PROVA 2 – Introdução à Física Nuclear
primeiro semestre de 2011

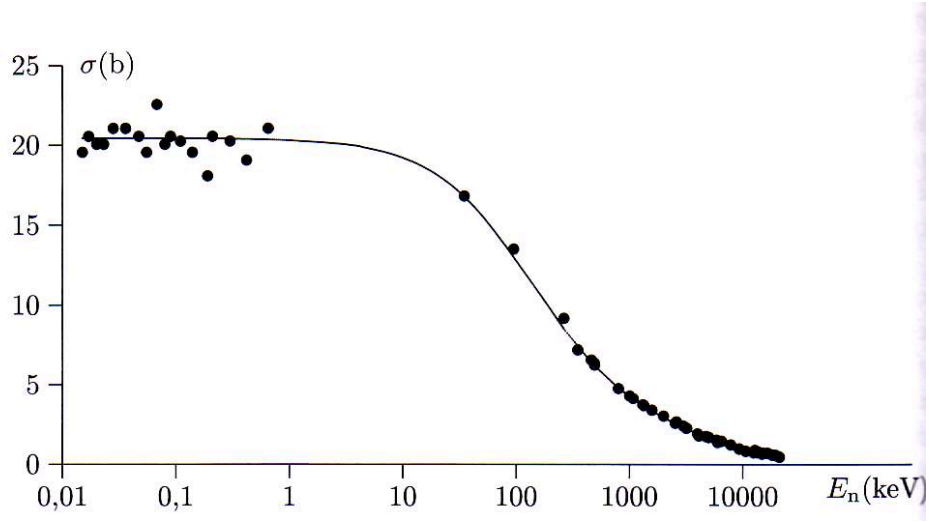
A prova deve ser entregue em mãos até as 14:00 do dia 9 de maio de 2011 na sala 246 do Ed. Oscar Sala

Q1 (6 pontos). Suponha um potencial de interação núcleon-núcleon dado por:

$$V(r) = \begin{cases} \infty \text{ se } r \le 0.5 \text{ fm} \\ -V_c - \dfrac{V_S}{\hbar^2}\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \text{ se } 0.5 \text{ fm} < r \le 2.1 \text{ fm} \\ 0 \text{ se } r > 2.1 \text{ fm} \end{cases}$$

com V_c = 50 MeV e V_S = 15 MeV. Considere um espalhamento entre prótons e nêutrons, sujeitos a esse potencial de interação.

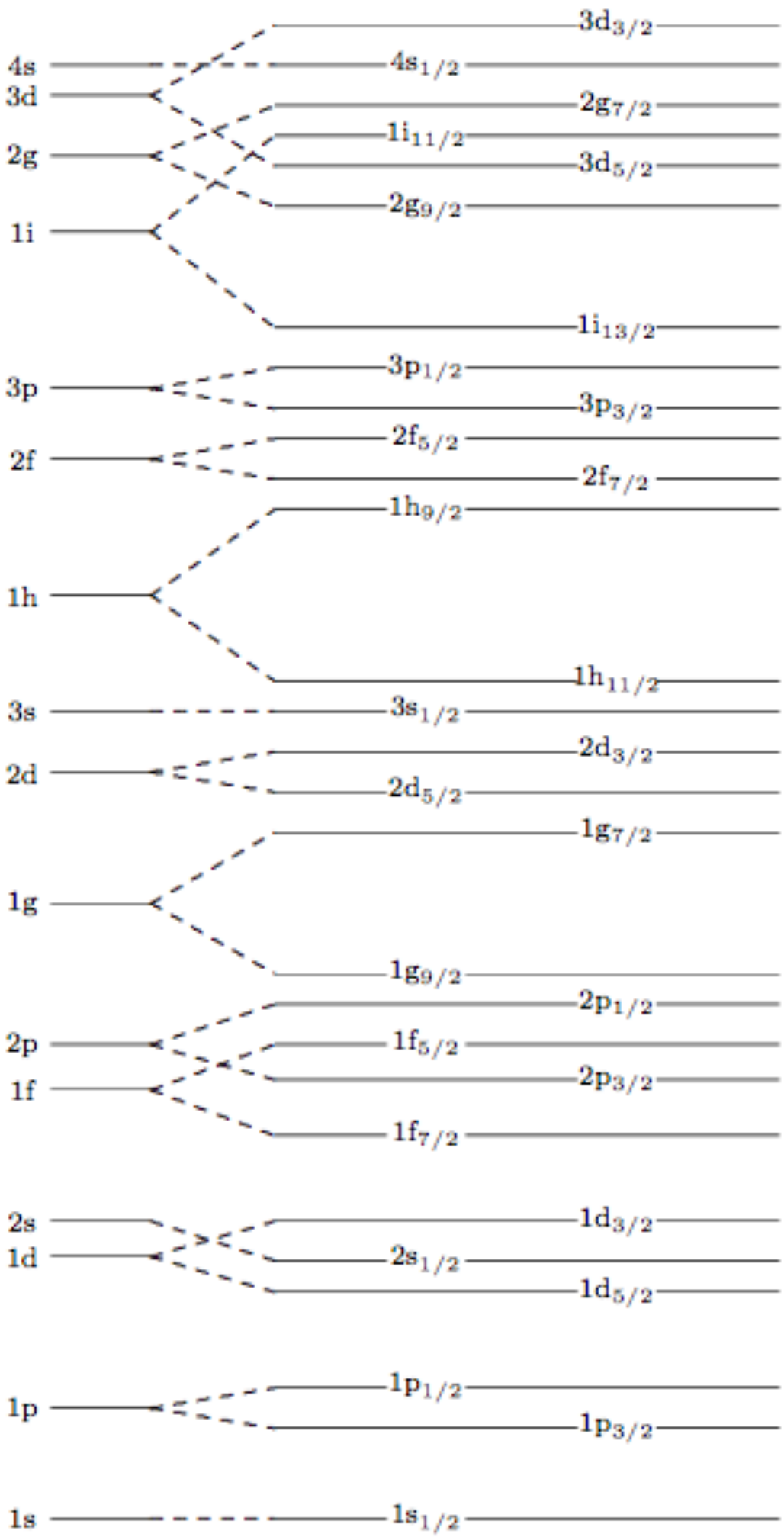
a) Obtenha, em forma de gráfico, a defasagem causada por esse potencial, em função da energia, para as ondas parciais que dos estados ^3S, ^1S, ^3P e ^1P.
b) Obtenha, em forma de gráfico, a seção de choque total em função da energia, para o espalhamento entre prótons e nêutrons, considerando apenas essas ondas parciais. Compare com a figura abaixo e discuta eventuais discrepâncias.



Q2 (4 pontos) a figura no verso mostra o esquema de níveis de energia do modelo de camadas utilizando a correção de spin-órbita. Adotando a escala de 1 cm = 1 MeV e, assumindo que o potencial de spin-órbita é dado por

$$-\frac{V_{SO}(r)}{\hbar^2}\vec{\ell} \cdot \vec{S}$$

determine o valor médio de $\langle \psi | V_{SO}(r) | \psi \rangle$ sobre os estados apresentados. Discuta a dependência desse valor médio com os números quânticos que descrevem cada estado.


4s
3d
2g
1i
3p
2f
1h
3s
2d
1g
2p
1f
2s
1d
1p
1s
3d3/2
4s1/2
2g7/2
1i11/2
3d5/2
2g9/2
1i13/2
3p1/2
3p3/2
2f5/2
2f7/2
1h9/2
1h11/2
3s1/2
2d3/2
2d5/2
1g7/2
1g9/2
2p1/2
1f5/2
2p3/2
1f7/2
1d3/2
2s1/2
1d5/2
1p1/2
1p3/2
1s1/2

INSTITUTO DE FÍSICA - USP

NOME: Gabarito P2

PROFESSOR:

DATA:

NOTA

Q1

Q2

Q3

Q4

TOTAL

1

Questão 1

O potencial nucleon-nucleon utilizado está representado abaixo, onde V_0 depende do estado de spin

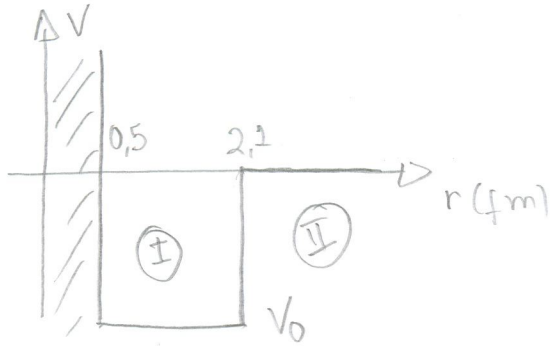


FIG 1

Para calcular V_0, tomamos que $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2}(S^2 - S_1^2 - S_2^2)$.

S pode assumir valores 0 ou 1, assim:

$$p/\ S = 1 \quad \langle \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \rangle = \frac{1}{2}\hbar^2 \left(1(1+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\hbar^2$$

$$p/\ S = 0 \quad \langle \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \rangle = -\frac{3}{4}\hbar^2$$

Desse modo, $V_0 = -V_C - \frac{V_S}{\hbar^2}\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ e assim:

p/ estados ^3S e ^3P, $\boxed{V_0 = 53{,}75 \text{ MeV}}$

p/ estados ^1S e ^1P, $\boxed{V_0 = 38{,}75 \text{ MeV}}$

Ou seja, temos que resolver a eq. Schrödinger em dois poços de potencial com formato da figura 1 e profundidade variável de acordo com o estado.

INSTITUTO DE FÍSICA - USP

NOTA

2

NOME:
PROFESSOR:
DATA:

tomando que a função de onda pode ser separada em parte radial e angular na forma

$$\psi(\vec{r}) = \varphi(r)\, Y_{\ell m}(\theta,\phi)$$

a equação de Schrödinger radial torna-se:

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{d^2}{dr^2}\varphi - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\varphi + k^2\varphi = 0}$$

onde

$$\boxed{k^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2}(E-V)}$$

$$\mu = \frac{m_p \cdot m_n}{m_p + m_n} = 469.45\ \mathrm{MeV}/c^2$$

para os potenciais dessa questão, as soluções são combinações lineares de funções de Bessel (j_ℓ) e neumann (η_ℓ) esfericas.

funções de Bessel e neumann são mostradas abaixo:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$$

$$\eta_0(x) = -\frac{\cos x}{x}$$

$$\eta_1(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$$

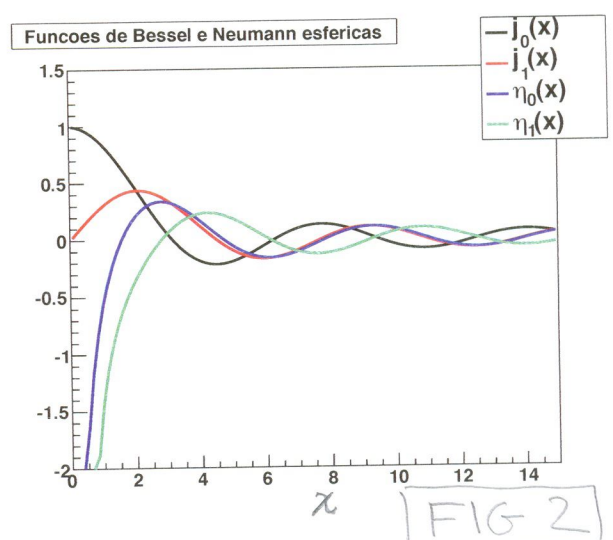


FIG 2

INSTITUTO DE FÍSICA - USP

NOTA

3

NOME:

PROFESSOR:

DATA:

Na região I

$$\boxed{\varphi_I(r) = A\, j_\ell(k_I r) + B\, \eta_\ell(k_I r)} \qquad k_I = \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}(E+V_0)}$$

A e B são tais que $\varphi_I(r=R_1)=0$. Adotando $A=1$, temos

$$\boxed{B = -\frac{j_\ell(k_I R_1)}{\eta_\ell(k_I R_1)}}$$

Na região II

$$\boxed{\varphi_{II}(r) = C\, j_\ell(k_{II} r) + D\, \eta_\ell(k_{II} r)} \qquad k_{II} = \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2} E}$$

Cond. contorno na interface

$$\varphi_I(R_2) = \varphi_{II}(R_2)$$

$$\varphi_I'(R_2) = \varphi_{II}'(R_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} j_\ell(k_I R_2) + B\, \eta_\ell(k_I R_2) = C\, j_\ell(k_{II} R_2) + D\, \eta_\ell(k_{II} R_2) \\ k_I\left(j_\ell'(k_I R_2) + B\, \eta_\ell'(k_I R_2)\right) = k_2\left(C\, j_\ell'(k_{II} R_2) + D\, \eta_\ell'(k_{II} R_2)\right) \end{cases}$$

Que é um sistema de duas equações com duas incognitas (C e D) que pode ser resolvido de modo a obter:

INSTITUTO DE FÍSICA - USP

NOTA

4

NOME: _____

PROFESSOR: _____

DATA: _____

$$D = \frac{\frac{K_I}{K_{II}} j_\ell'(K_I R_2) - j_\ell(K_I R_2)\, j_\ell'(K_{II} R_2)/j_\ell(K_{II} R_2)}{\eta_\ell'(K_{II} R_2) - \eta_\ell(K_{II} R_2)\, j_\ell'(K_{II} R_2)/j_\ell(K_{II} R_2)}$$

$$C = \frac{j_\ell(K_I R_1) - D\, \eta_\ell(K_{II} R_2)}{j_\ell(K_{II} R_2)}$$

A defasagem pode ser obtida a partir das constantes C e D, de modo que

$$\cos\delta = \frac{C}{\sqrt{C^2 + D^2}} \qquad \sin\delta = \frac{-D}{\sqrt{C^2 + D^2}}$$

$$\operatorname{tg}\delta = -D/C$$

Cuidado!
Devido aos domínios das funções arctg, arcsin e arccos deve-se tomar o cuidado em analisar os quadrantes

Resposta a

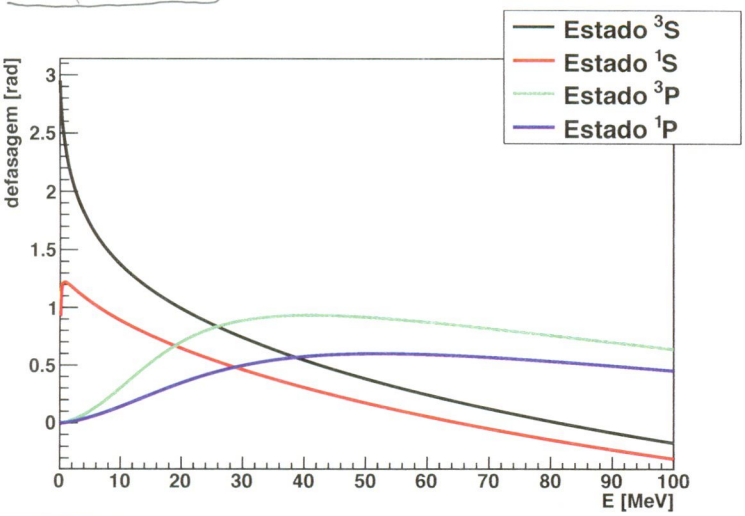


FIG3

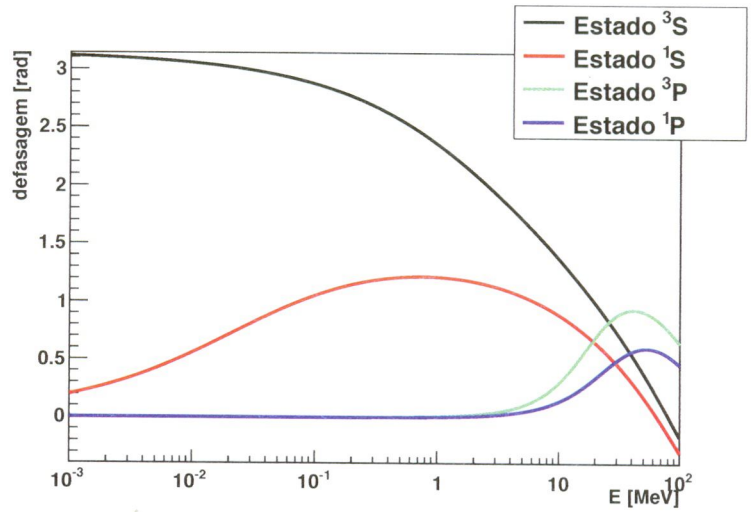


FIG4

INSTITUTO DE FÍSICA - USP

NOME:
PROFESSOR:
DATA:

NOTA

Q1
Q2
Q3
Q4
TOTAL

1

(b) Seções de choque: A seção de choque total é dada por:

$$\sigma_T = \frac{4\pi}{K^2} \sum_{\ell} (2\ell+1) \operatorname{sen}^2 \delta_\ell$$

para o estado de singleto de spin: ^1S e ^1P

$$\boxed{\sigma_T^{SING} = \frac{4\pi}{K^2} \left(\operatorname{sen}^2 \delta_{1S} + 3 \sin^2 \delta_{1P} \right)}$$

para o estado de tripleto de spin: ^3S e ^3P

$$\boxed{\sigma_T^{TRIP} = \frac{4\pi}{K^2} \left(\operatorname{sen}^2 \delta_{3S} + 3 \sin^2 \delta_{3P} \right)}$$

A seção de choque total é a soma das seções de choque de singleto e tripleto ponderadas pela estatística de spin, ou seja

$$\boxed{\sigma_T = \frac{1}{4} \sigma_T^{SING} + \frac{3}{4} \sigma_T^{TRIP}}$$

Que resulta em:

INSTITUTO DE FÍSICA - USP

NOTA

2

NOME:

PROFESSOR:

DATA:

Resposta b

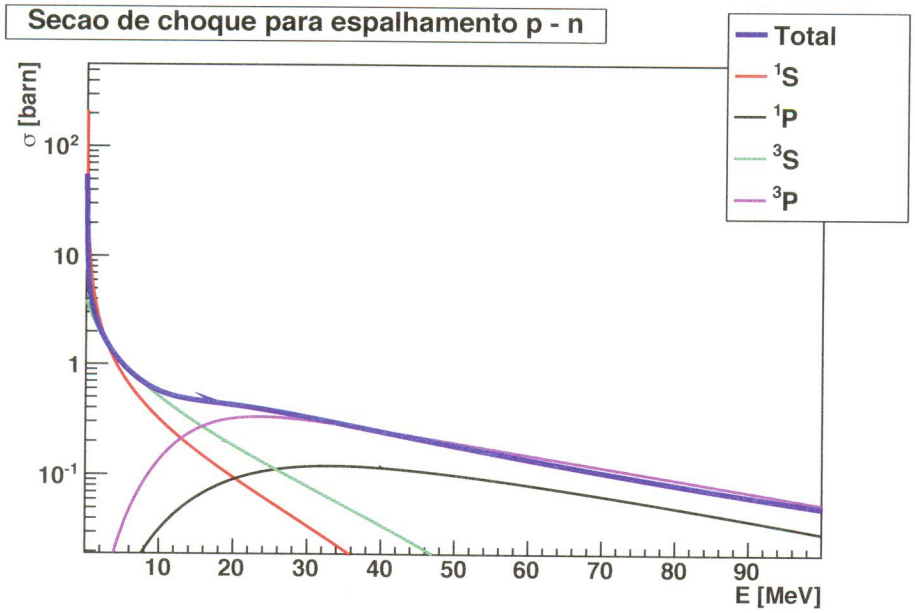


FIG5

OU

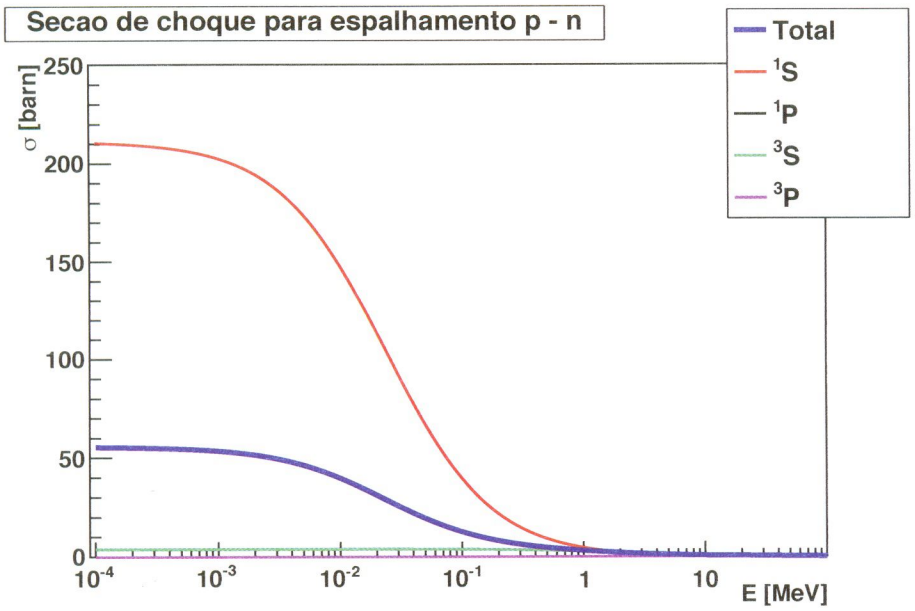


FIG6

Obs: O arrendodamento de $V_c = 49{,}3 \rightarrow 50$ MeV causou um fator ~ 2 de diferença c/ a seção de choque experimental

$\Rightarrow$

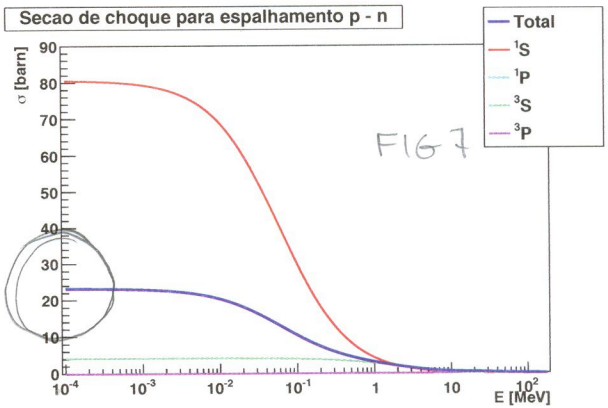


FIG7

INSTITUTO DE FÍSICA - USP

NOTA

3

NOME:

PROFESSOR:

DATA:

Questão 2

$$V_{SO} = -\frac{V_{SO}(r)}{\hbar^2}(\vec{L}\cdot\vec{S})$$

Usando $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \Rightarrow \vec{L}\vec{S} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2)$

há duas possibilidades para J, já que $S = \frac{1}{2}$

$$J = L + \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad J = L - \frac{1}{2}$$

Assim

$$\langle \vec{L}\cdot\vec{S} \rangle = \frac{\hbar^2}{2} L \quad p/\ J = L + \frac{1}{2}$$

$$\langle \vec{L}\cdot\vec{S} \rangle = -\frac{\hbar^2}{2}(L+1) \quad p/\ J = L - \frac{1}{2}$$

Ou seja, os níveis de energia são separados em 2 outros de tal forma que

$$\langle V_{SO} \rangle^{L+1/2} = -\frac{1}{2} L \langle nl | V_{SO}(r) | nl \rangle$$

$$\langle V_{SO} \rangle^{L-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(L+1) \langle nl | V_{SO}(r) | nl \rangle$$

A separação em energia entre esses dois estados é

$$\Delta E(L) = \left(l + \frac{1}{2}\right) \langle nl | V_{SO}(r) | nl \rangle$$

ou seja $\Delta E \propto L$ e a constante de proporcionalidade é

$\langle nl | V \ | nl \rangle$

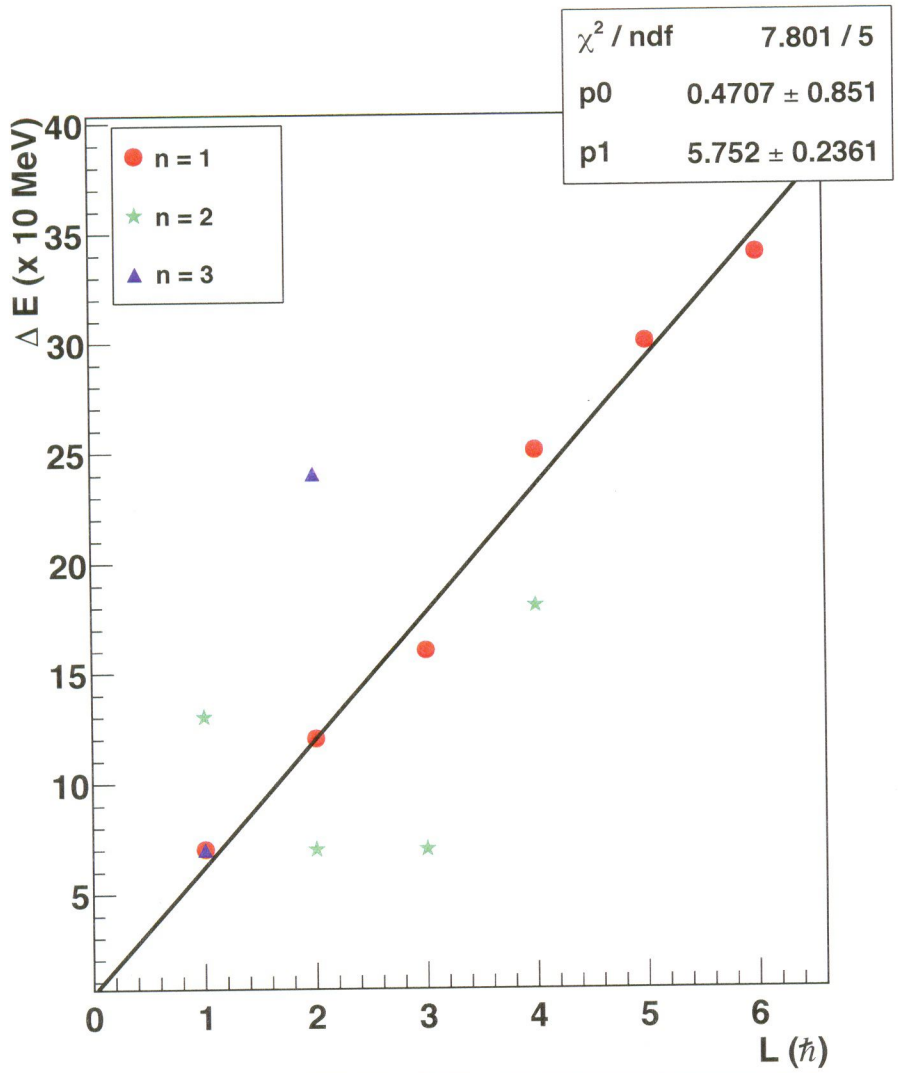
INSTITUTO DE FÍSICA - USP

NOTA

4

NOME:
PROFESSOR:
DATA:

Do gráfico abaixo, tiramos que, de um ajuste linear:

$$\langle nl | V_{so} | nl \rangle \doteq (0{,}57 \pm 0{,}02)\ \text{MeV} \quad p/\ n = 1$$

pois os outros n essa dependência não é tão clara e o valor médio passa depender fortemente da função de onda do estado