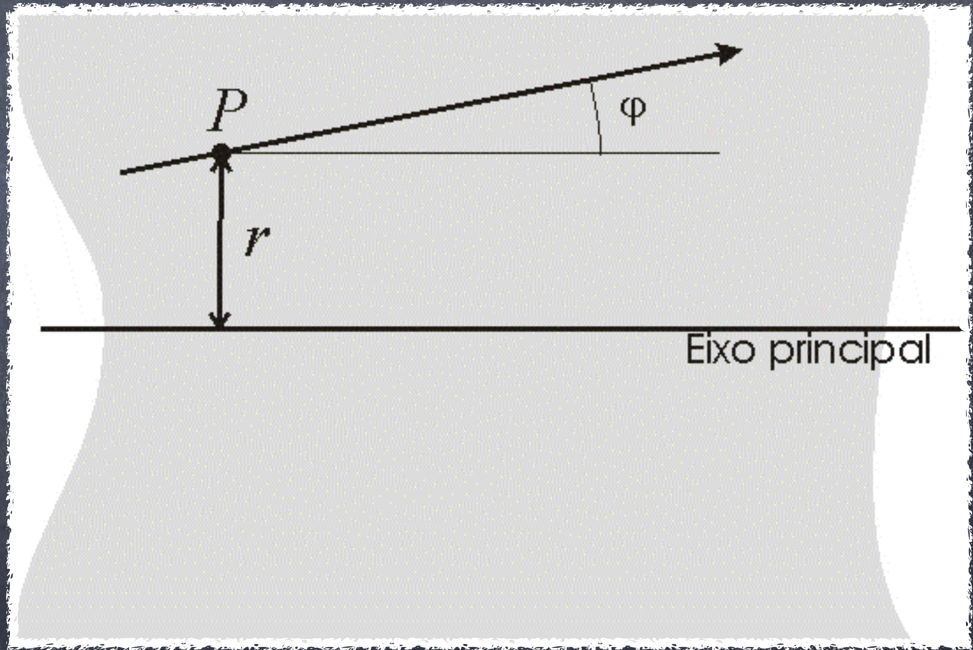
- Seja um raio luminoso R em um meio óptico qualquer. Podemos caracterizar, em qualquer ponto P, este raio luminoso pela distância ao eixo óptico principal e o ângulo com este eixo



O método matricial

- Sendo assim, um ponto P qualquer pode ser escrito como um vetor de duas componentes

$$P = \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix}$$

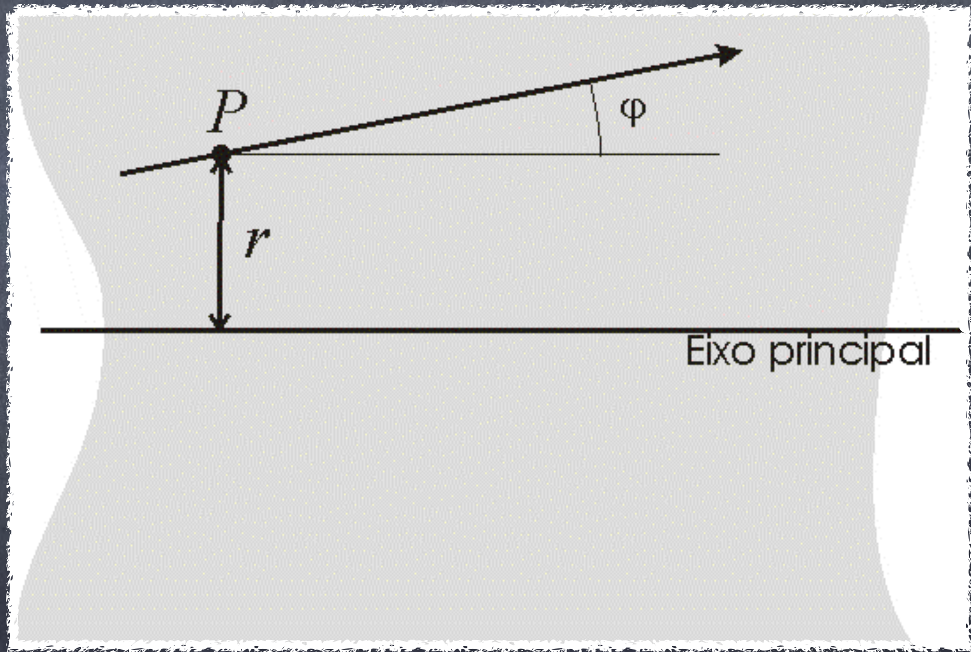


O método matricial

- O método matricial estabelece uma transformação de um ponto P1 para outro ponto P2 de um meio através de uma matriz de transformação M

$$P_2 = M \cdot P_1$$

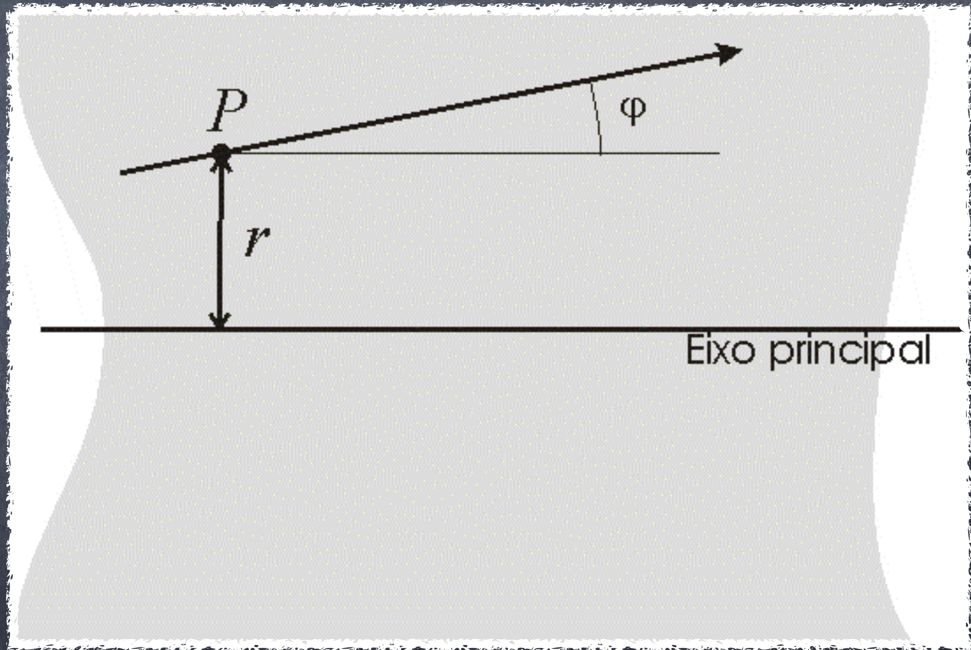
$$P_1 = M^{-1} \cdot P_2$$



O método matricial

- Ou seja

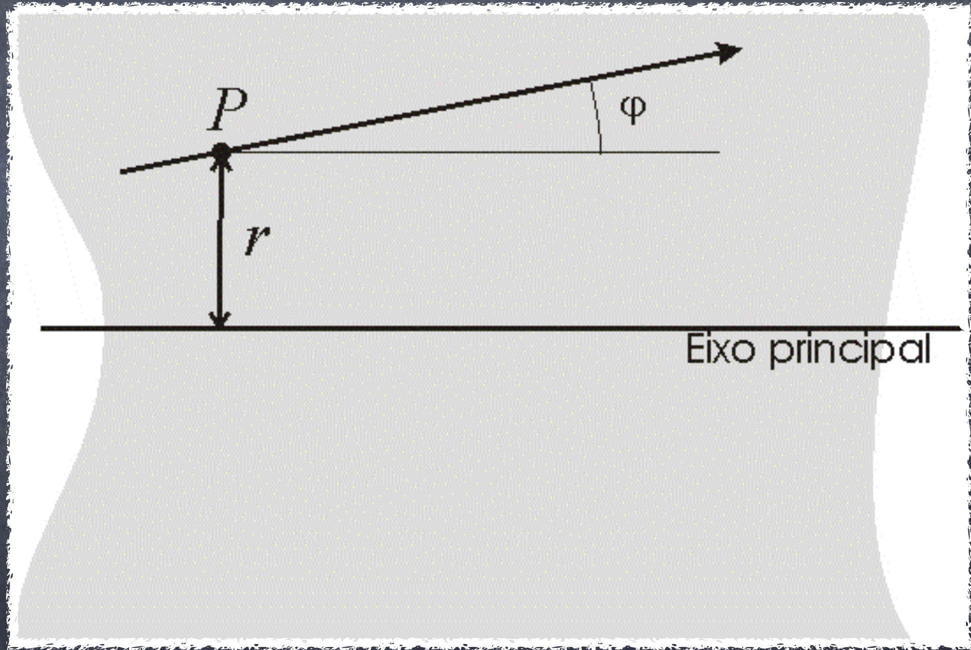
$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix}$$



O método matricial

- M é dada por

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$



Transformação de P1 para P2

- Assim, a transformação de um ponto P1 para um ponto P2 pode ser escrita como:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix}$$

$$r_2 = Ar_1 + B\phi_1$$

$$\phi_2 = Cr_1 + D\phi_1$$

Múltiplas propagações

- A vantagem do método matricial é poder escrever a propagação de um raio luminoso por matrizes independentes para cada meio envolvido e combiná-las.

- Seja, por exemplo, uma propagação do ponto P1 para P2 que passa por vários meios distintos. A transformação, neste caso, é:

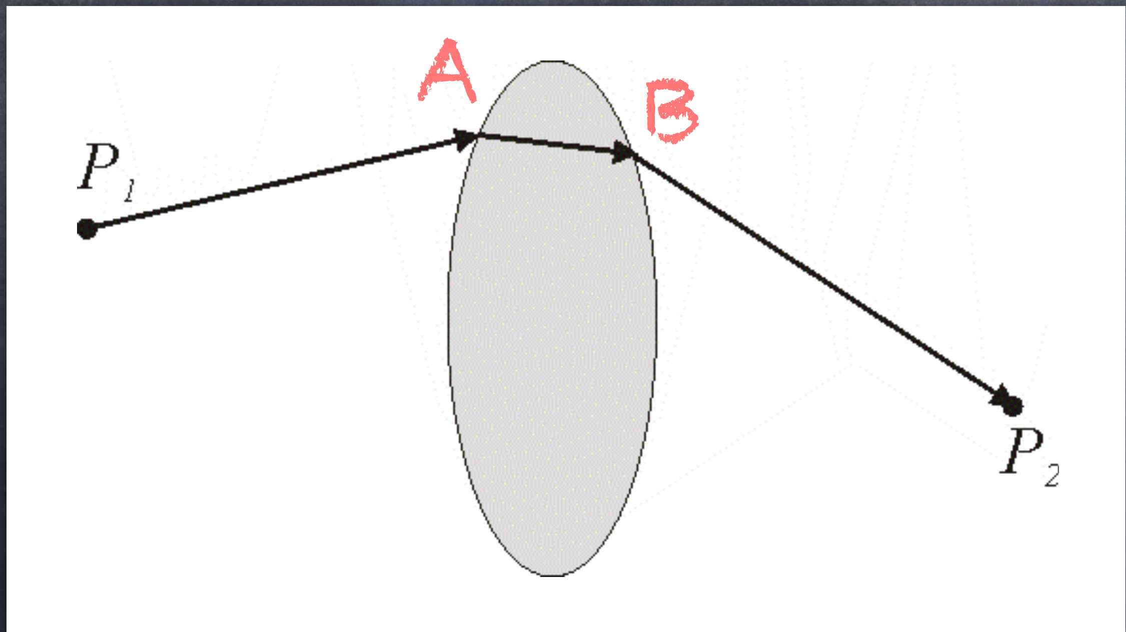
$$P_2 = M_n \cdot M_{n-1} \cdot ... \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot P_1$$

Exemplo: lente simples

- A transformação de P1 para P2 é dada por:

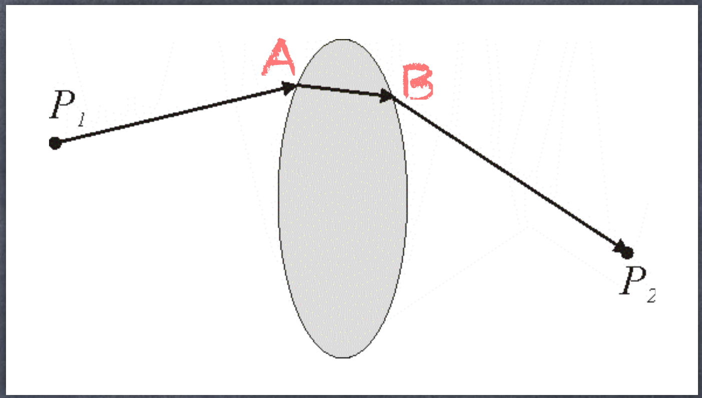
$$P_2 = M_{P_1 \to P_2} \cdot P_1$$

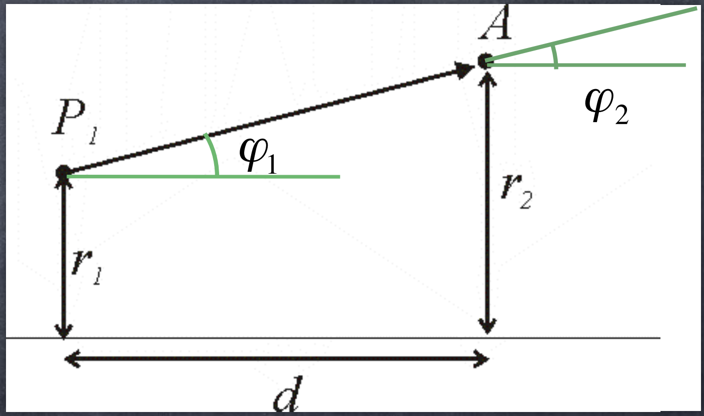
$$P_2 = M_{B \to P_2} \cdot M_{A \to B} \cdot M_{P_1 \to A} \cdot P_1$$



Propagação de P1 -> A

- Propagação em linha reta
- Equação de uma reta, conhecendo dois pontos





$$\phi_2 = \phi_1 \qquad \tan\phi_1 \sim \phi_1$$

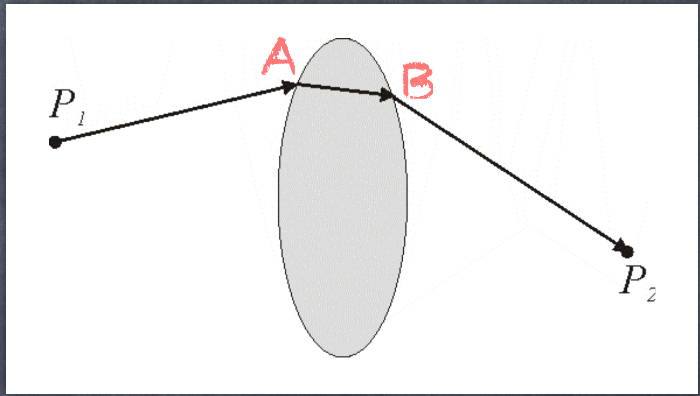
$$r_2 = r_1 + d\tan\phi_1 = r_2 = r_1 + d\phi_1$$

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix}$$

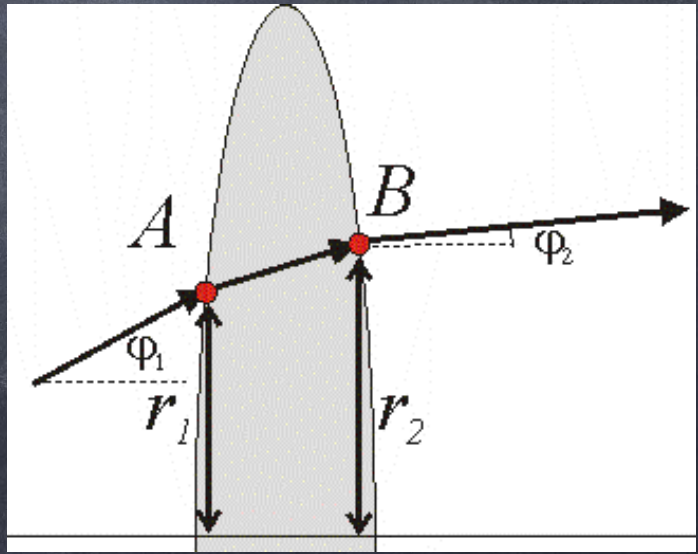
$$M_{P_1 \to A} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propagação de A -> B

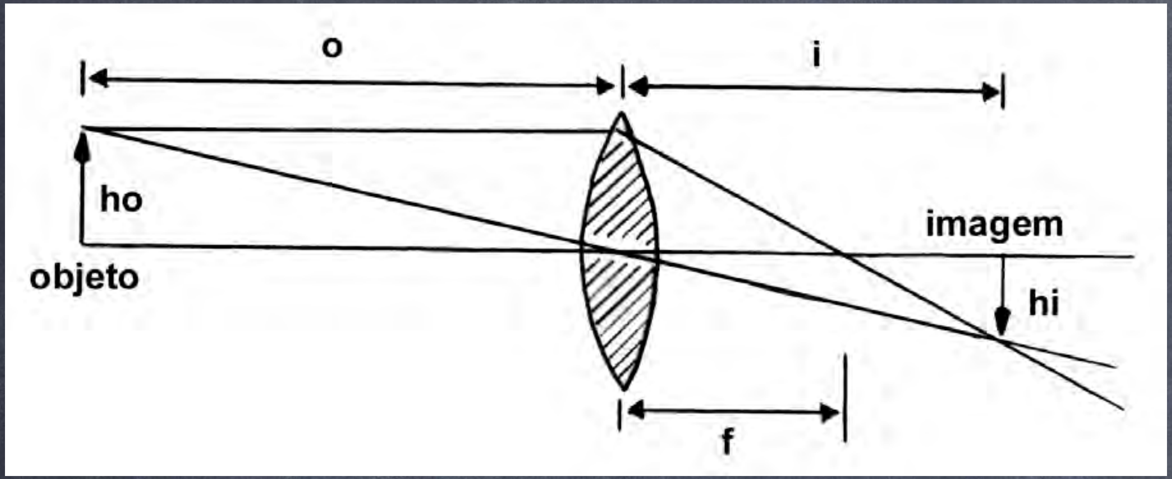
- Dentro da lente
- Ver texto no site para dedução desta expressão

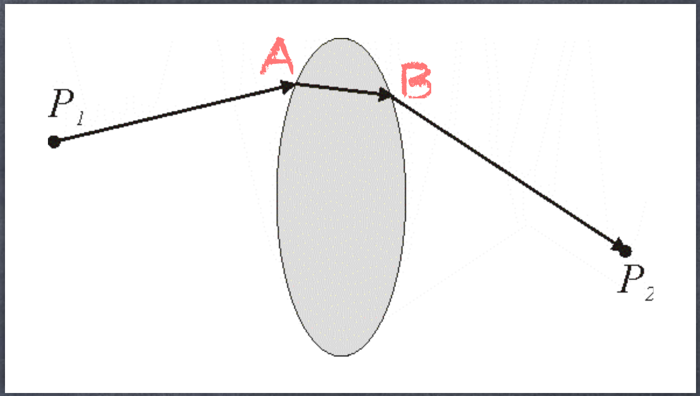


$$M_{A\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}$$



Transformação completa

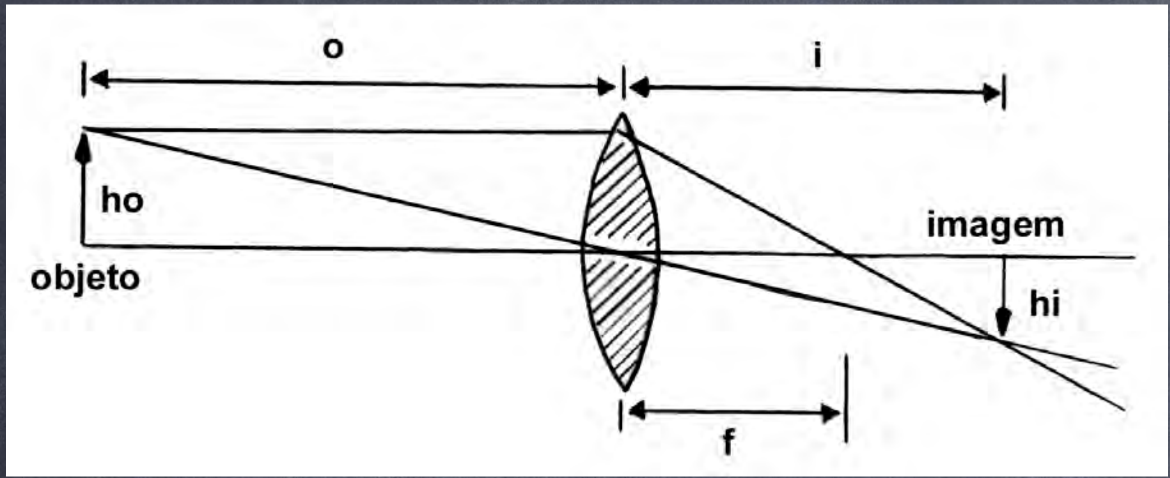


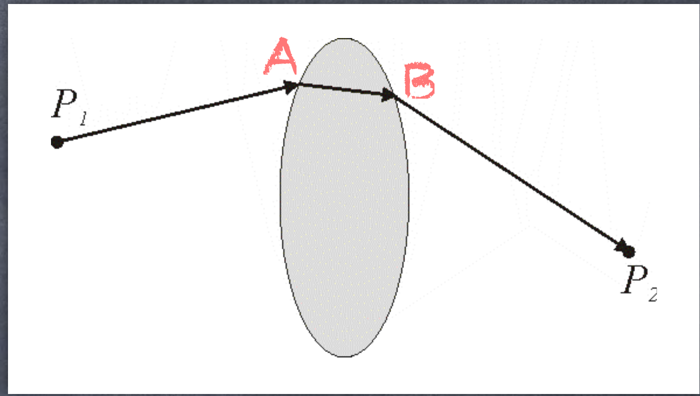


$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = M_{B\rightarrow P_2} \cdot M_{A\rightarrow B} \cdot M_{P_1\rightarrow A} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & o \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix}$$

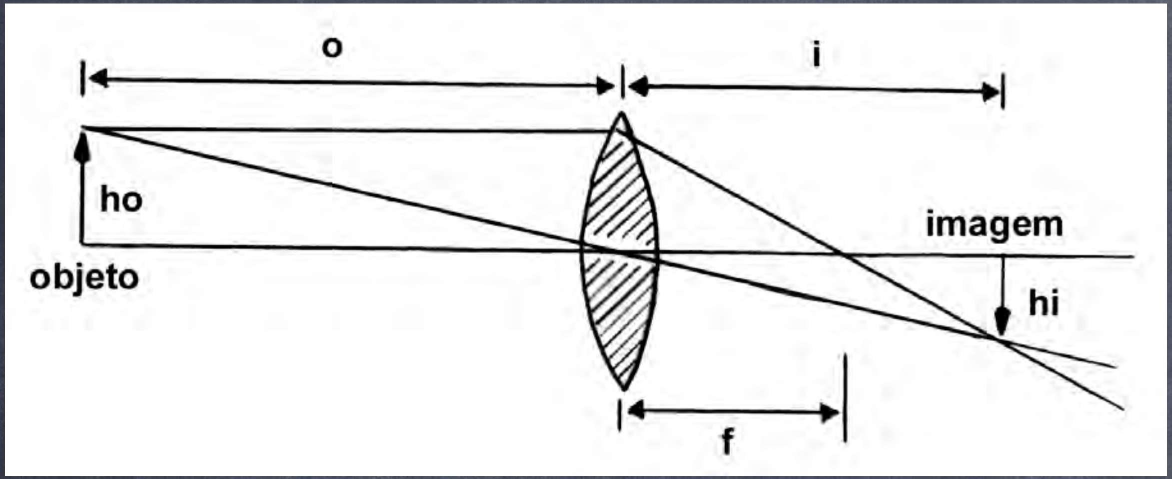
Transformação completa

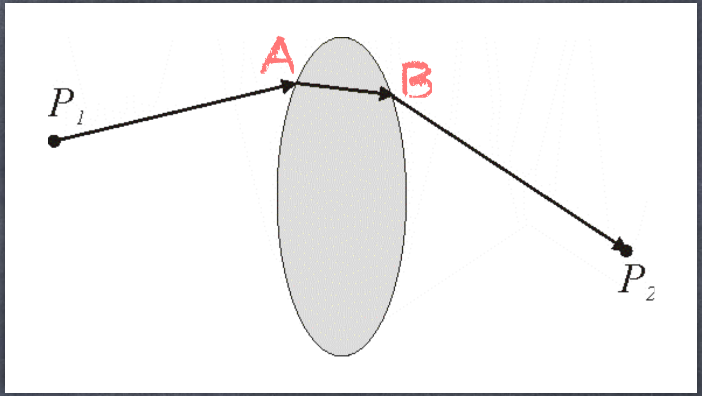




$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{i}{f} & o-\frac{io}{f}+i \\ -\frac{1}{f} & 1-\frac{o}{f} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix}$$

Transformação completa

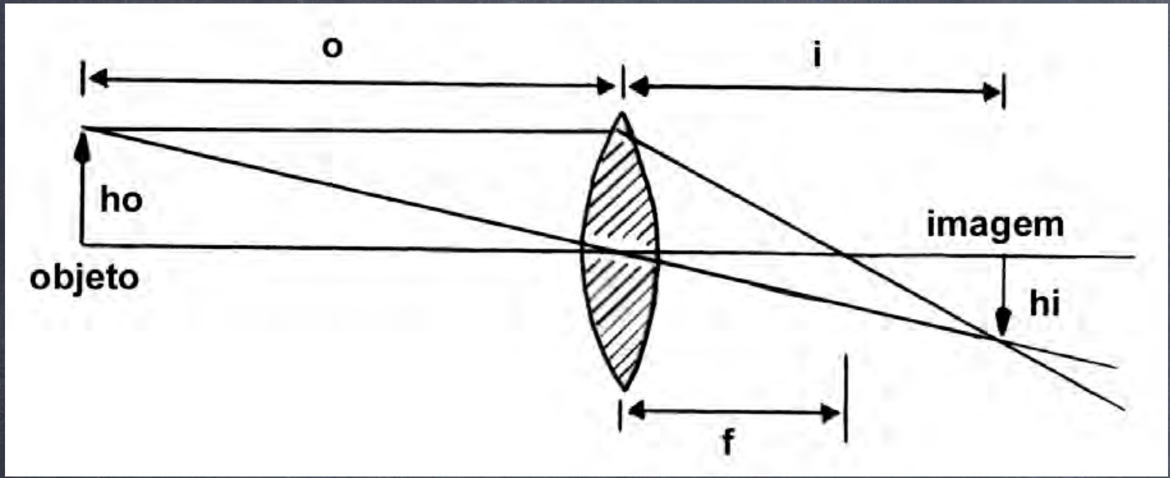


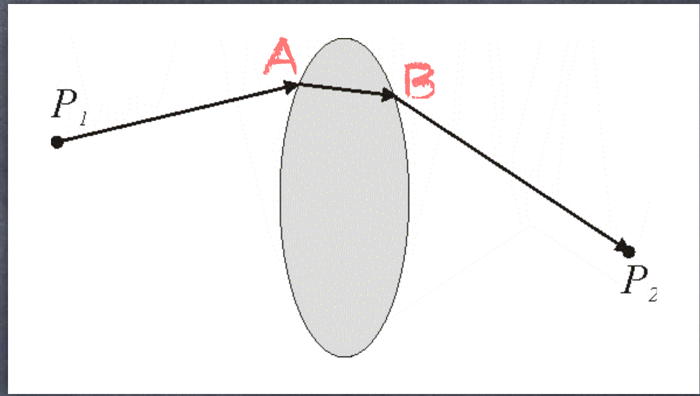


$$r_2 = \left(1 - \frac{i}{f}\right) r_1 + \left(o - \frac{io}{f} + i\right) \phi_1$$

$$\phi_2 = -\frac{1}{f} r_1 + \left(1 - \frac{o}{i}\right) \phi_1$$

Transformação completa





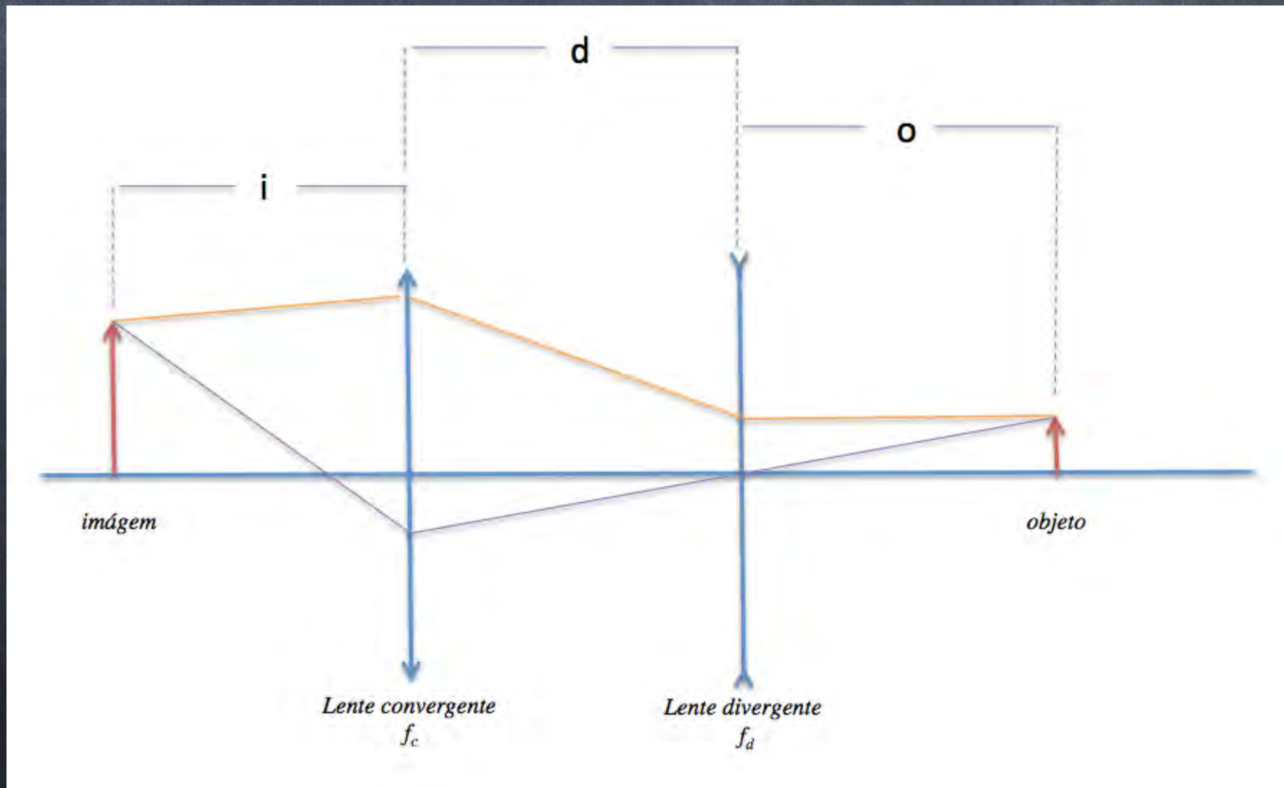
- Como todos os raios que saem de P1 devem chegar em P2, r2 não deve depender do ângulo phi 1

$$r_2 = \left(1 - \frac{i}{f}\right) r_1 + \left(o - \frac{io}{f} + i\right) \phi_1$$

$$\left(o - \frac{io}{f} + i\right) = 0 \rightarrow \boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o}}$$

Objetivos da semana

- Estudar uma associação de lentes
  - Lente convergente + lente divergente

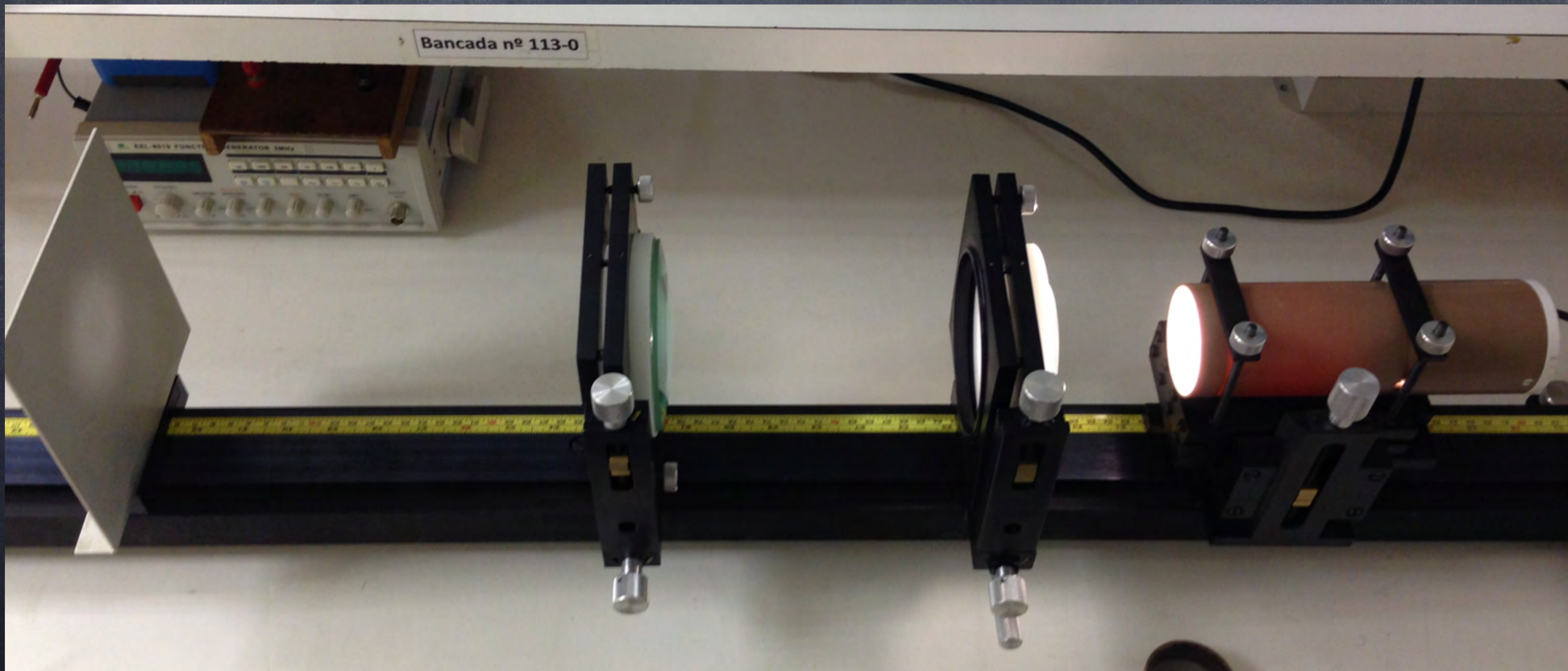


Atividade pré-lab construção de um modelo físico adequado

- Encontrar a relação entre a posição da imagem gerada (i) em função da posição do objeto (o), mantendo fixa a distância entre as lentes (d)
  - DICA: use o método matricial
- Supondo $f_D = -10$ cm, $f_C = 20$ cm, $o = 50$ cm e $i = 75$ cm, calcule d.
- OS GRUPOS somente usarão o laboratório após apresentar esta atividade resolvida

Medir posição da imagem em função da posição do objeto

- Tentar gerar imagens com i ~ 60 - 100 cm
- Ver detalhes no roteiro de aula



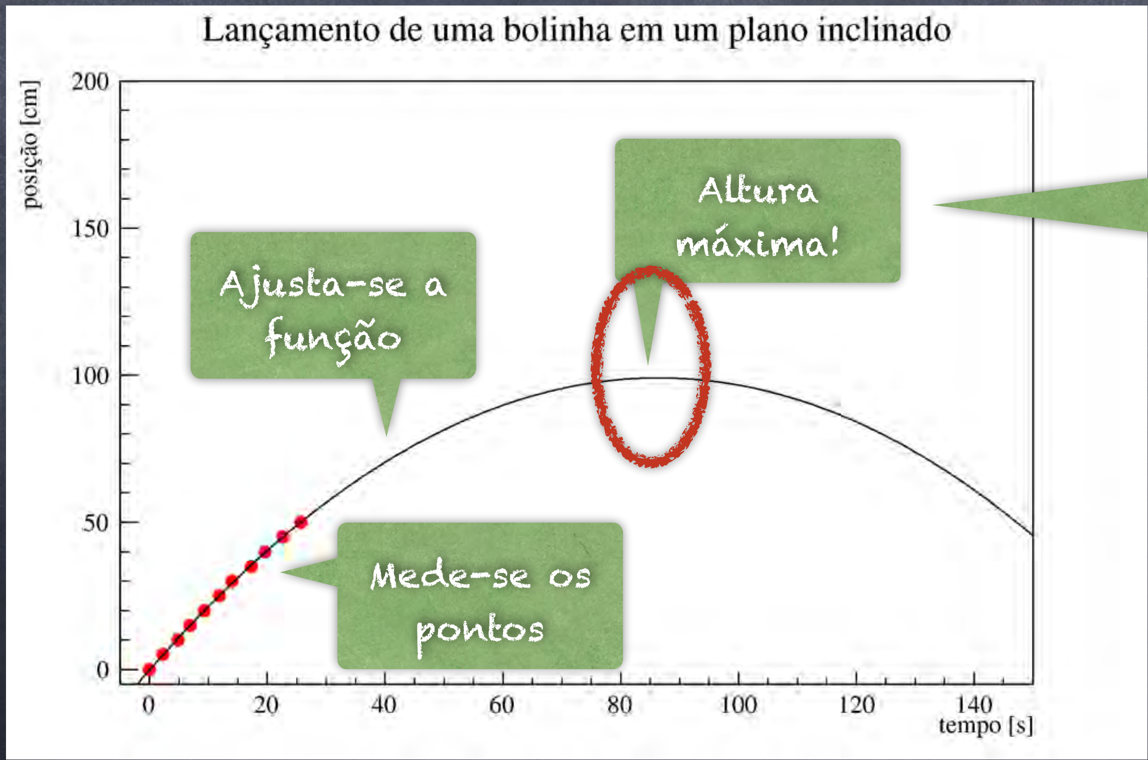
Análise

- Aplicar o modelo construído aos dados experimentais
    - Ajuste de dados. Avalie o Chi^2 e resíduos do ajuste. É um bom ajuste?
    - Obter as distâncias focais das lentes convergente e divergente
- Colocar distâncias focais no site.
- Discutir a covariância entre as duas distâncias focais obtidas.

Covariância - episódio 1
Alguns conceitos básicos

O problema clássico

- Extrapolações de funções
    - Ex: lançamento de uma bolinha em um plano inclinado. Qual altura máxima ela atinge?



Qual a incerteza na altura máxima?

Fórmula geral de propagação de incertezas

(ver notas de aula de Fís. Exp. III)

- Dada uma função

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(\tilde{x})$$

- Expandindo f em Taylor em 1ª ordem

$$\sigma_y^2 = \langle(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i - \mu_i))^2\rangle$$

- Abrindo a expressão temos:

$$\sigma_y^2 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \langle(x_i - \mu_i)^2\rangle + \sum_i \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\langle(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)\rangle$$

$$\sigma_y^2 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_i^2 + \sum_i \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} cov_{ij}$$

Fórmula geral de propagação de incertezas

- Forma matricial

$$\sigma_y^2 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_i^2 + \sum_i \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} cov_{ij}$$

$$\boxed{\sigma_y^2 = \mathbf{T}^{\mathbf{T}}\mathbf{\Sigma}\mathbf{T}}$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix} \text{ com } \partial_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & cov_{12} & \cdots & cov_{1n} \\ cov_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & cov_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov_{n1} & cov_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

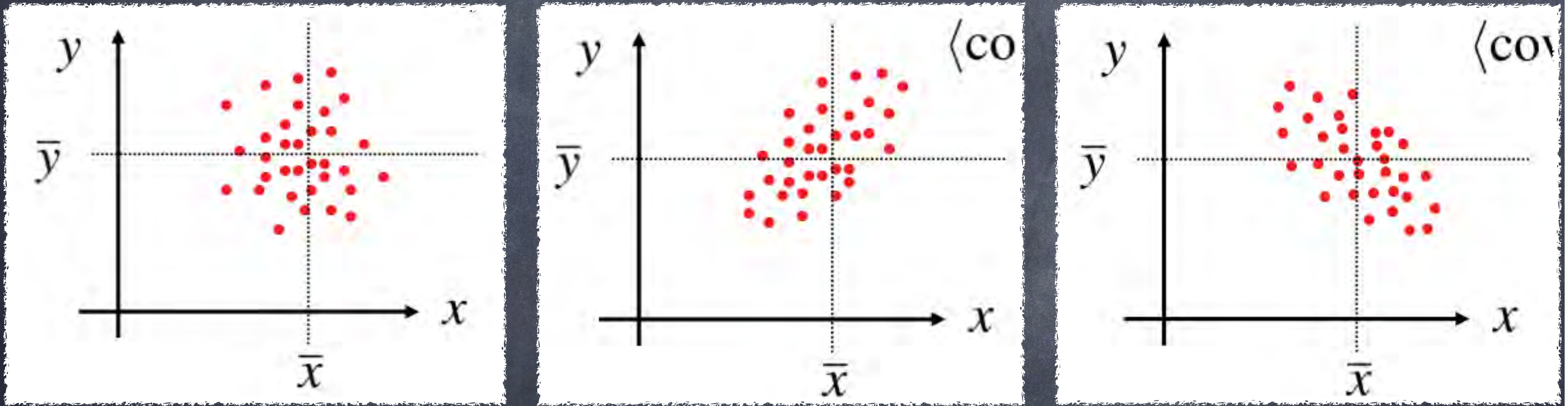
$\mathbf{\Sigma}$ é chamada de matriz de covariância

O significado da covariância

- Considere duas medidas x,y.
- Considere que podemos repetir o experimento e medir várias vezes x e y.
- Considere que a cada medida, colocamos um ponto no gráfico de y em função de x
  - Calculamos os valores médios de x e de y, μ_x e μ_y.
  - Calculamos a covariância entre x e y

$$cov_{xy} = \langle (x - \mu_x)(y - \mu_y) \rangle$$

Há três possibilidades



$cov_{xy} = 0$ $\quad$ $cov_{xy} > 0$ $\quad$ $cov_{xy} < 0$

$$cov_{xy} = \langle (x - \mu_x)(y - \mu_y) \rangle$$

Coeficiente de correlação

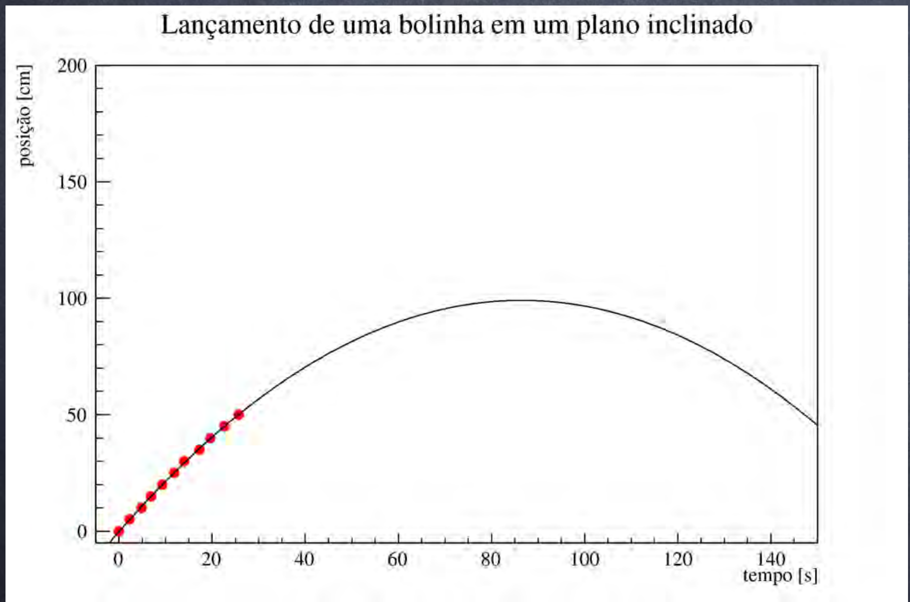
- Muitas vezes é melhor expressar a dependência de uma grandeza com outra através do coeficiente de correlação, definido como:

$$\rho_{xy} = \frac{cov_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$$

Vamos voltar ao problema inicial

- Um bom programa de ajuste fornece a matriz de covariância dos parâmetros ajustados



$$f(x) = [0] + [1]x + [2]x^2$$

Resultados do ajuste

Número de parâmetros	3
Chi^2	5.3756
Número de graus de liberdade	8

parâmetro	Valor	Incerteza
0	-0.211885	0.39859
1	2.29672	0.0700687
2	-0.0132831	0.00256606

Matriz de covariância

$$\begin{bmatrix} 0.158874 & -0.0232467 & 0.000711744 \\ -0.0232467 & 0.00490963 & -0.000173525 \\ 0.000711744 & -0.000173525 & 6.58469E-06 \end{bmatrix}$$

Coeficiente de correlação

- Quão correlacionados estão os parâmetros 1 e 2?

Resultados do ajuste

Número de parâmetros	3
Chi^2	5.3756
Número de graus de liberdade	8

parâmetro	Valor	Incerteza
0	-0.211885	0.39859
1	2.29672	0.0700687
2	-0.0132831	0.00256606

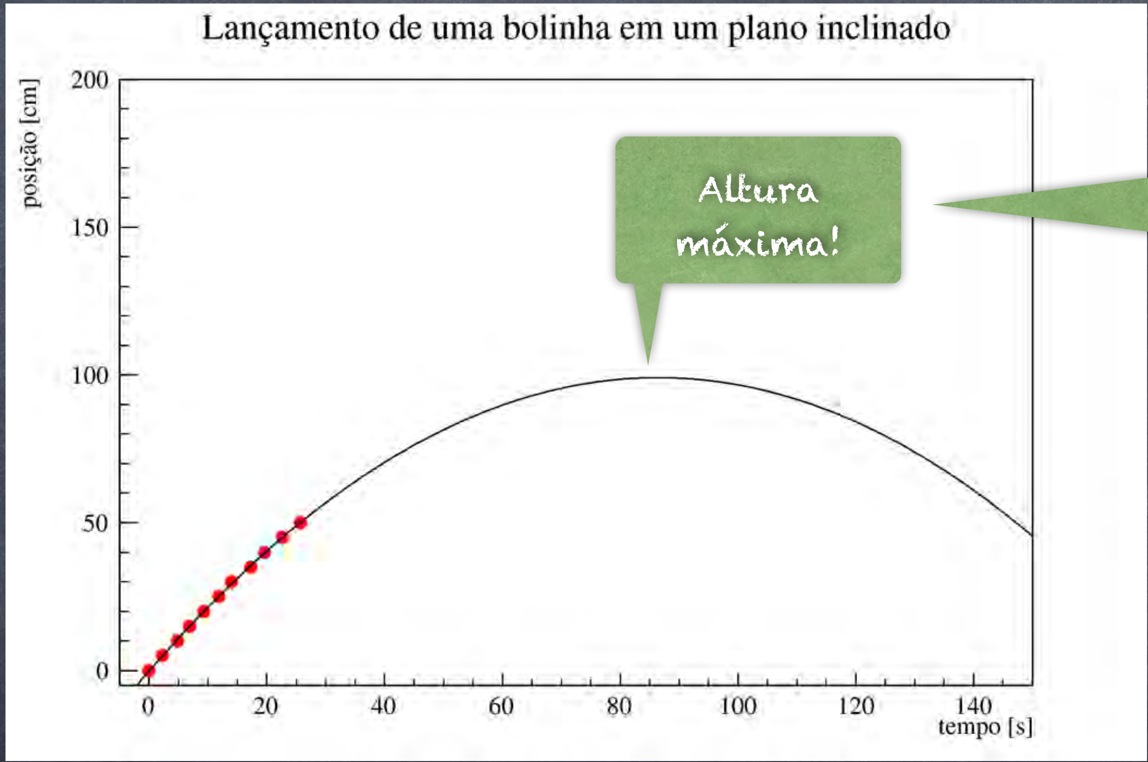
Matriz de covariância

$$\begin{bmatrix} 0.158874 & -0.0232467 & 0.000711744 \\ -0.0232467 & 0.00490963 & -0.000173525 \\ 0.000711744 & -0.000173525 & 6.58469E-06 \end{bmatrix}$$

$$\rho_{12} = \frac{cov_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} = -0.96$$

Estes parâmetros estão altamente correlacionados

Voltando ao problema original



Altura máxima!

Qual a incerteza na altura máxima?

$$f(x) = [0] + [1]x + [2]x^2 \longrightarrow H_{max} = [0] - \frac{1}{4}\frac{[1]^2}{[2]}$$

Voltando ao problema original

$$H_{max} = [0] - \frac{1}{4}\frac{[1]^2}{[2]}$$

$$\sigma^2_{H_{max}} = \mathbf{T}^{\mathbf{T}}\mathbf{\Sigma}\mathbf{T}$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \partial_0 \\ \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix} \text{ com } \partial_i = \frac{\partial H_{max}}{\partial [i]}$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0.158874 & -0.0232467 & 0.000711744 \\ -0.0232467 & 0.00490963 & -0.000173525 \\ 0.000711744 & -0.000173525 & 6.58469E-06 \end{bmatrix}$$

Façam esta propagação como exercício!
Façam também considerando cov=0 e vejam a diferença.

Perguntas em aberto

- Como calcula-se a matriz de covariância? O que ela tem a ver com o ajuste de uma função?
    - O que o Chi^2 tem a ver com isto?
- Como eu sei se duas grandezas estão correlacionadas ou não?
    - No caso de um ajuste é fácil mas e no caso de duas grandezas medidas em um experimento?