Um pouco mais sobre chi-quadrado

Alexandre Suaide

(texto sobre esse assunto será disponibilizado em breve)

F.D.P. do chi-quadrado

- Como os termos que compõe o chi-quadrado são sempre positivos não é esperado que ele tenha média zero.

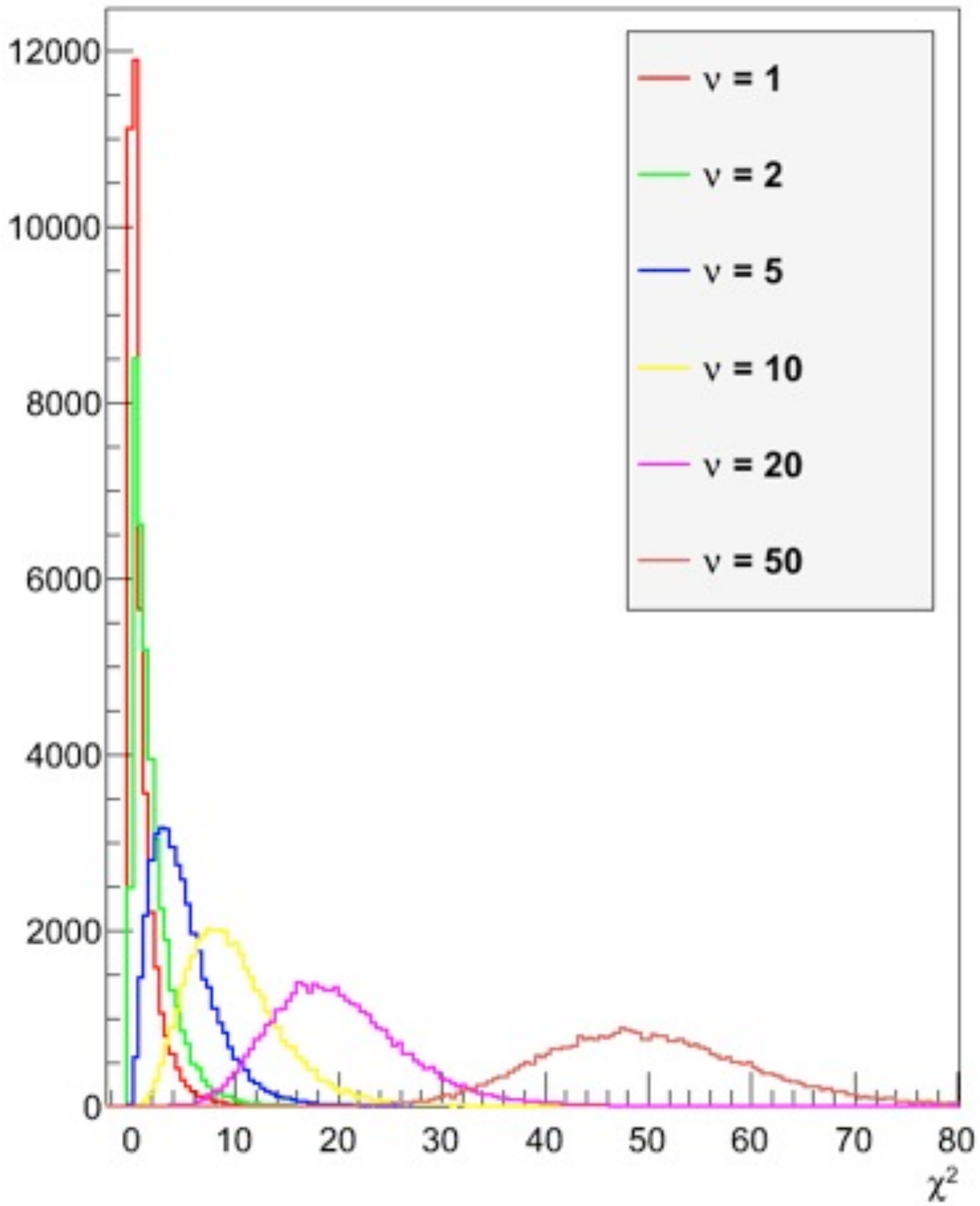
- Também não é esperado que a média seja independente de ν. Isso porque, quanto mais termos se somam, maior fica o chi-quadrado

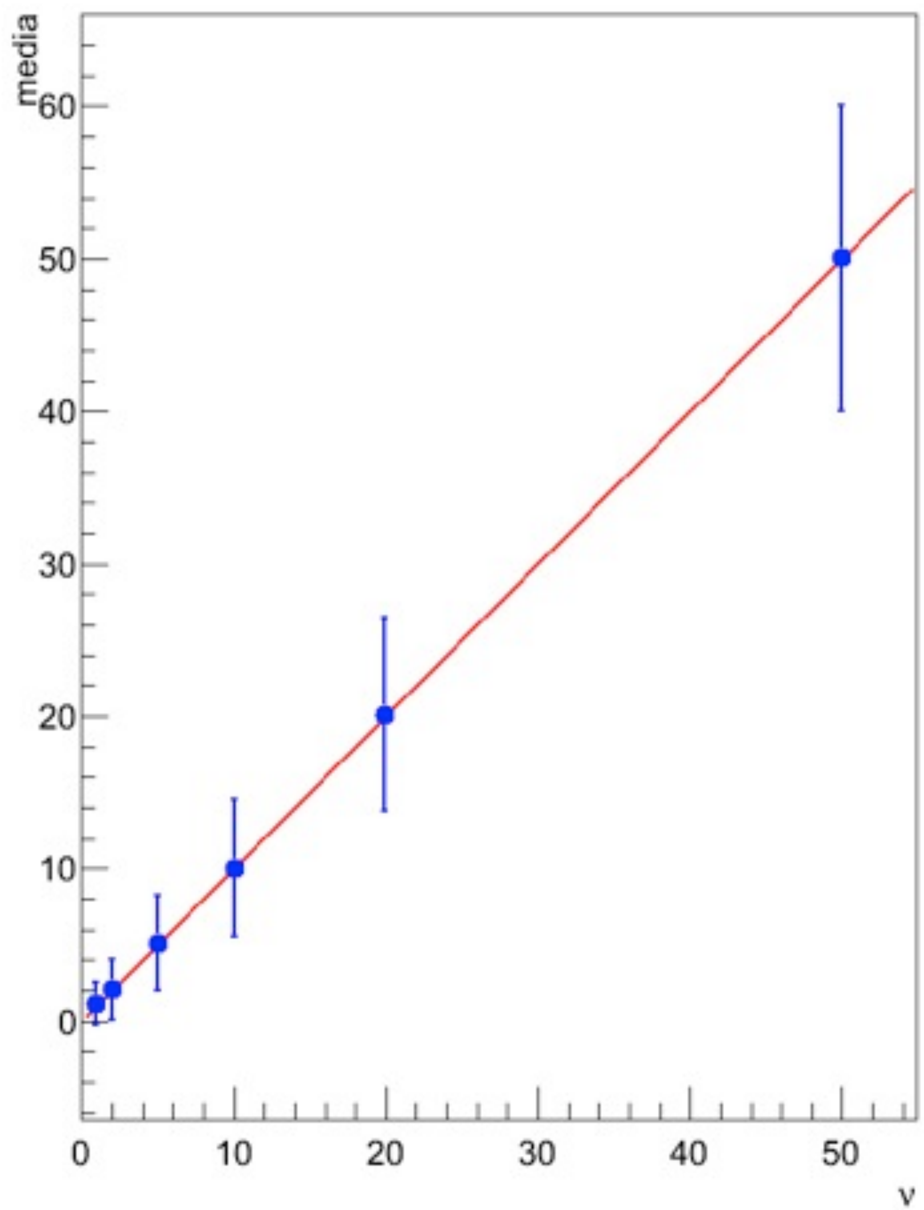
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\nu} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2$$

F.D.P. do chi-quadrado

- A FDP do chi-quadrado não é gaussiana
  - Se aproxima de uma gaussiana quando ν cresce
  - O valor médio da distribuição de chi-quadrado é ν.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\nu} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2$$

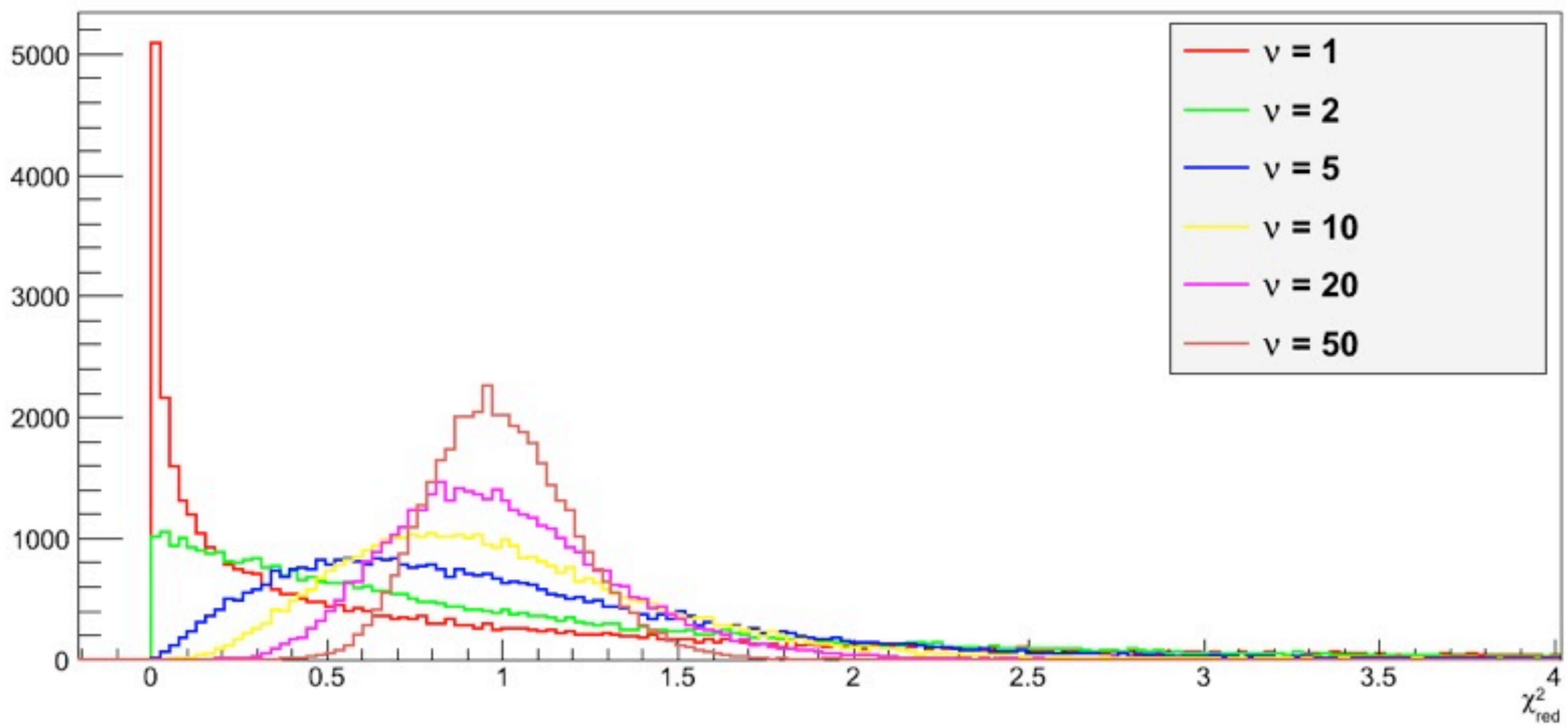




O chi-quadrado reduzido

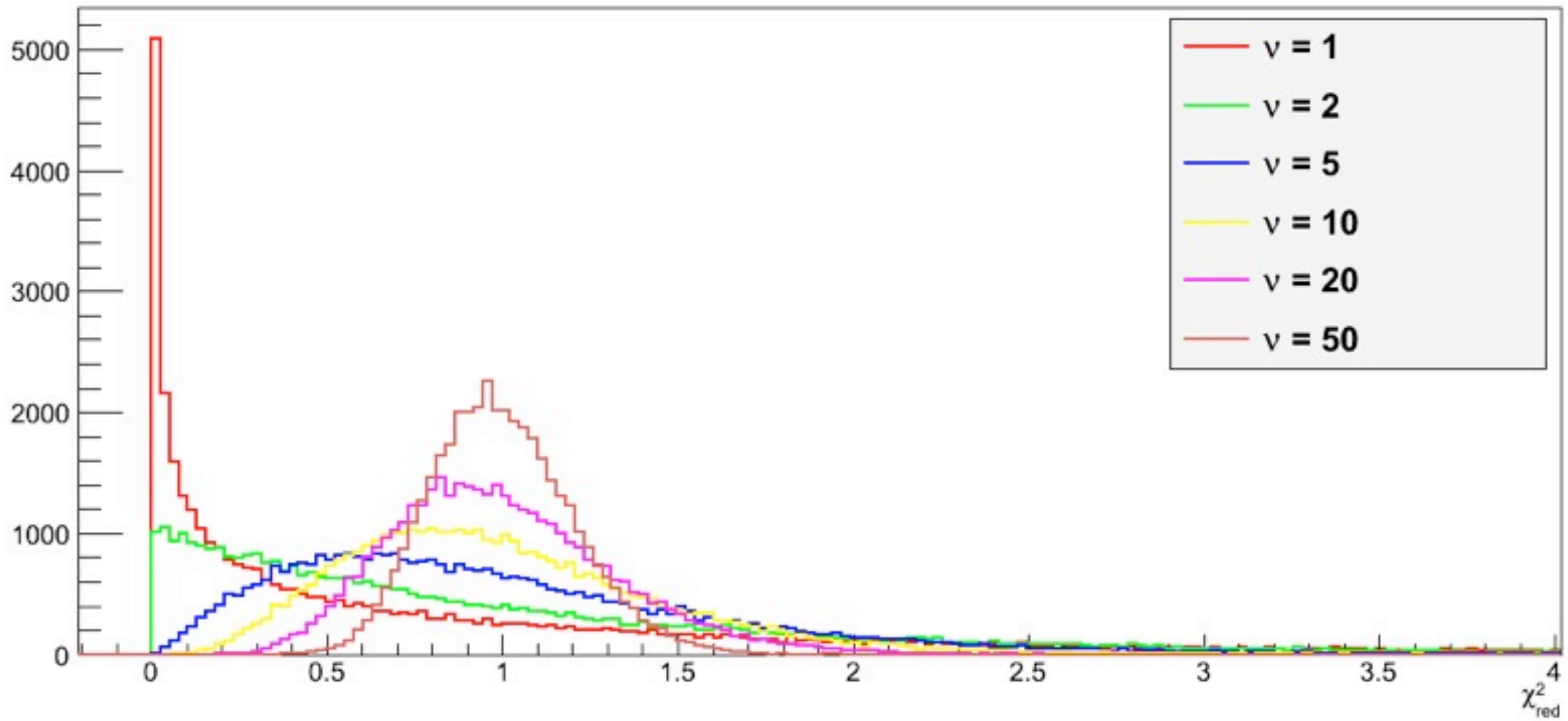
- Se o valor médio do chi-quadrado é ν, podemos definir uma grandeza com a mesma distribuição do chi-quadrado porém de média 1, chamada de chi-quadrado reduzido.

$$\chi^2_{red} = \frac{1}{\nu}\chi^2$$



Porque o chi-quadrado reduzido é importante?

- Como o **valor médio do chi-quadrado reduzido é 1**, pode-se criar um teste (**assunto da próxima aula**) para verificar a qualidade de ajustes de funções a dados experimentais
  - Note que, para valores grandes de ν, é pouco provável obter valores baixos ou altos para o chi-quadrado reduzido.
    - Ou seja, um ajuste no qual a função passa em cima de todos os pontos tem probabilidade estatística nula de descrever os dados experimentais.



Mas quem é ν?

- Olhando lá atrás, "... Imagine um experimento no qual se realizam ν medidas independentes desta grandeza e o resultado do experimento é o valor médio dessas medidas.. "
  - ν é o número de medidas estatisticamente independentes no experimento. É chamado de **número de graus de liberdade** da amostra.
    - Número de graus de liberdade corresponde à quandtidade de valores independentes que podem variar livremente no cálculo de uma grandeza estatística.
    - O que é independente em uma amostra?

Número de graus de liberdade

- Imagine que tomamos um conjunto de dados e queremos calcular a variância deste conjunto de dados. Usamos a definição:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2$$

- Imagine a situação na qual não conhecemos o valor verdadeiro da amostra. Neste caso, a melhor estimativa do valor verdadeiro da amostra corresponde ao valor médio da mesma. Neste caso a variância seria calculada como:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

- Note que *N* --> *N-1* na expressão acima. Porque disso?

Número de graus de liberdade

- No momento em que calculamos a média, somente N-1 pontos são totalmente livres para variar. O último ponto da amostra necessariamente deve ter o valor:

$$x_n = N\bar{x} - \sum_{i=1}^{N-1} x_i$$

- Ou seja, na verdade, um dos dados da amostra não é independente dos outros. Ele está vinculado aos demais por conta do valor médio calculado.

- Neste caso, o número de graus de liberdade disponíveis é ***N-1***. Esta é uma interpretação pela qual aparece o N-1 no cálculo da variância quando não se conhece o valor verdadeiro da amostra.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2$$

Número de graus de liberdade no ajuste de funções

- O chi-quadrado de um conjunto de dados em relação a uma função é dado por:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{y_i - f(x_i)}{\sigma_i} \right)^2$$

- Se conhecemos f(x), o número de graus de liberdade é N, pois os dados podem variar livremente um em relação ao outro.

- Porém, se f(x) for estimada dos dados, minimizando o chi-quadrado, então o número de graus de liberdade é dado pela diferença entre o número de dados (N) e o número de parâmetros ajustados em f(x), ou seja:

$$\nu = N - p$$

  - O motivo é o mesmo do N-1 no caso da variância. Para cada valor estimado de uma amostra, um valor dessa amostra deixa de ser independente dos demais

Teste de chi-quadrado reduzido

- Lembrando um pouco de probabilidade acumulada

$$P(x) = \int_{-\infty}^{x} H(x')dx'$$

  - Utilizamos esta definição para montar o teste-z

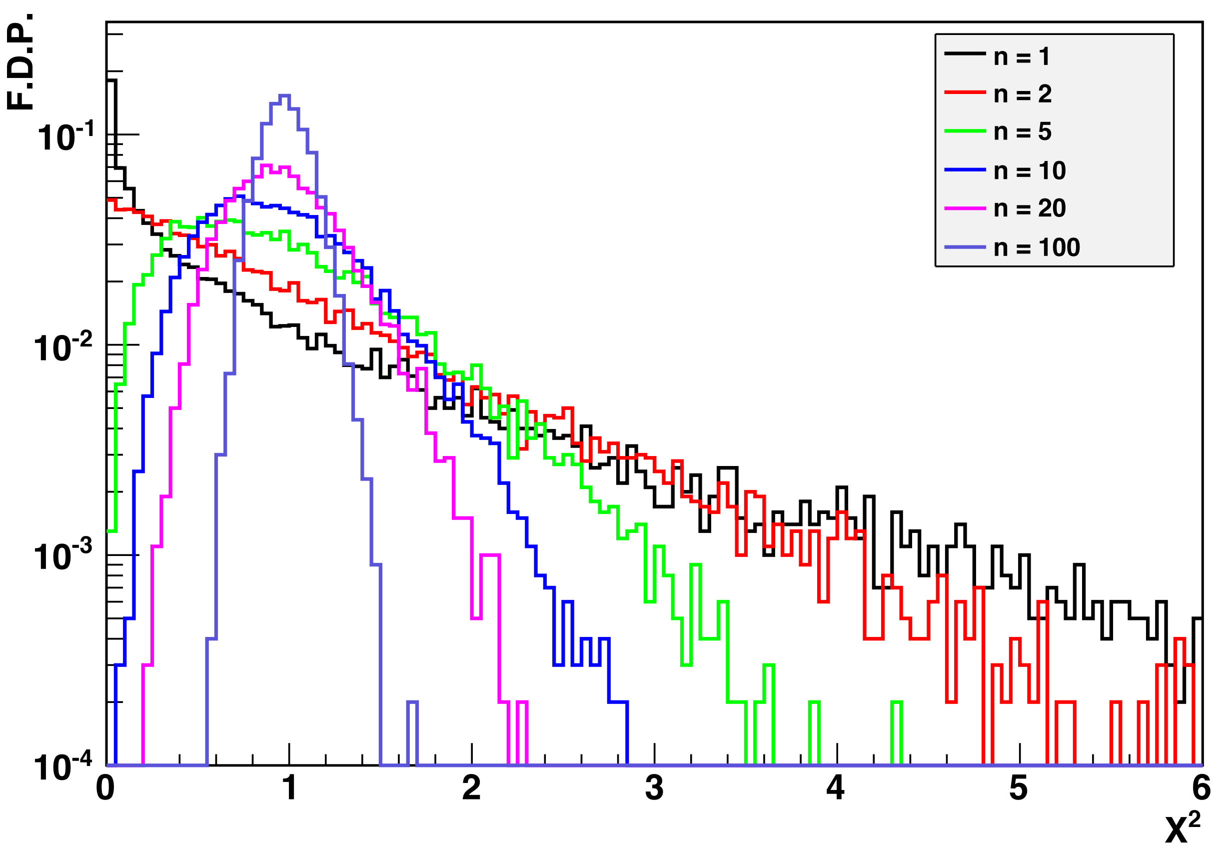
  - Em um teste de duas caudas com confinança α sabemos definimos dois valores de x (x_1 e x_2) tal que:

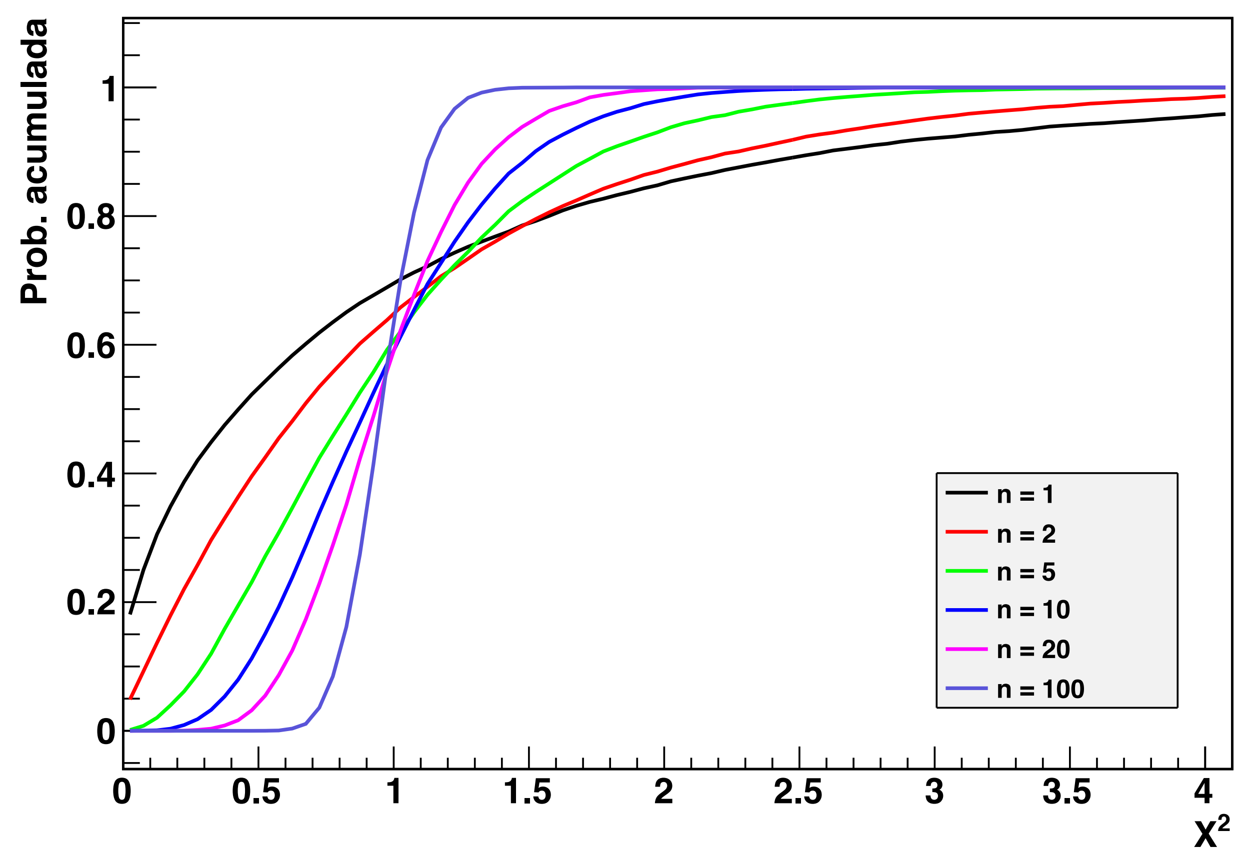
$$P(x_1) = \alpha/2$$

$$P(x_2) = 1 - \alpha/2$$

E para o chi-quadrado reduzido

- Probabilidade acumulada da distribuição de chi-quadrado reduzido

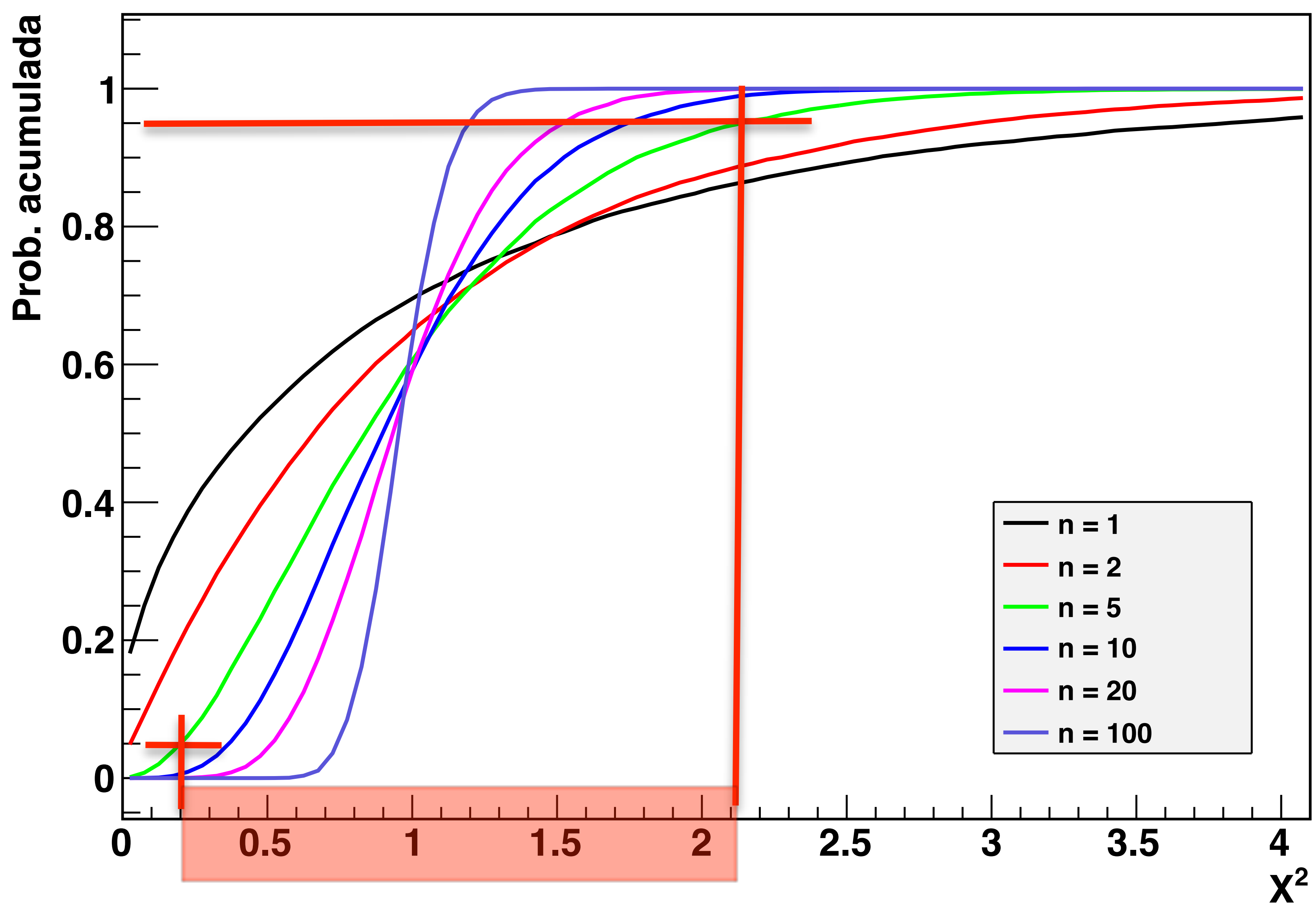




Exemplo

- Se eu faço um ajuste de 5 graus de liberdade, qual o intervalo de 95% de confiança ($\alpha = 0.05$) para o chi-quadrado reduzido?

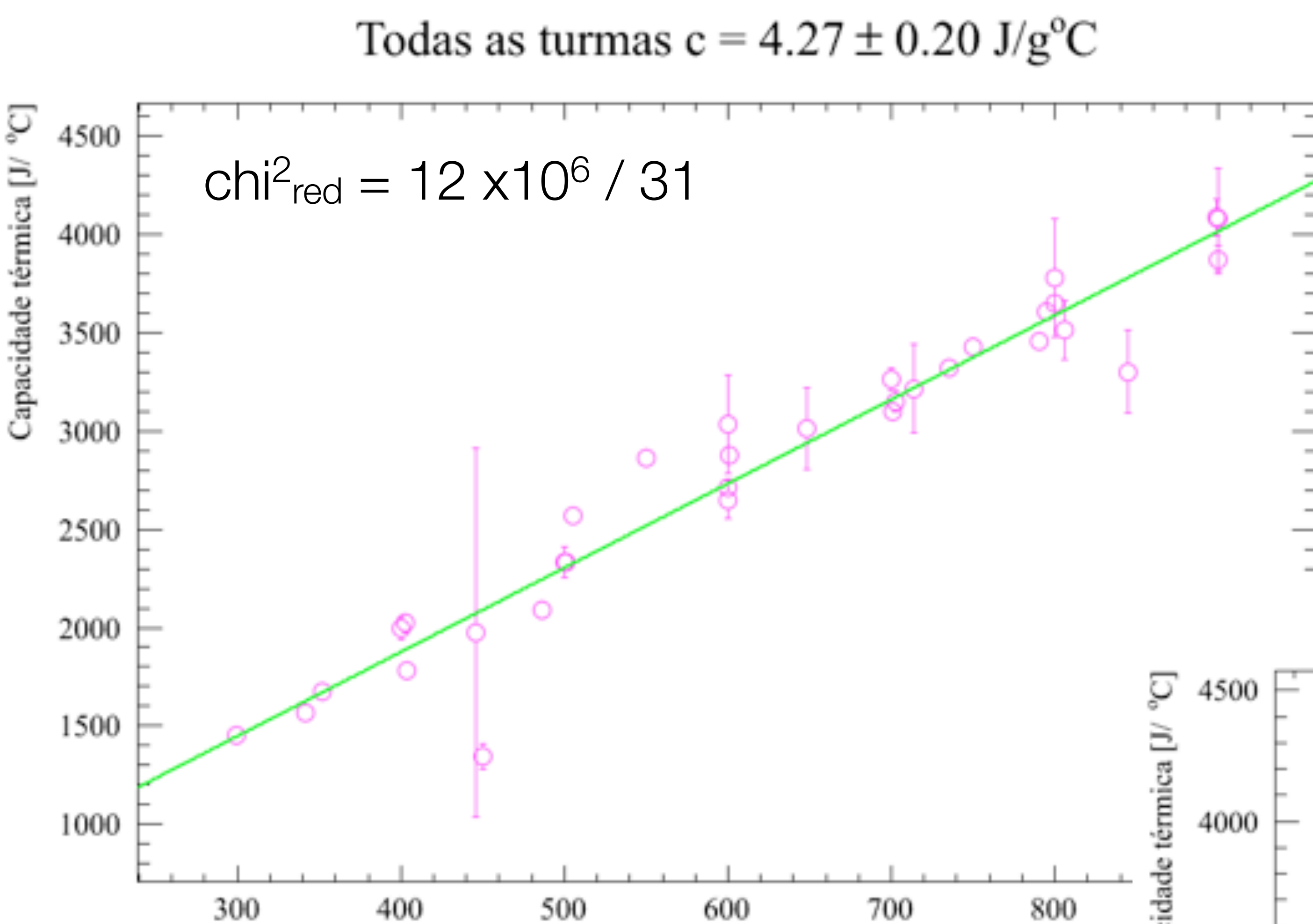
$$0.2 < \chi^2_{red} < 2.1$$

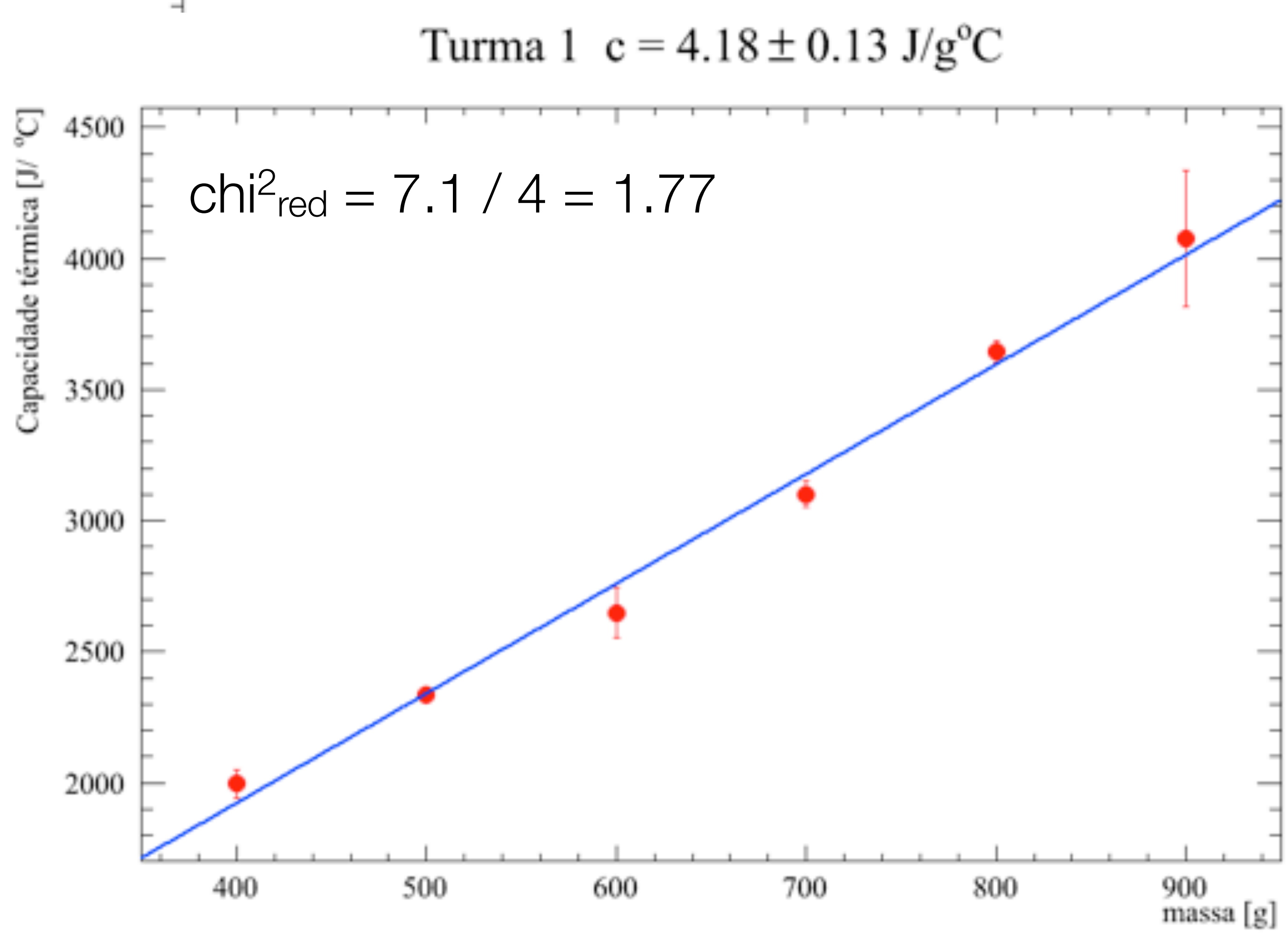


Alguns comentários sobre teste de qui-quadrado

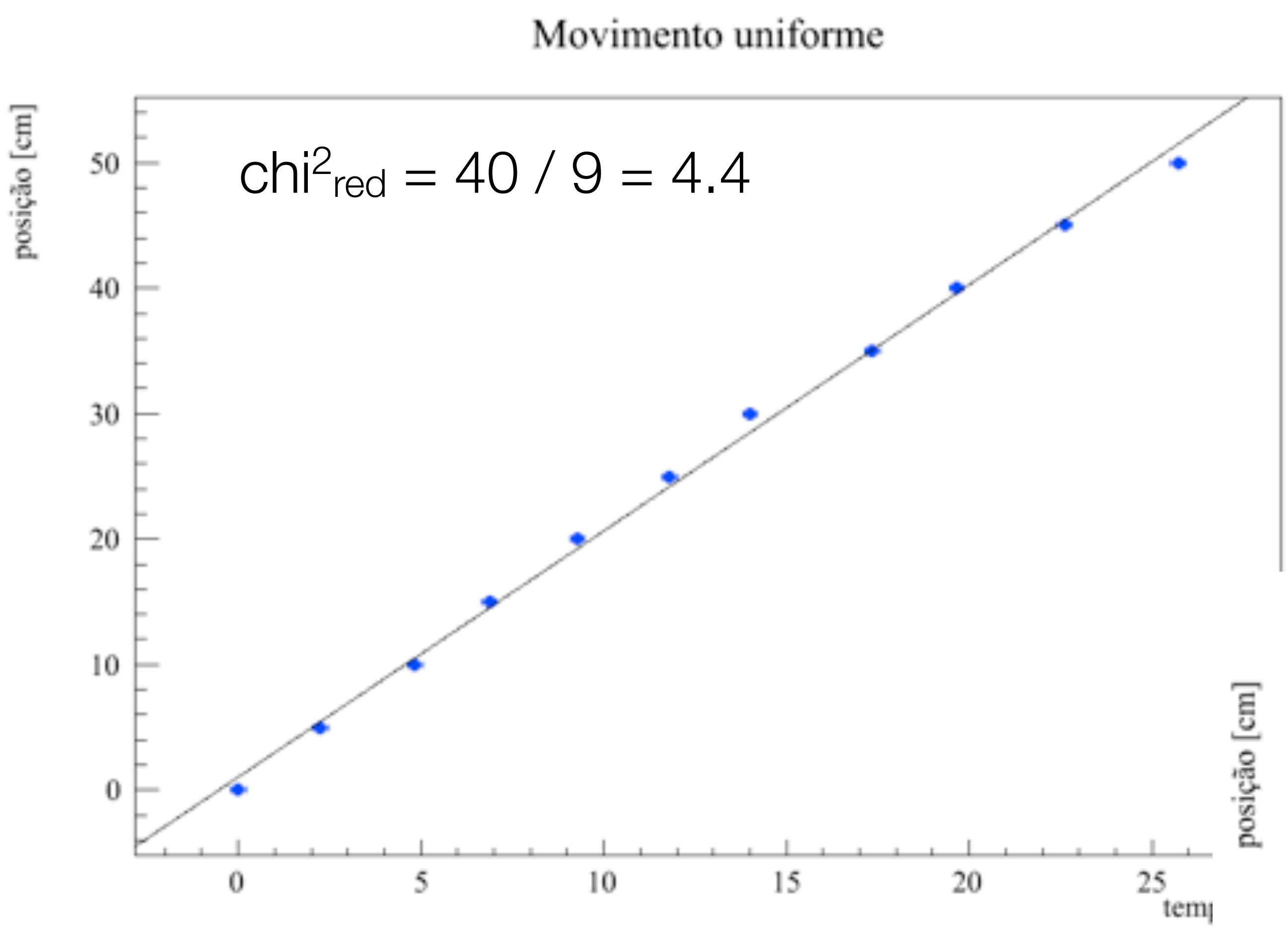
- Quanto maior o número de graus de liberdade mais sensível é o teste pois o intervalo de qui-quadrado reduzido para o mesmo grau de confiabilidade diminui.
- Como regra prática, o qui-quadrado reduzido próximo de 1 indica um bom ajuste estatístico
    - Não é só isso, ainda há outras ferramentas que vocês ainda vão aprender.
- Qui-quadrado reduzido muito distante de 1 é pouco provável
    - Valores elevados de chi-quadrado podem estar relacionados a
        - Incertezas subestimada dos pontos
        - Escolha inadequada do modelo para o ajuste
    - Valores baixos de chi-quadrado podem estar relacionados a
        - Incerteza superestimadas
        - Poucos graus de liberdade

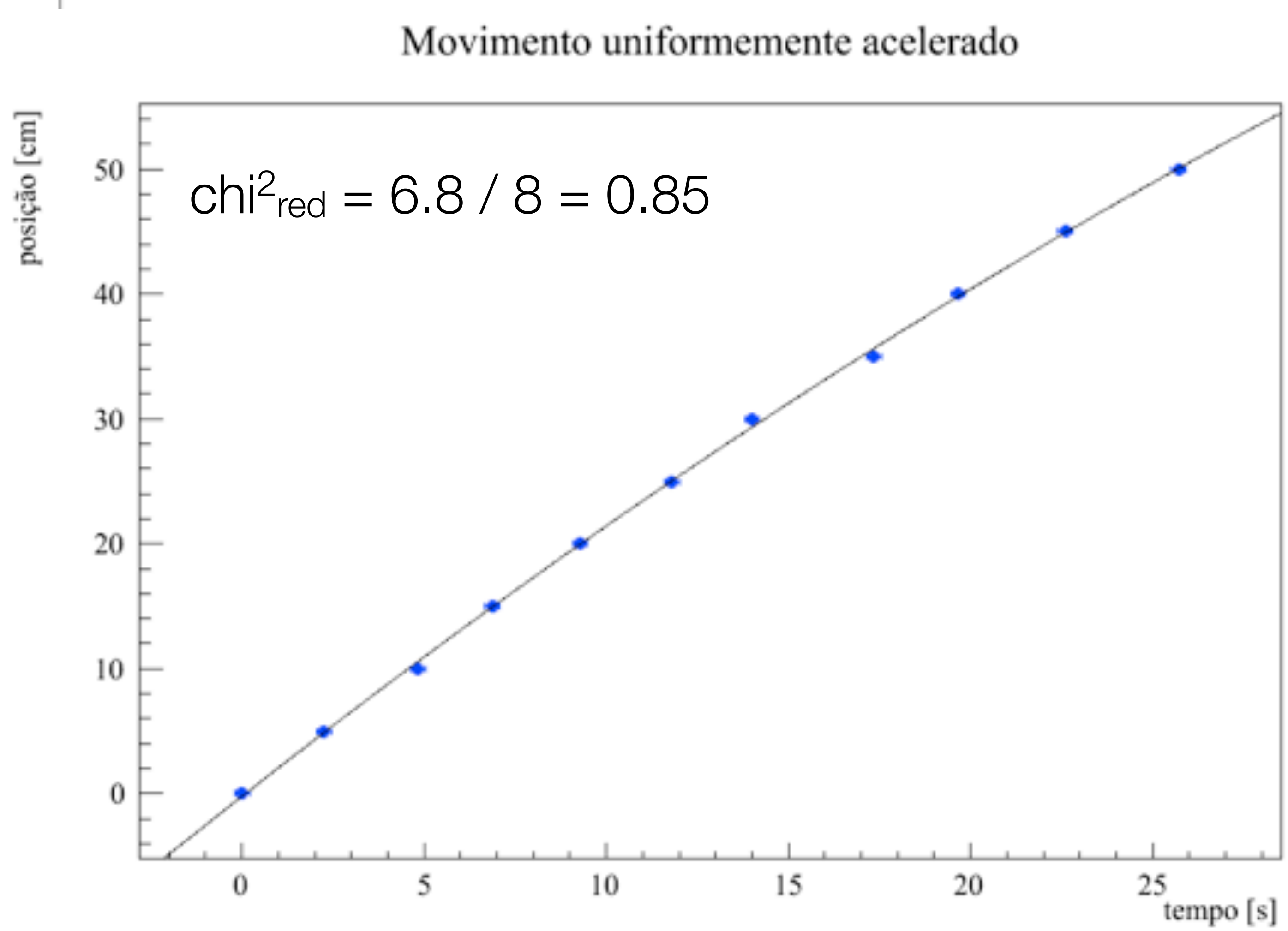
Exemplo 1 - incertezas muito pequenas





Exemplo 2 - Escolha inapropriada de modelo





Para estudar

- Fundamentos da teoria de erros, J. H. Vuolo
    - Capítulo 12, em especial o tópico sobre interpretação de chi-quadrado
    - Capítulo 14, Qualidade de ajuste
- Vou disponibilizar um texto em breve sobre o assunto.