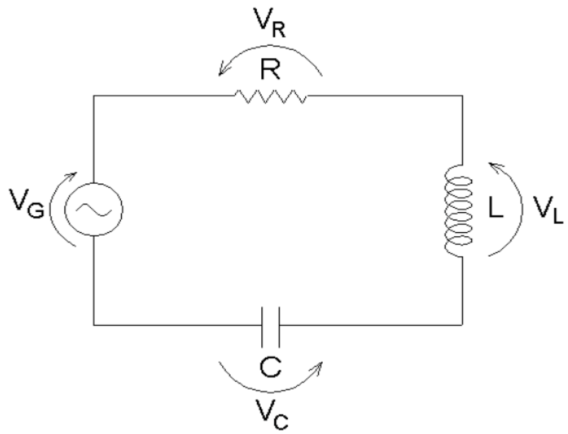
FÍSICA EXPERIMENTAL IV AULA 3

HTTP://WWW.IF.USP.BR/SUAIDE/

Alexandre Suaide
Ed. Oscar Sala

sala 246
ramal 7072

O QUE PODEMOS PREVER DO CIR



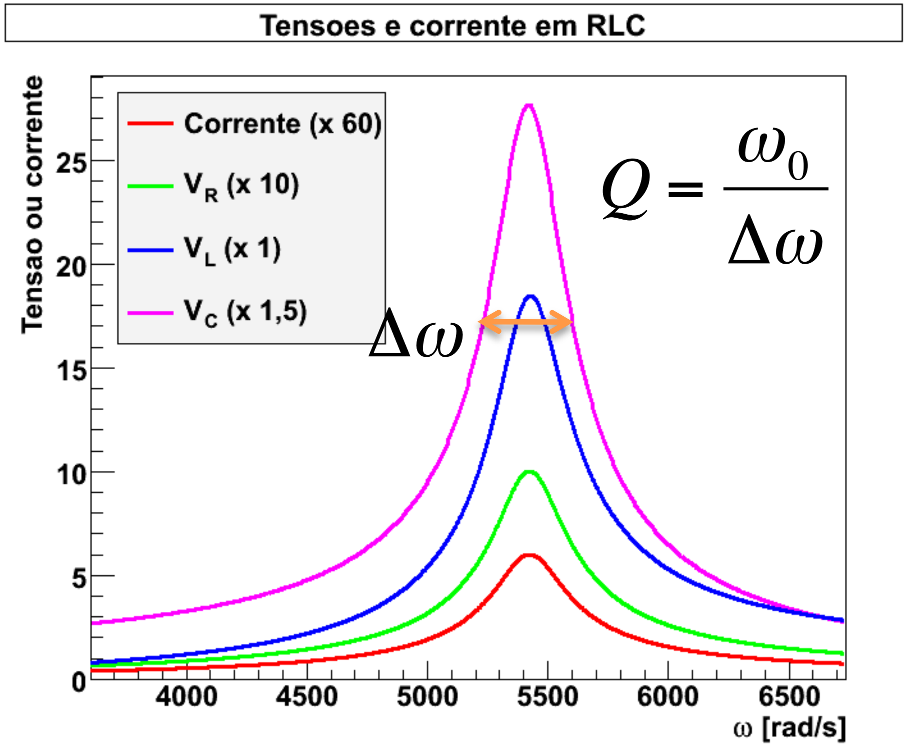
- Tensão em cada elemento do circuito:

$$\hat{V}_X = \hat{i} \cdot \hat{Z}_X$$

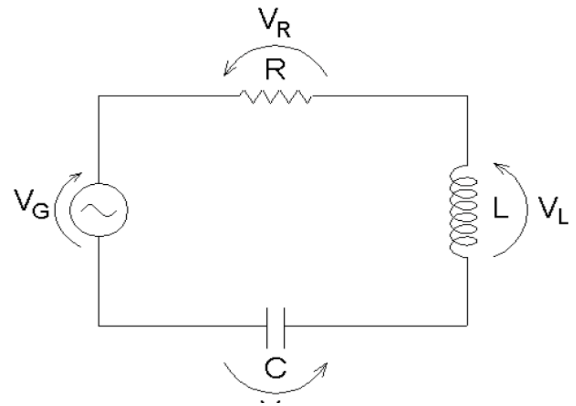
- Ressonância
  - O circuito tem ganho elevado para uma faixa de freqüências estreita e definida

Corrente

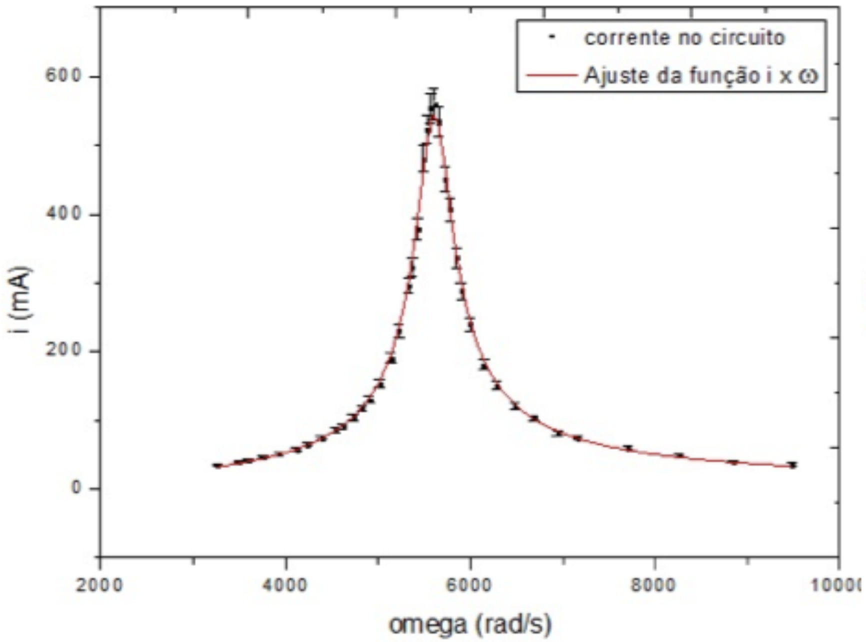
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



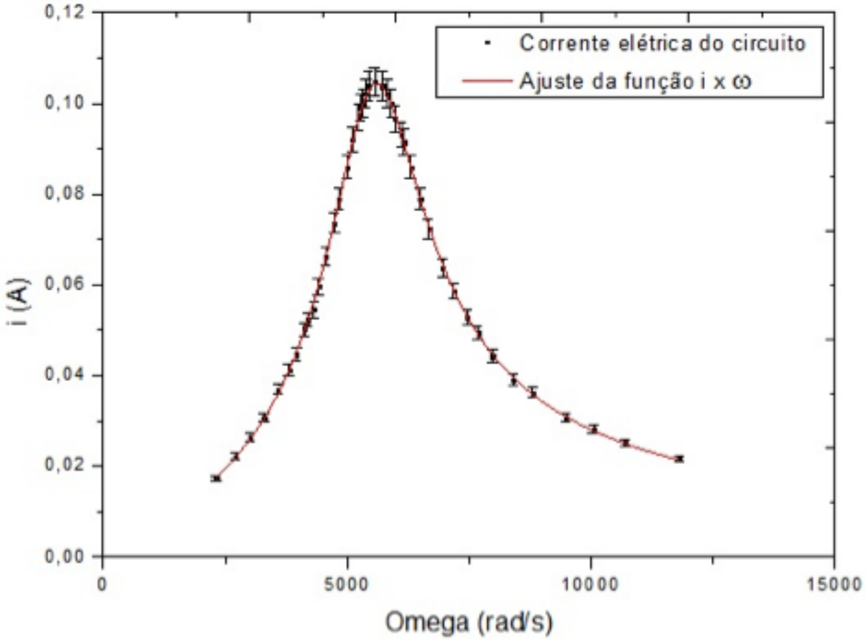
CIRCUITO RLC UTILIZADO



- Os dados se comportaram como previstos?
  - R ~ 1(ou 47) Ω, L ~ 30 mH, C ~ 1 μF.

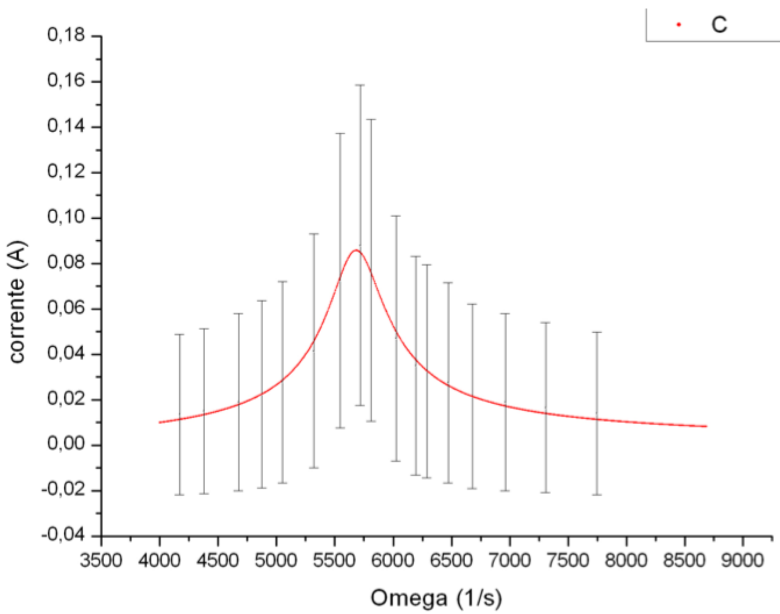


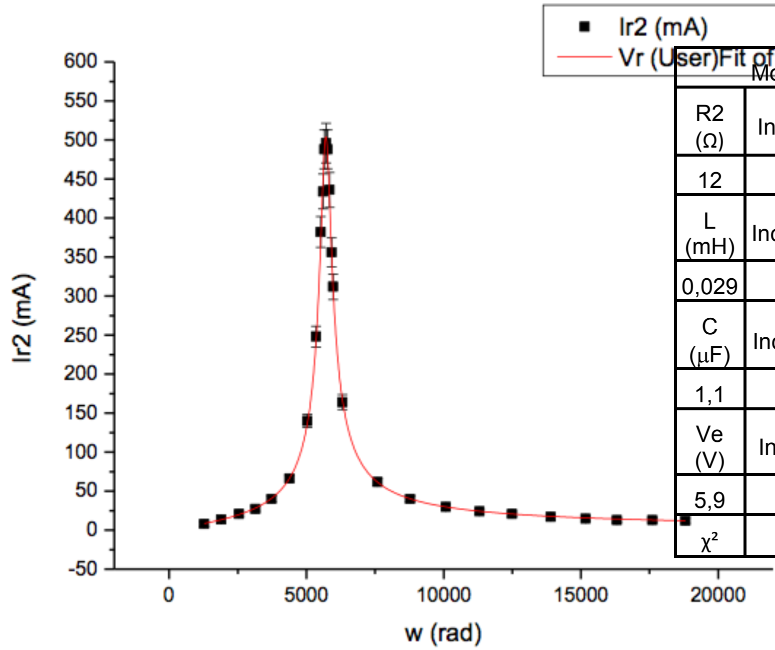
(a) Resistência de 1Ω



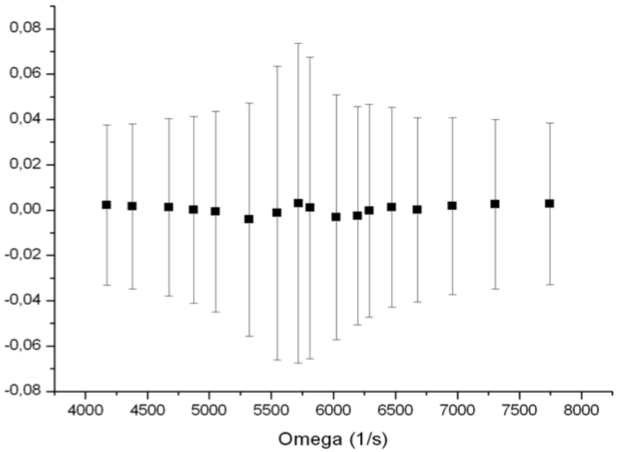
(b) Resistência de 47Ω

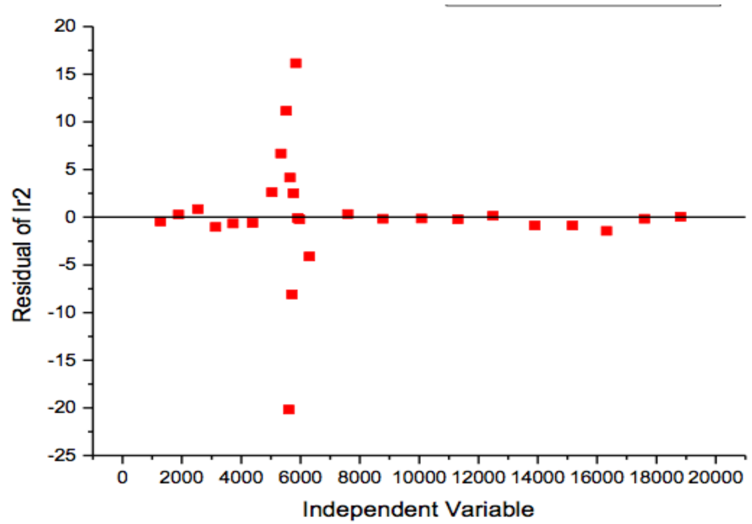
ALGUNS RESULTADOS (CUIDADO COM INCERTEZAS)



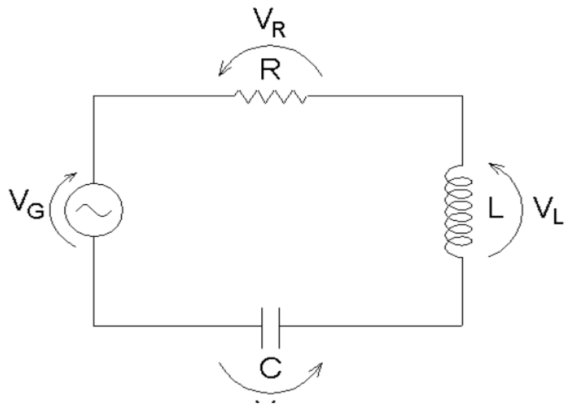


Modelo	
R2 (Ω)	Incerteza (Ω)
12	3
L (mH)	Incerteza(mH)
0,029	0,008
C (μF)	Incerteza (μF)
1,1	0,3
Ve (V)	Incerteza (V)
5,9	1,7
χ^2	0,13





CIRCUITO RLC UTILIZADO

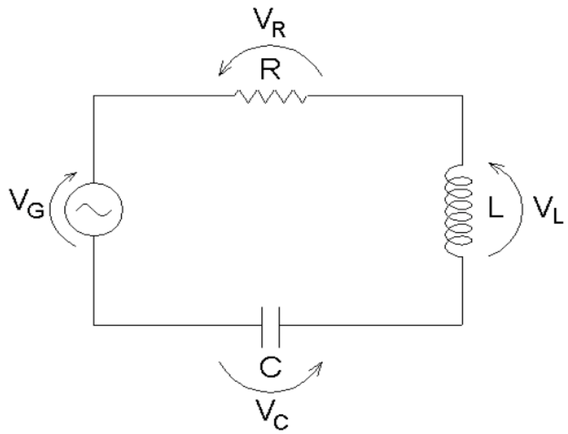


- Os dados se comportaram como previstos?
  - R ~ 1(ou 47) Ω, L ~ 30 mH, C ~ 1 μF.

	R_1	R_2
χ^2	0,699	0,118
R_{aj}	$(11{,}27 \pm 0{,}27)\ \Omega$	$(57{,}33 \pm 0{,}4)\Omega$
V_G	$(6{,}17 \pm 0{,}14)$V	$(5{,}99 \pm 0{,}16)$V
L	$(3{,}01 \pm 0{,}08)10^{-2}H$	$(3{,}01 \pm 0{,}07)10^{-2}$
C	$(1{,}06 \pm 0{,}05)10^{-6}$	$(1{,}06 \pm 0{,}03)10^{-6}$

(a) Resistência de 1Ω (b) Resistência de 47Ω

CIRCUITO RLC UTILIZADO

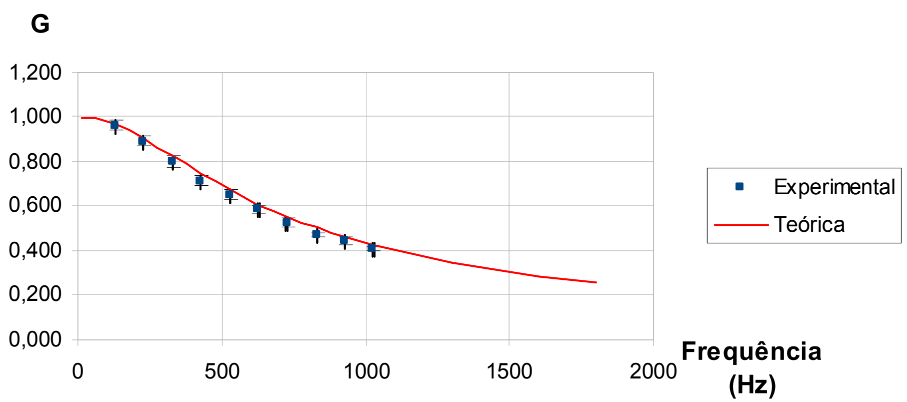


- Vamos supor, inicialmente, que entendemos a Física mas não compreendemos o circuito.
- A resistência vale, de fato, 1 (ou 47) Ω?
  - Alguém mediu com ohmímetro?

$$R_1^{\exp} - R_1^{esperado} \sim R_2^{\exp} - R_2^{esperado} \sim 10\Omega$$

- Parece haver uma resistência “comum” às duas medidas.

- O capacitor é ideal?
  - Estudamos na primeira semana e, dentro das incertezas experimentais podemos considerá-lo assim.

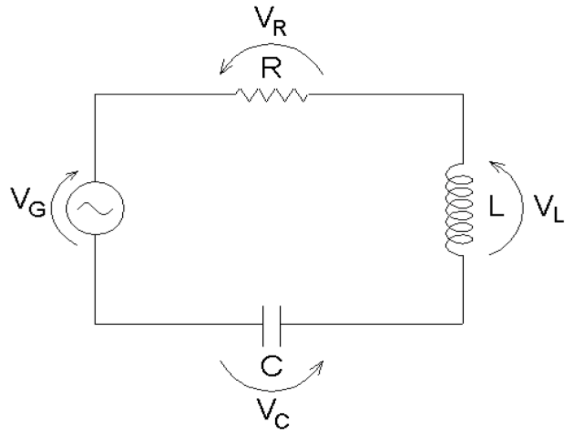


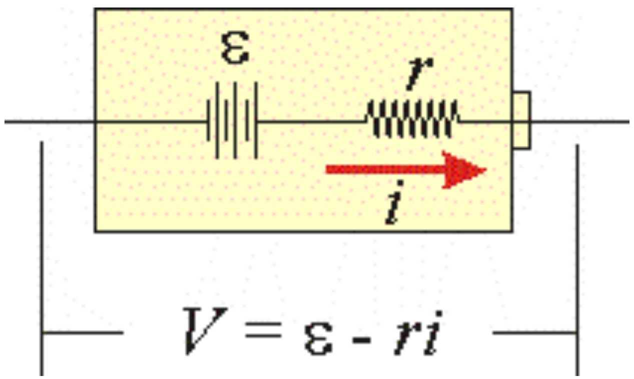
CIRCUITO RLC UTILIZADO

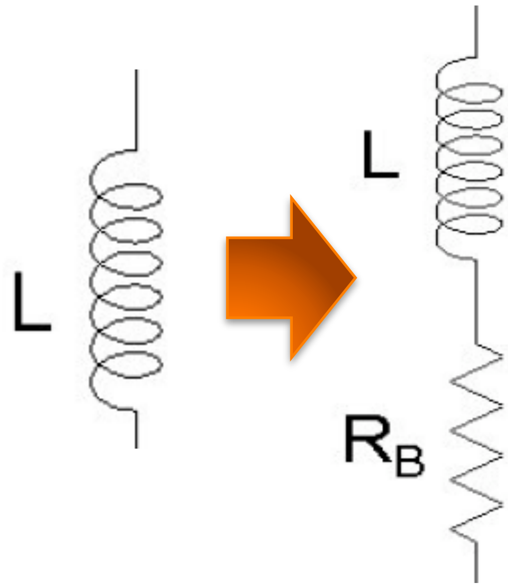
- Quais são as possíveis fontes de dissipação?

$$R = R_{1\Omega} + R_B + R_G$$

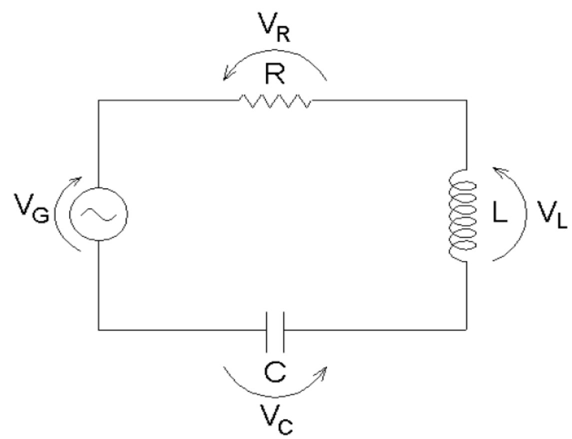
- Indutor (fio enrolado)
- Gerador também consome?
- Outros elementos?







CIRCUITO RLC UTILIZADO



- Como descobrir qual é o valor da resistência do gerador?

$$R = R_{1\Omega} + R_B + R_G$$

- Cálculo de mínimos quadrados
  - Descubro a resistência total do circuito

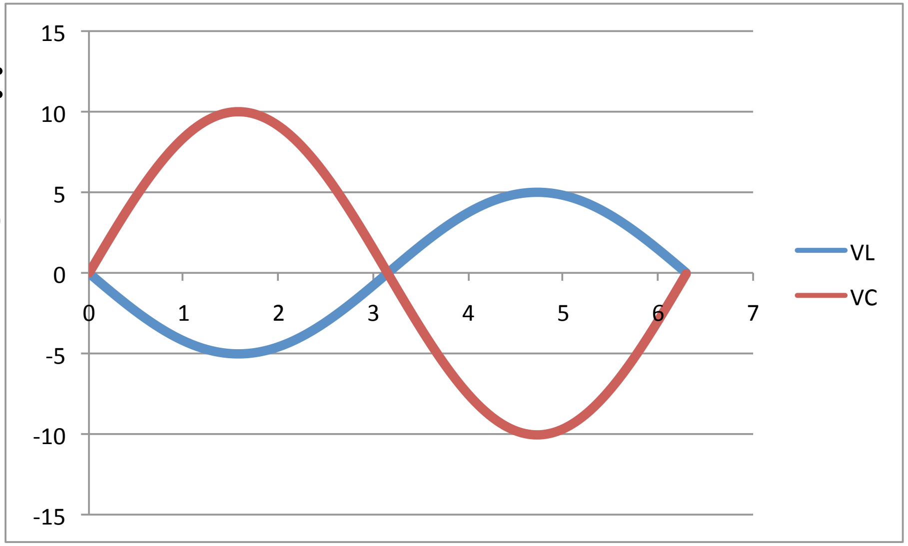
- Conhecendo a resistência da bobina, e admitindo que os fios possuem resistência desprezíveis, basta subtrair a resistência de prova + bobina da resistência total.

Evidências para resistência no indutor.

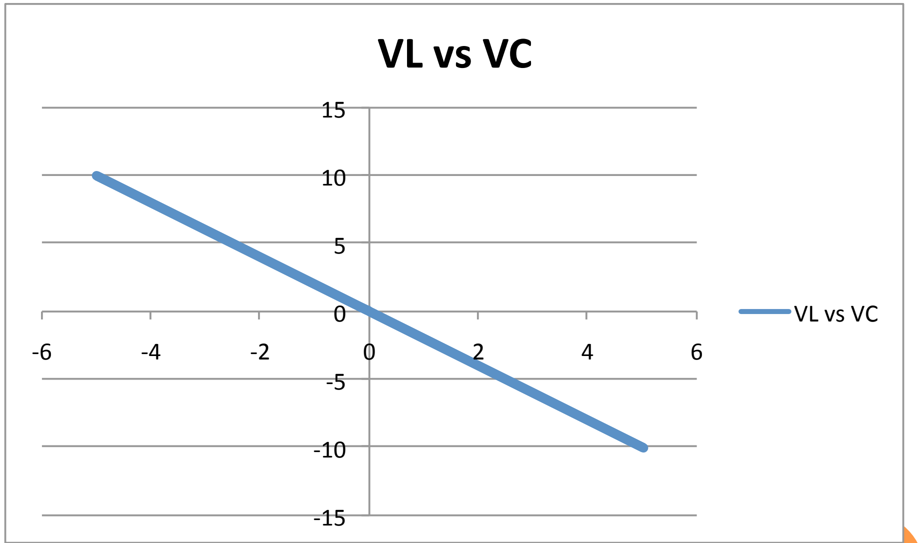
- Eu sei que, no caso ideal:

$$V_L = \mathrm{Re}\left[\hat{V}_L\right] = V_{0R}\cos(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2})$$

$$V_C = \mathrm{Re}\left[\hat{V}_C\right] = V_{0R}\cos(\omega t - \phi - \frac{\pi}{2})$$



- Qual é o diagrama de fases da tensão no capacitor pela tensão no indutor?
- E se o indutor não for ideal?

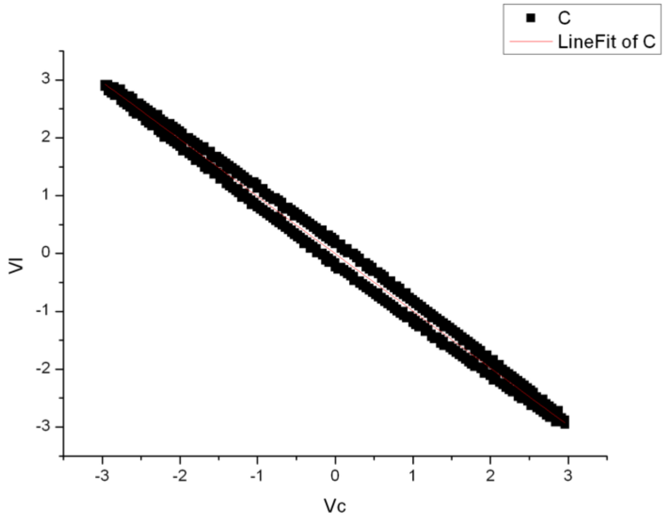


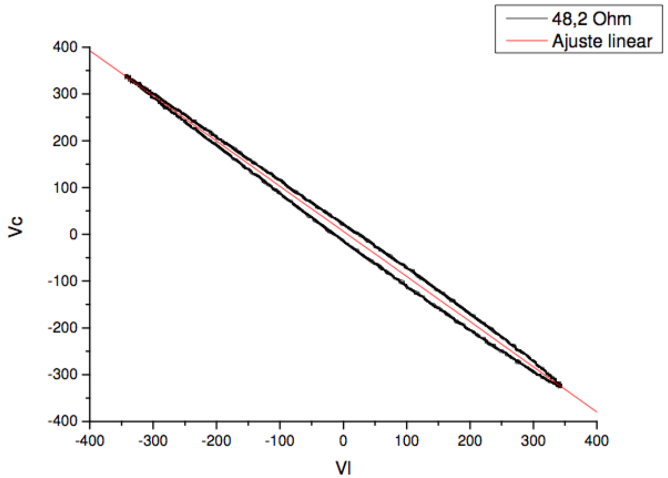
Evidências para resistência no indutor.

- Indutor não ideal:

$$V_L = \mathrm{Re}\left[\hat{V}_L\right] = V_{0R}\cos(\omega t - \phi + \phi_1)$$

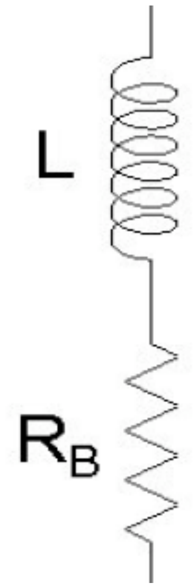
$$V_C = \mathrm{Re}\left[\hat{V}_C\right] = V_{0R}\cos(\omega t - \phi - \frac{\pi}{2})$$



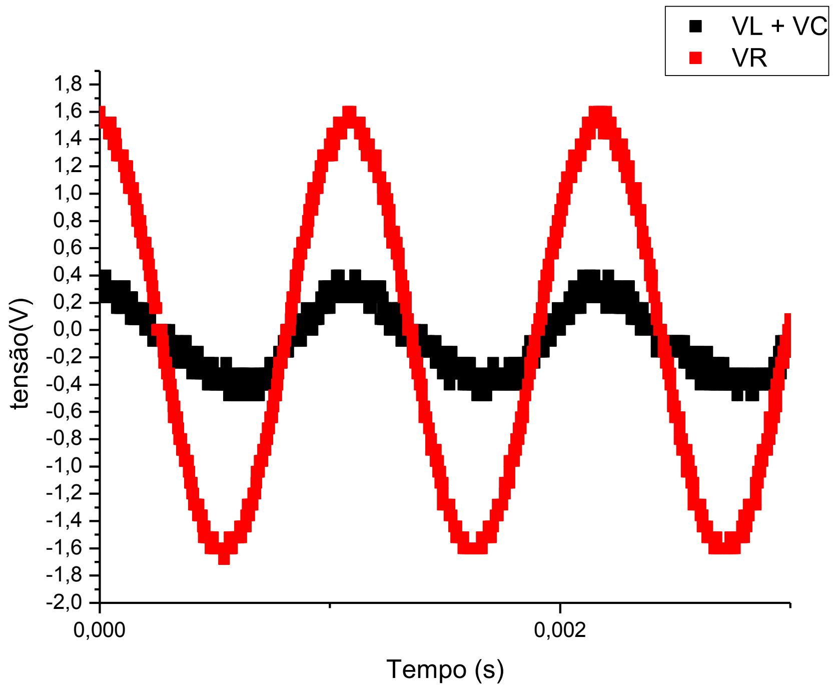


- Eu tenho como descobrir a resistência no indutor?

Resistência do indutor



- Na ressonância, $V_L = -V_C$ se o indutor for ideal.
- No caso real, $V_{indutor} = V_L + V_{RB}$
- Então, $V_{RB} = V_{indutor} + V_C$ (que pode ser medido)



Como $V_{R'} = V_C + V_L = R'i$ e $V_R = R\,i$,

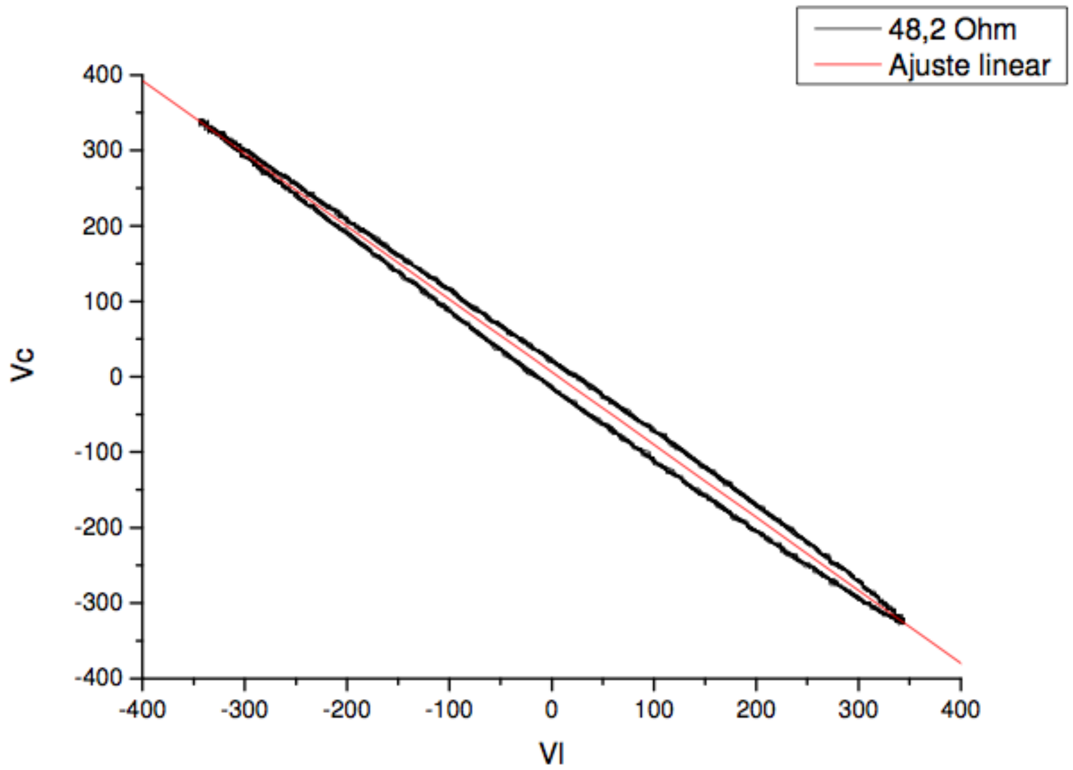
encontrar $R' = \frac{V_{R'}}{V_R} R$. A tabela 7 mostra o result

Tabela 7 - valor calculado para R' e valor nominal

R'(Ω)	Incerteza (Ω)	R(Ω)	Incerteza (Ω)	Teste Z
9,7	0,5	7,7	0,4	3

CUIDADO: AJUSTE DE FUNÇÃO QUE NÃO DESCREVE OS DADOS

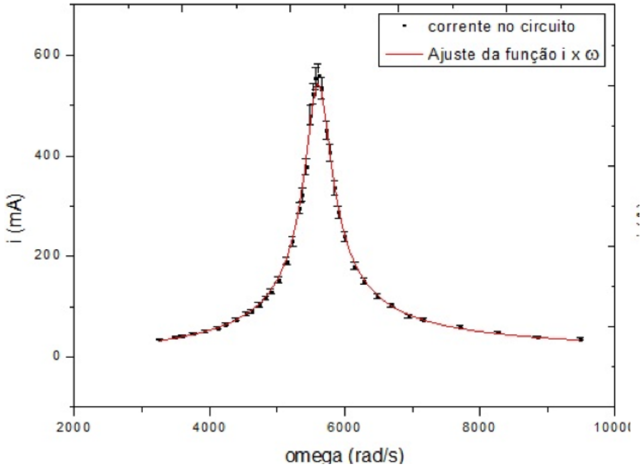
- Alguns grupos ajustaram retas e tentaram interpretar os coeficientes. Isso é razoável?

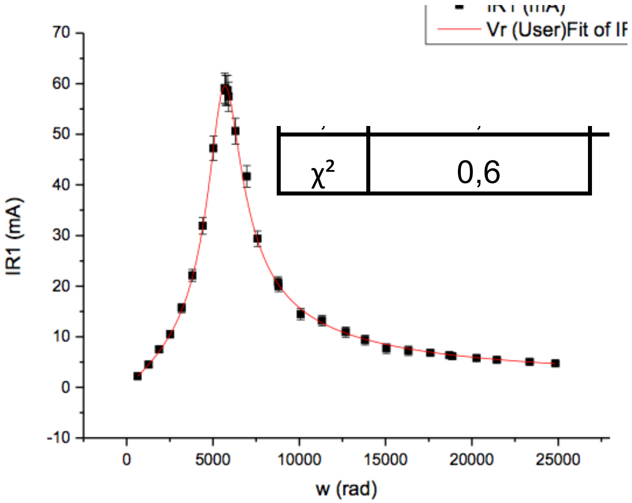


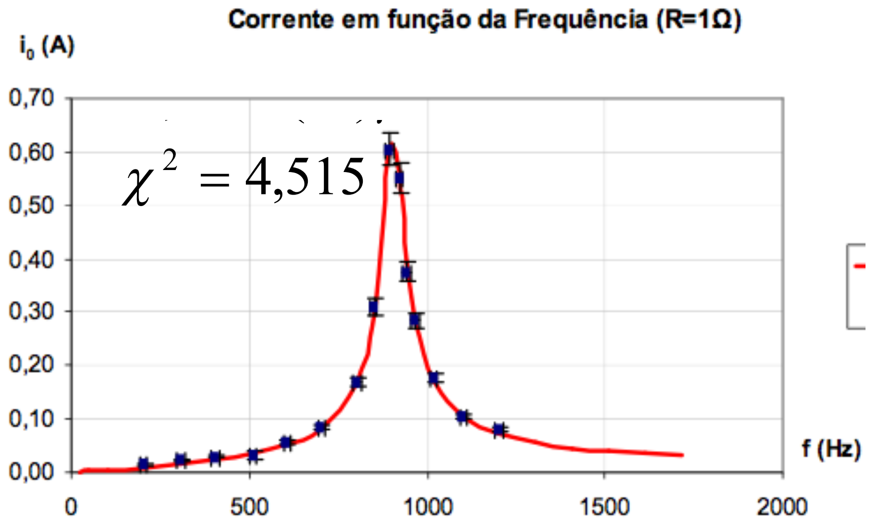
QUALIDADE DOS AJUSTES

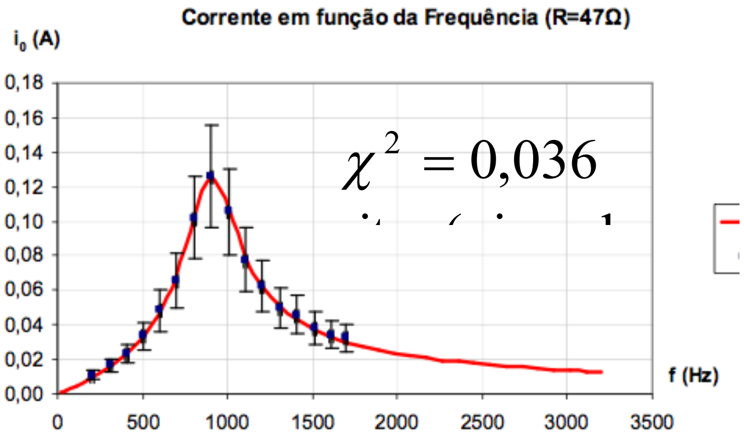
- Como eu avalio?

	R_1	R_2
χ^2	0,699	0,118
R_{aj}	$(11{,}27 \pm 0{,}27)\ \Omega$	$(57{,}33 \pm 0{,}4)\Omega$
V_G	$(6{,}17 \pm 0{,}14)$V	$(5{,}99 \pm 0{,}16)$V
L	$(3{,}01 \pm 0{,}08)10^{-2}H$	$(3{,}01 \pm 0{,}07)10^{-2}$
C	$(1{,}06 \pm 0{,}05)10^{-6}$	$(1{,}06 \pm 0{,}03)10^{-6}$







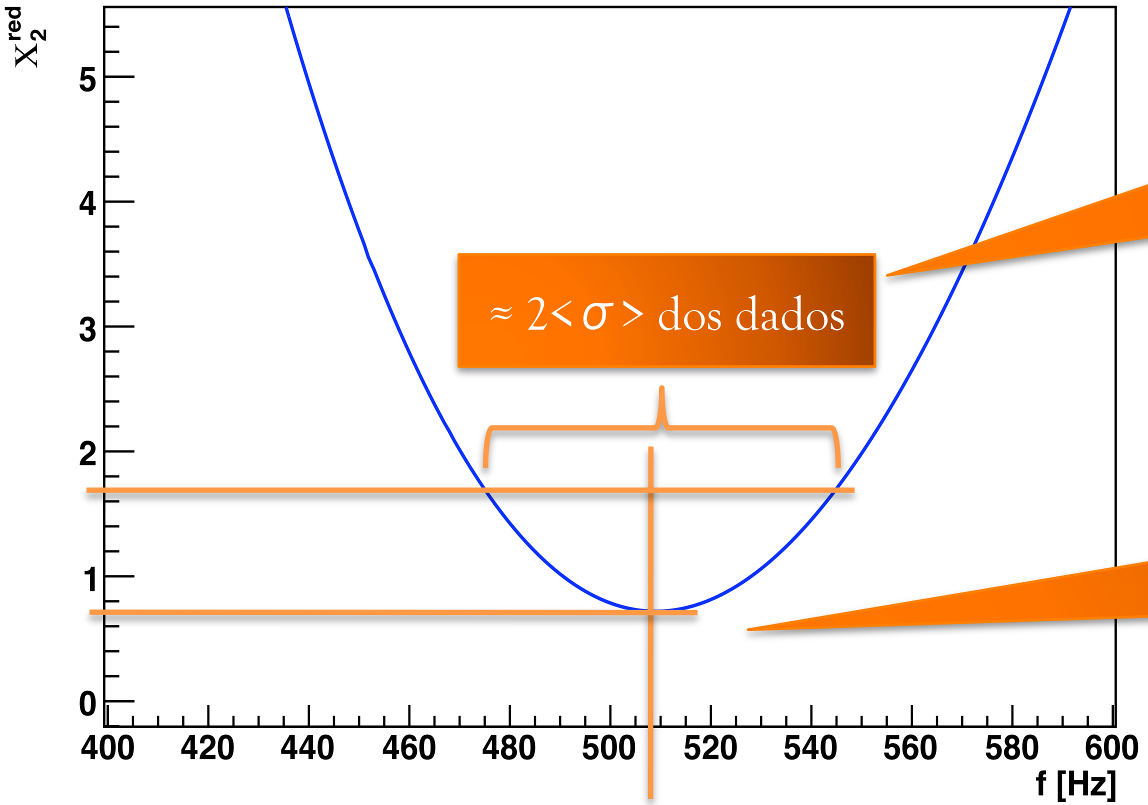


Um pouco de estatística...

Caixa de Galton

Fazendo um ajuste de dados

- Método de mínimos quadrados: $$X^2_{red} = \frac{1}{N-n}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{y_i - f(x_i)}{\sigma_i}\right)^2$$



A incerteza do parâmetro ajustado é, aproximadamente, $\sigma/\sqrt{N}$

$$f = 508 \pm 11\ Hz$$

Quando um ajuste é bom? Como eu posso usar o X^2 como teste de qualidade?

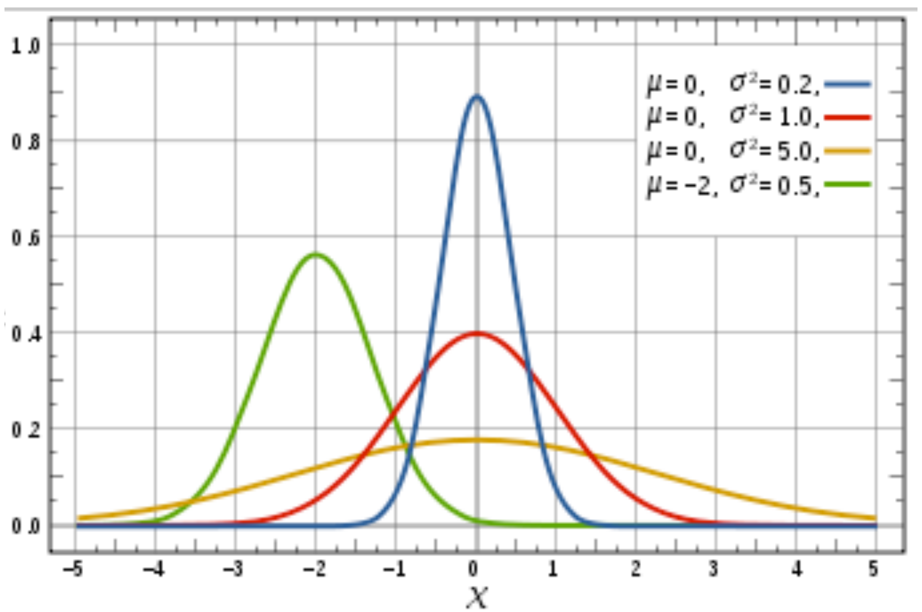
Funções de densidade de probabilidade (F.D.P.)

- Em uma análise estatística como que uma grandeza está distribuída?
- Qual a probabilidade de uma grandeza assumir um determinado valor?
- Como comparar duas grandezas que se distribuem estatisticamente?
- Função densidade de probabilidade
  - Função que estabelece a distribuição estatística de um conjunto de dados. É uma medida da probabilidade de obter um determinado valor nesse conjunto de dados.

FUNÇÕES DE DENSIDADE DE PROBABILIDADE (F.D.P.)

- A F.D.P. mais conhecida é a distribuição normal, ou gaussiana.

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



Construindo algumas F.D.P.

- Seja uma grandeza qualquer (x) que segue uma F.D.P. normal, caracterizada por um valor verdadeiro (μ) e uma variância (σ_μ) desconhecidos.

- Uma boa estimativa de μ e σ_μ pode ser obtida através da medida repetitiva de x, formando uma amostra $X = \{x_i\}$, e do cálculo de valores médios ($x_{médio}$) e desvio padrão (σ) da amostra.

- Quais as F.D.P. de $x_{médio}$, σ e da função X^2?

- Como essas F.D.P. dependem no número de repetições da medida (número graus de liberdade, n ou ndf)?

MÉTODO UTILIZADO

- Vamos realizar um experimento virtual, no qual iremos simular a obtenção da amostra $X_{ndf} = \{x_i\}$.

- A partir dessa amostra vamos calcular a variável de interesse (média, desvio padrão, etc.)

- Vamos repetir esse experimento virtual um número muito grande de vezes de modo a obter as F.D.P. das variáveis estudadas.

PARA SIMPLIFICAR O PROBLEMA

- Ao invés de usar a amostra X, vamos fazer uma mudança de variável tal que

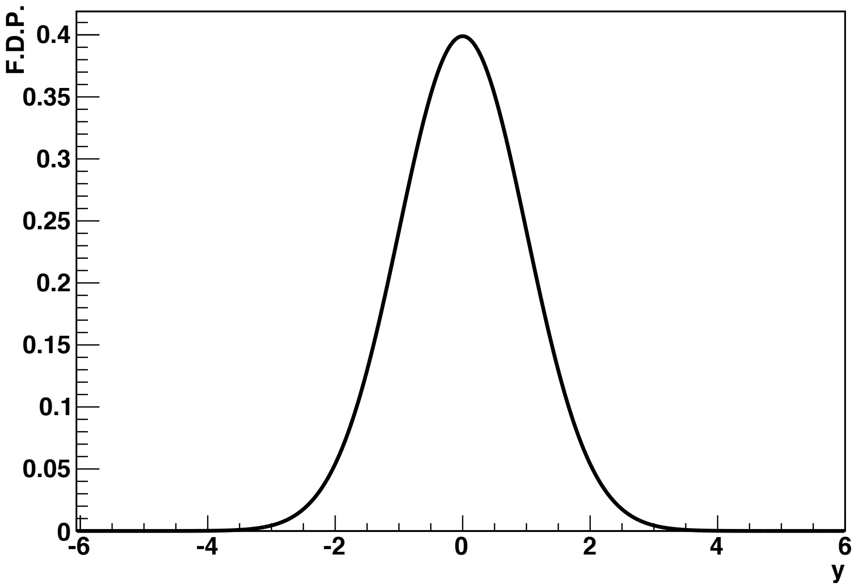
$$Y = \{y_i\} \rightarrow y_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma_\mu}$$

- Ou seja, vamos estudar uma amostra de valor verdadeiro 0 e variância 1.
  - As formas analíticas das diversas F.D.P. são construídas desse modo. Para F.D.P. com médias e variâncias diferentes, basta uma mudança de escala.
  - Isso equivale à análise da distribuição de resíduos quaisquer, conhecendo-se os valores verdadeiros das distribuições.
    - E se eu não conheço os valores verdadeiros e preciso estimá-los?
      - 100% dos casos em física experimental ☺

F.D.P. DE *Y*.

- Y segue uma distribuição normal de valor verdadeiro 0 e variância 1, ou seja:

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

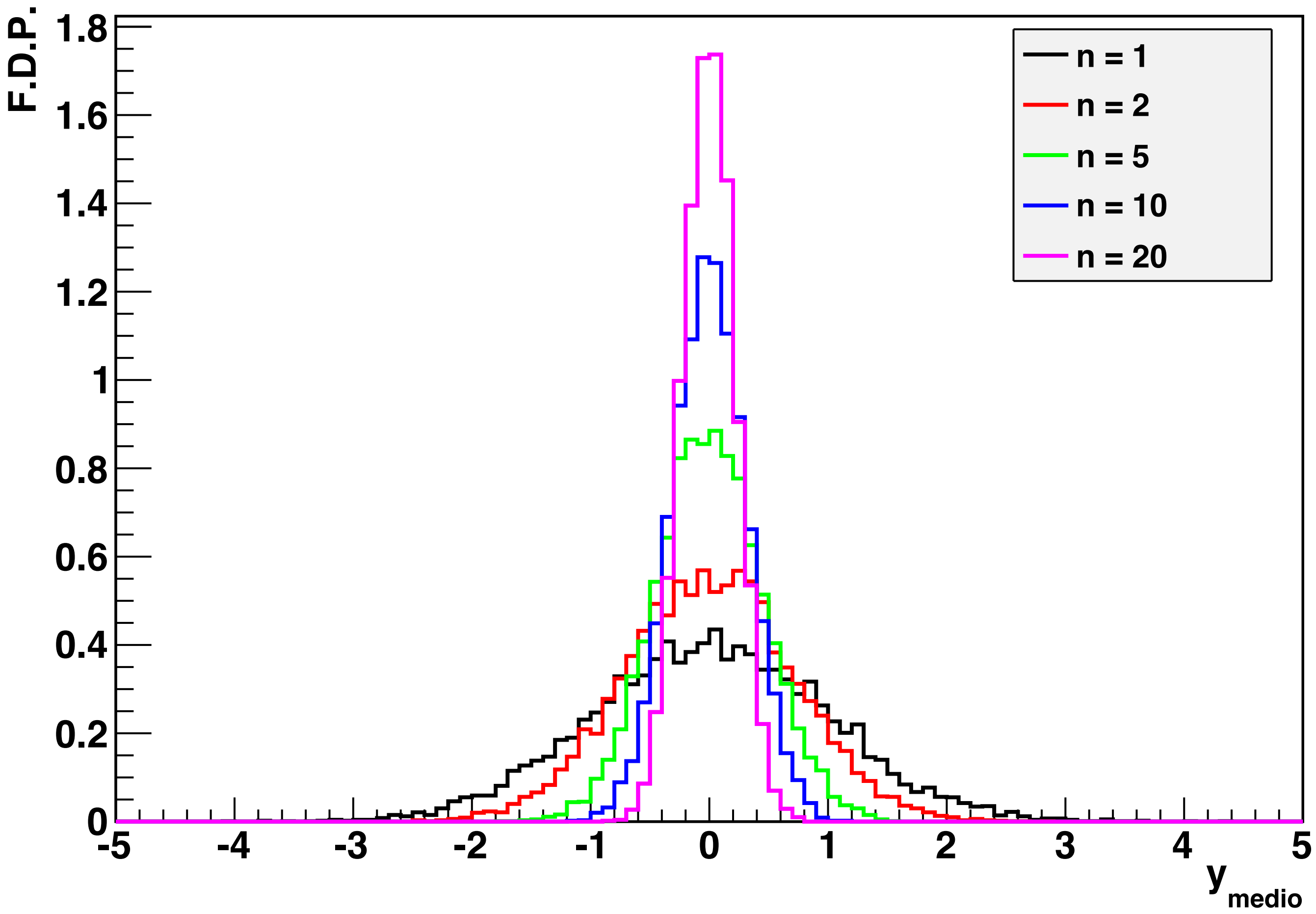


F.D.P. DE $Y_{MÉDIO}$.

- Vamos calcular a distribuição de $y_{médio}$ para vários tamanhos de amostra (n). Vamos verificar qual a forma da distribuição e suas características.

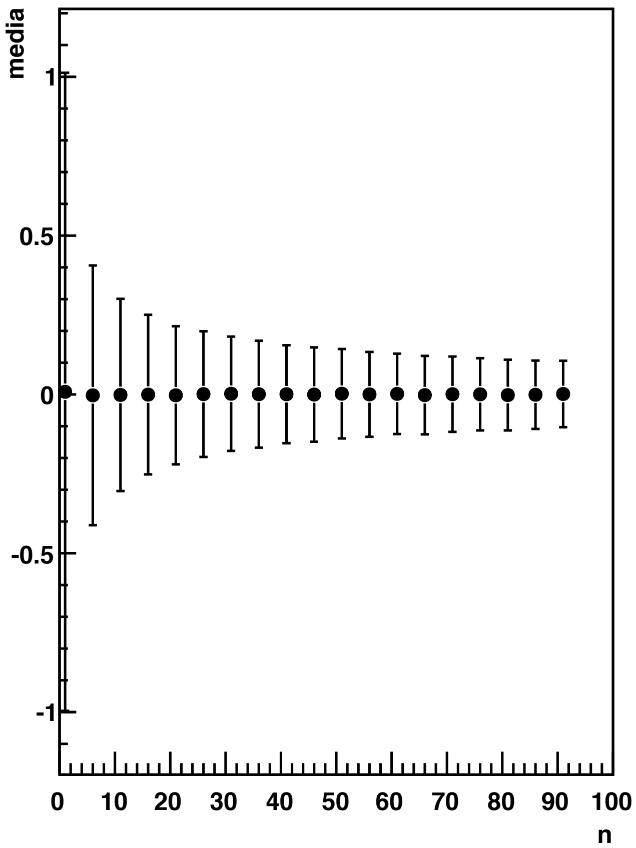
- A distribuição de $y_{médio}$ é normal? Se for, qual a variância dessa distribuição? Depende do tamanho (n) da amostra?

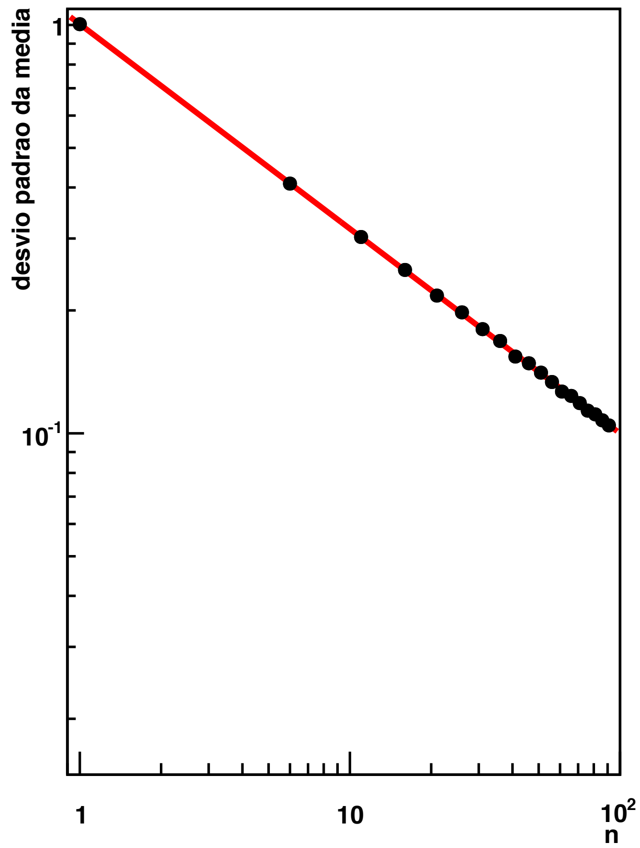
F.D.P. DE $Y_{MÉDIO}$.



F.D.P. DE $Y_{MÉDIO}$.

- Pode-se mostrar que a F.D.P. do valor médio de uma amostra normal é também uma função normal, cujo valor verdadeiro é o mesmo mas a variância diminui com o aumento do tamanho da amostra, ou seja:





$$\sigma_{\overline{\mu}} = \frac{\sigma_{\mu}}{\sqrt{n}}$$

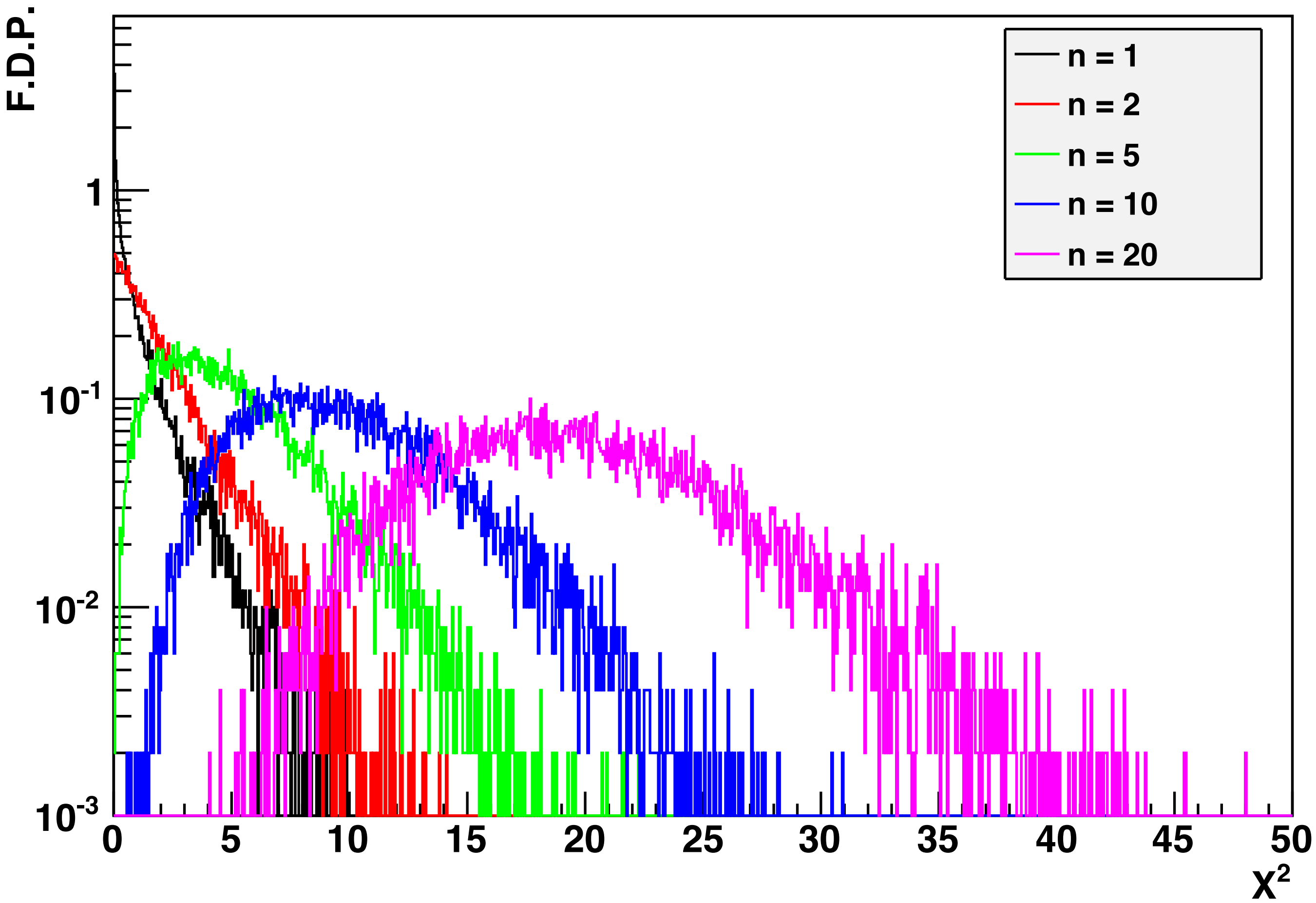
F.D.P. DE X^2.

- A função X^2 é definida como:

$$X^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma_\mu} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

- A F.D.P. é obtida calculando o valor de X^2 para cada conjunto de dados simulado

F.D.P. DE X^2.



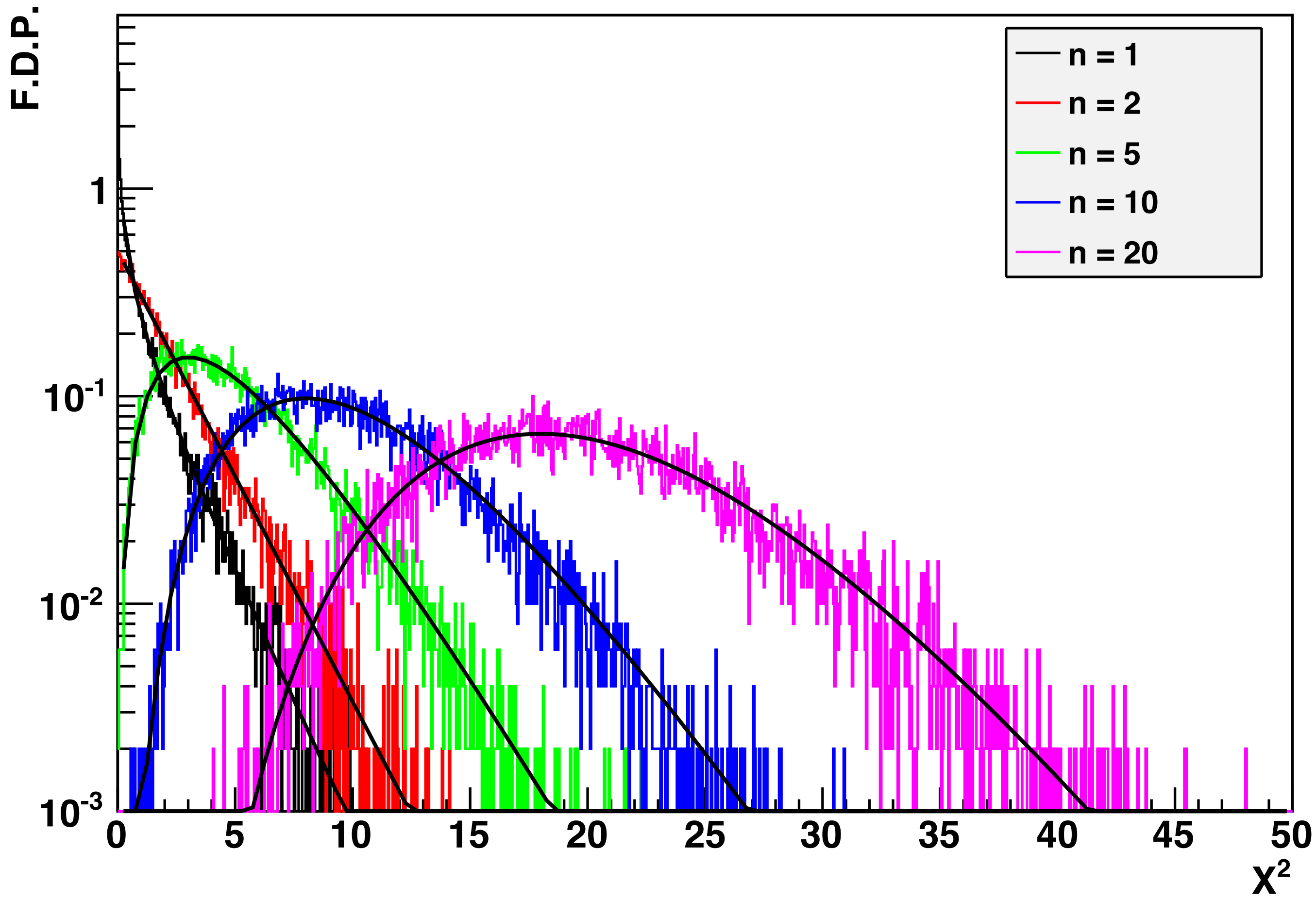
F.D.P. DE X^2.

- A F.D.P. não segue mais uma distribuição normal:

$$p(\zeta) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\zeta^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{\zeta}{2}}$$

- Onde Γ é a função gama, n é o número de graus de liberdade e ζ, o valor de X^2.

F.D.P. DE X^2.



F.D.P. DE X^2_{RED} E σ.

- A função X^2_{red} é definida como:

$$X^2_{red} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma_\mu}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

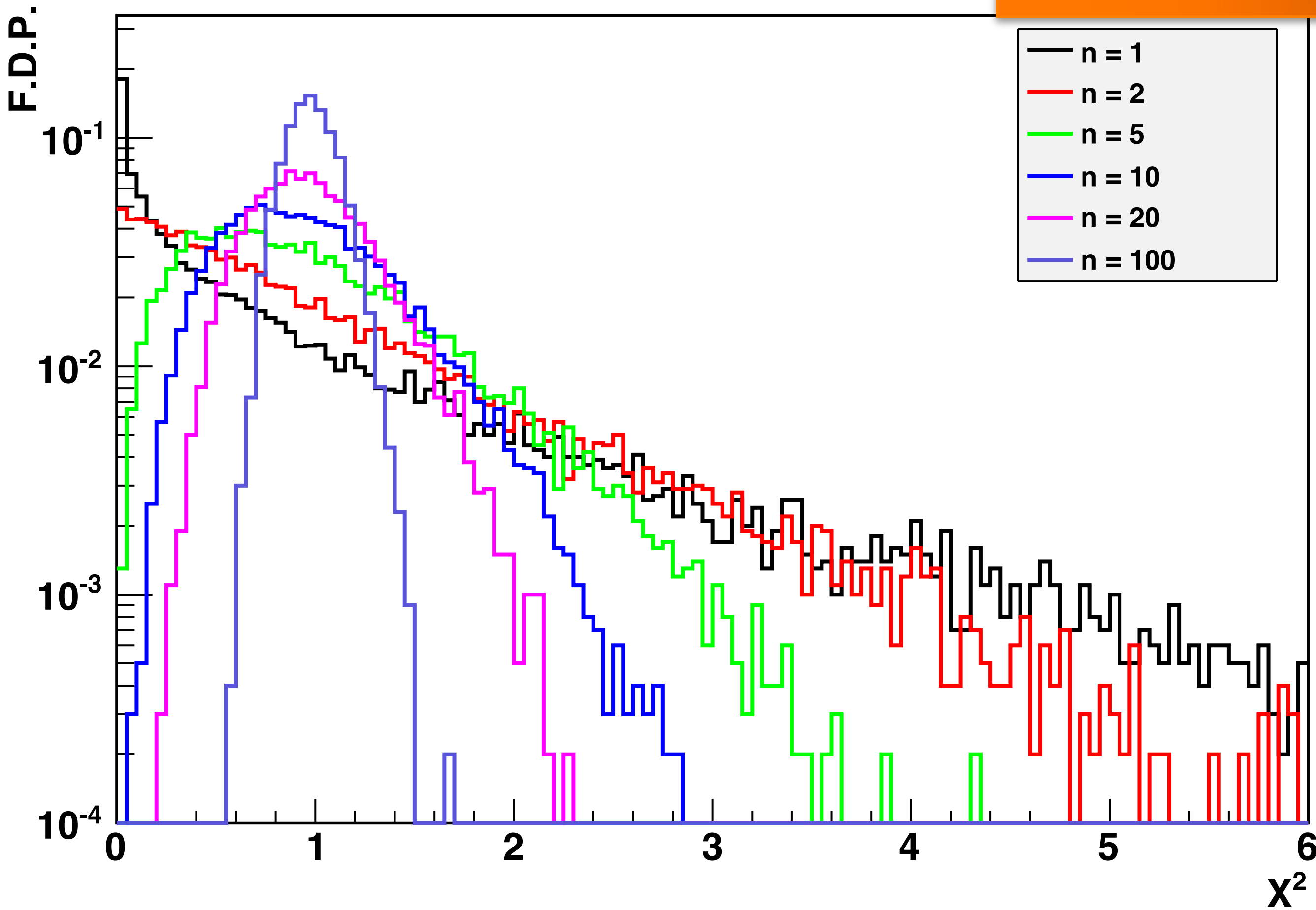
- Por outro lado, a variância de um conjunto de medidas é:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

- Ou seja, essas grandezas são muito similares e seguem a mesma F.D.P.

F.D.P. DE X^2_{RED} E σ.

Note que quanto maior o número de graus de liberdade, mais estreita é a distribuição.



F.D.P. DE X^2_{RED} E σ.

- X^2_{red} e σ são importantes em testes de significância.
  - A função X^2_{red} é calculada quando se faz um ajuste de curvas. Como avaliar se o ajuste é bom?
  - Em uma medida estatística, como saber se a variância que estou obtendo é representativa?

- Como fazer testes de compatibilidade?
  - Por exemplo, o teste de z.
    - Devemos ter cuidado, contudo, quando o número de graus de liberdade é pequeno. Veremos isso mais a frente. Por enquanto, vamos usar como está.

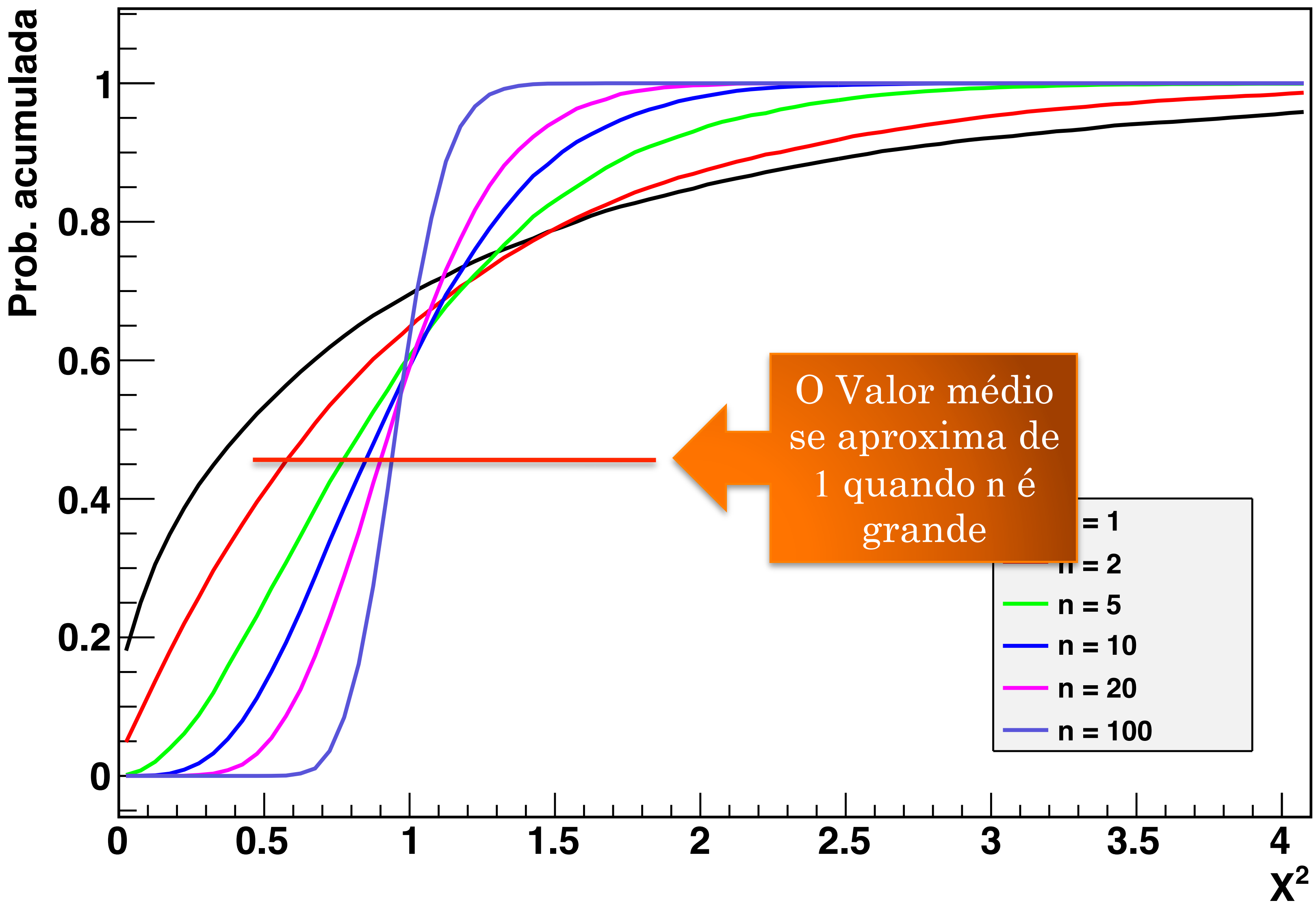
PROBABILIDADE ACUMULADA

- Podemos definir como probabilidade acumulada a grandeza:

$$P(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt \rightarrow \begin{cases} \text{Probabilidade da variável } t \\ \text{assumir um valor menor ou} \\ \text{igual a } x. \end{cases}$$

- Essa grandeza é particularmente útil para definir intervalos de confiança
  - Ex: qual o intervalo de 95% de confiança para a distribuição de X^2_{red} de um ajuste com 5 graus de liberdade?

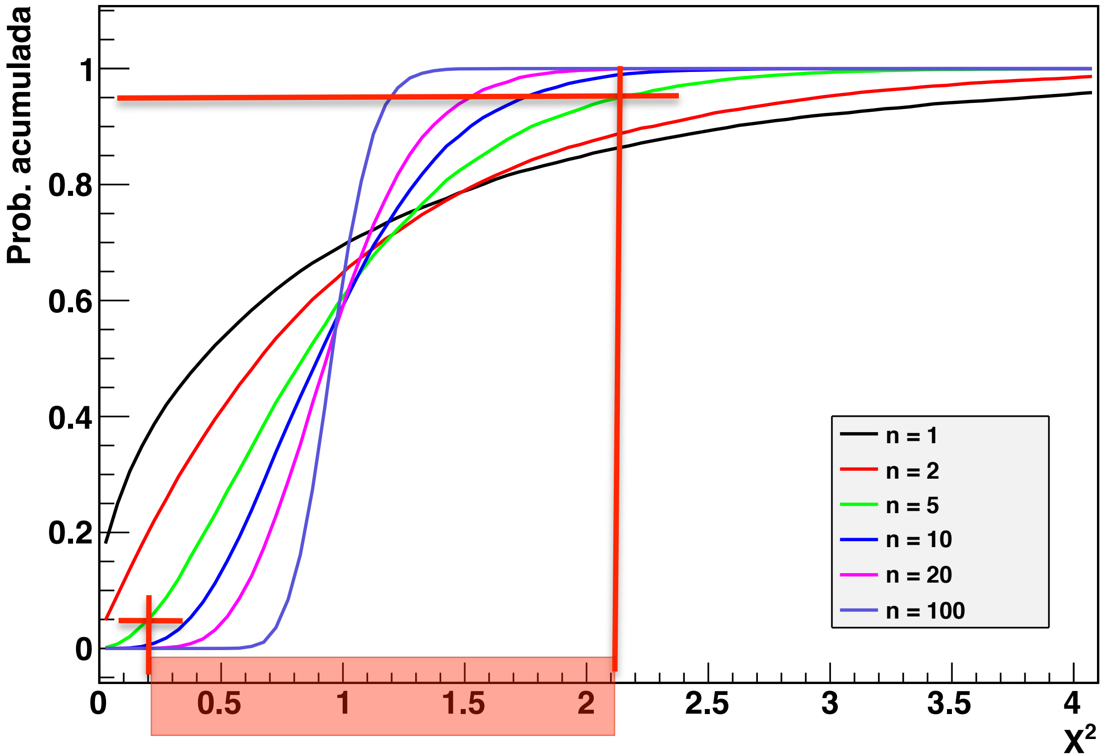
PROBABILIDADE ACUMULADA DE X^2_{RED} (OU σ)



PROBABILIDADE ACUMULADA DE X^2_{RED} (OU σ)

- Se eu faço um ajuste de 5 graus de liberdade, qual o intervalo esperado de X^2_{red} com 95% de confiança?

$$0{,}2 < X^2_{red} < 2{,}1$$



MORAL DA HISTÓRIA

- Testes de chi-quadrado e análise de resíduos (análise mesmo, não apenas fazer um gráfico) constituem ferramentas poderosas na validação de resultados experimentais.
  - Usem esses testes sempre!

- Para pensar um pouco
  - Análise de dados constitui um procedimento no qual grande parte é repetitiva. Muitos passos são quase sempre os mesmos, com pequenas variações.
  - Desenvolver ferramentas pessoais pode aliviar até 90% do tempo de uma análise de dados
    - Planilhas pré-formatadas
    - Arquivos origin pré-montados
    - Programas de computador (!!!!!!!)

AULA DESTA SEMANA

- Caos em sistemas físicos – Uma introdução
  - Introdução a caos e sistemas caóticos
  - Estudo de crescimento de populações
    - Mapa logístico

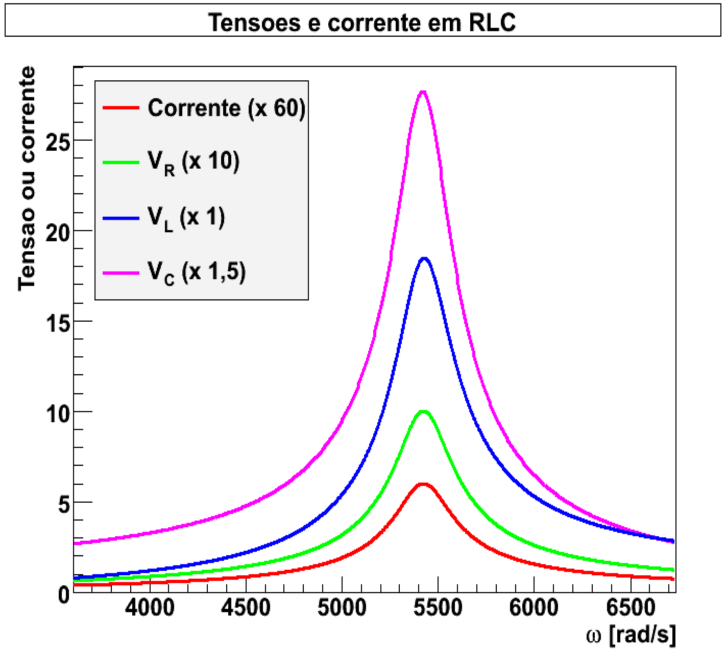
RLC E OUTROS SISTEMAS FÍSICOS

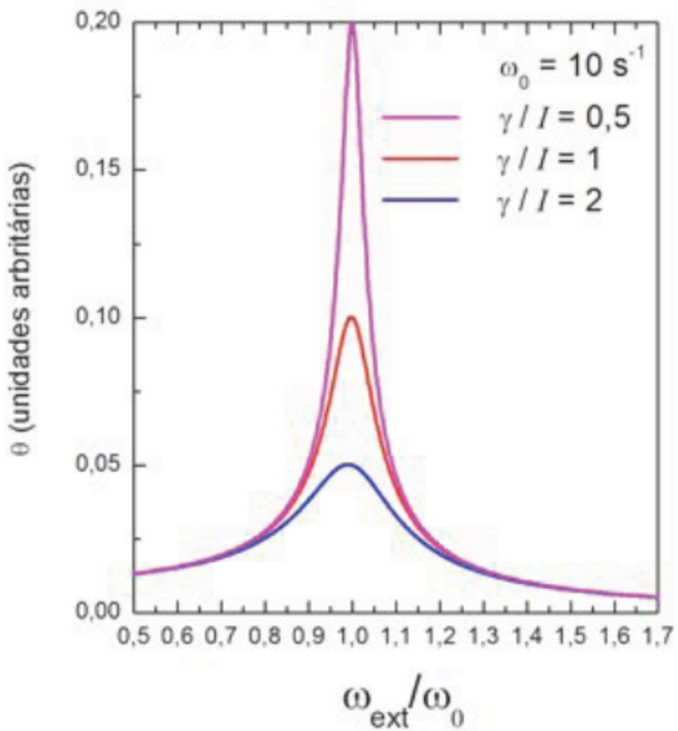
RLC

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_G \cos(\omega t)$$

RM

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma\frac{d\theta}{dt} + \mu B\theta = F\cos(\omega t)$$





Ambos sistemas apresentam o fenômeno de ressonância

MOTIVAÇÃO PARA AS PRÓXIMAS DUAS SEMANAS

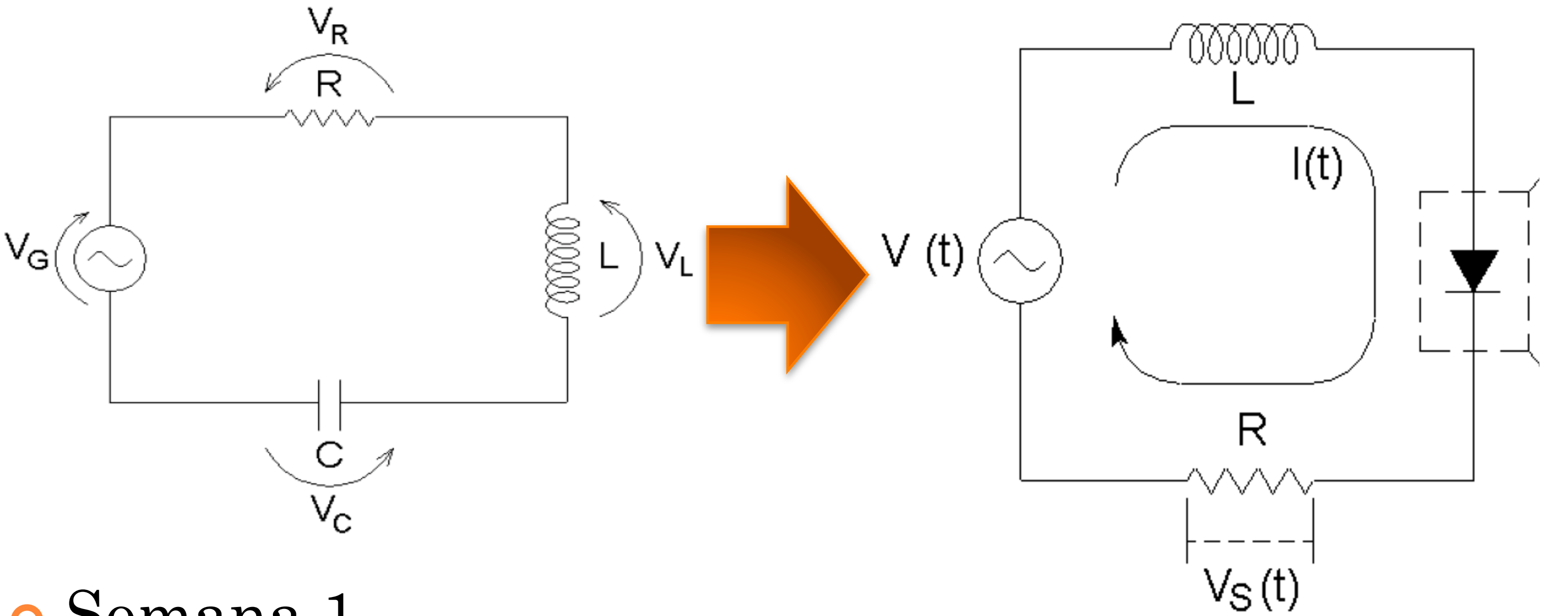
- Será que a introdução de efeitos não lineares no RLC mudaria o comportamento observado?

- Existe algum fenômeno físico interessante e novo que pode ser explorado?

- Resposta: SIM!
  - Nas próximas semanas estudaremos o que acontece se trocarmos o capacitor do circuito por um diodo
    - Diodo → capacitor não linear
  - A dinâmica muda totalmente → Caos

OBJETIVOS PARA AS PRÓXIMAS DUAS SEMANAS

- Estudar o circuito RLD (ou RLC não linear)



- Semana 1
  - Métodos de análise (experimental)
- Semana 2
  - Medidas experimentais com RLD

Um pouco de caos?

- Quais são os dois extremos para a dinâmica (evolução temporal) de um sistema físico?
  - Sistemas bem comportados ou lineares
  - Sistemas totalmente aleatórios (probabilísticos)
- Há algo intermediário?

Sistema massa-mola
Queda livre no vácuo
Pêndulo simples
Circuito RLC comum

Cara ou coroa
Movimento browniano
Decaimento radioativo
Transições nucleares

Clima
Turbulências
Crescimento populacional
Pêndulo duplo

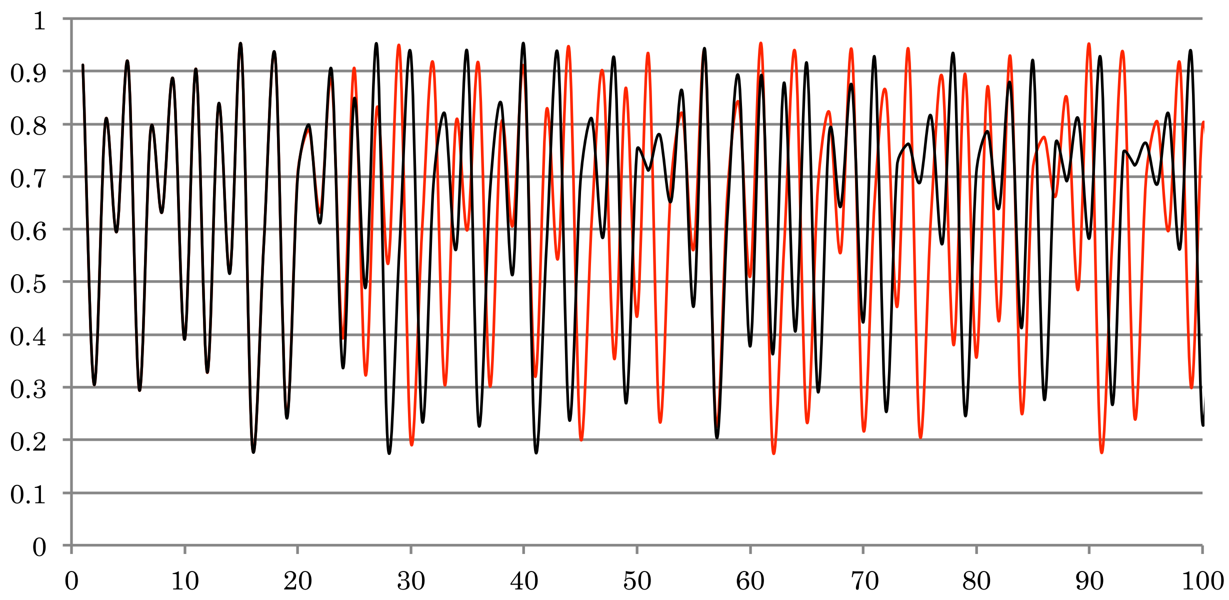
O PÊNDULO DUPLO

HTTP://WWW.PHYSICS.BROWN.EDU/PHYSICS/DEMOPAGES/DEMO/WAVES/DEMO/3A9550.HTM

Applet em http://physlab.net/dbl_pendulum.html

O QUE É CAOS?

- São sistemas determinísticos (não probabilísticos), ou seja, as equações que descrevem a evolução são bem determinadas.
- A evolução temporal é muito dependente das condições iniciais
- As trajetórias são muito irregulares
- Sistemas caóticos são previsíveis a curto prazo



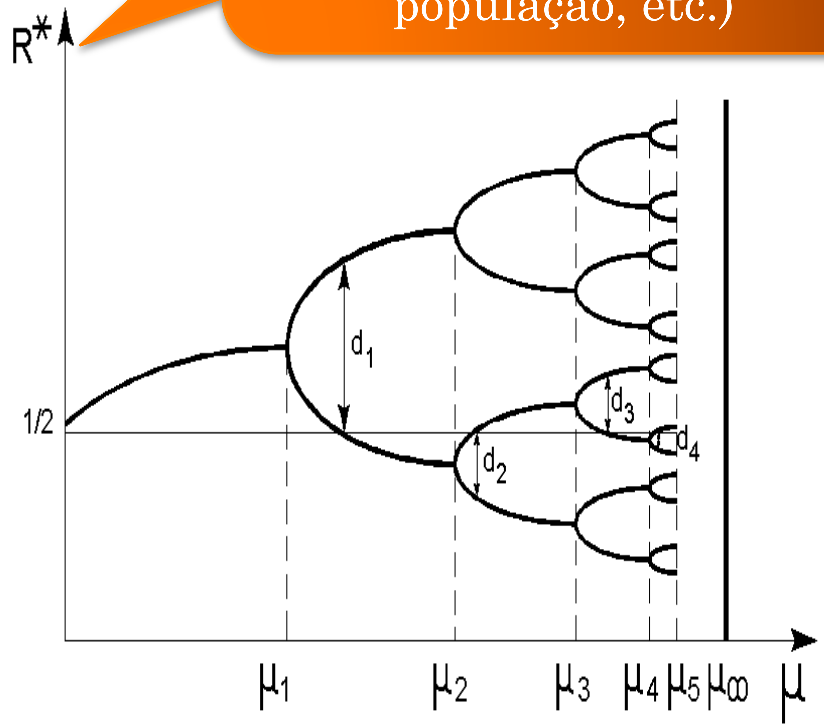
COMO SE CHEGA AO CAOS?

- Bifurcações de período
  - Rota mais comum para o caos (**cenário de Feigenbaum**)
  - Duplicação dos atratores

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{(\mu_n - \mu_{n-1})}{(\mu_{n+1} - \mu_n)} = \delta$$

$$\delta = 4,66920160910299 09....$$

Algo que represente a resposta do sistema para aquela condição (corrente, tensão em um elemento, população, etc.)



Uma variável de controle do sistema (tempo, número de geração, tensão em uma fonte, etc.)

EXEMPLO SIMPLES: O MAPA LOGÍSTICO

- Crescimento de populações
  - Equação logística – Pierre Verhulst (~1845)

$$\frac{dx}{dt} = rx(1-x), \text{ com } x = N/K$$

$$x(t) = \frac{1}{1+(x_0^{-1}-1)e^{-rt}}, \text{ função sigmóide}$$

  - ***r*** = número Malthusiano,
    - Se r<0 → a população morre com o tempo x→0
    - Se r>0 → a população sobrevive

EXEMPLO SIMPLES: O MAPA LOGÍSTICO

- Crescimento de populações
  - Equação logística – Pierre Verhulst (~1845)
    - Esta equação possui inconvenientes para o estudo de evolução de populações pois a população em qualquer instante t depende somente das condições iniciais e é contínua
    - É mais desejável haver modelos onde o estágio atual da população dependa apenas da geração anterior e não da condição inicial
  - Assim, costuma-se utilizar o mapa logístico, ao invés da equação logística para o estudo de populações.

EXEMPLO SIMPLES: O MAPA LOGÍSTICO

- Crescimento de populações
  - Mapa logístico

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

  - Neste caso, $\boldsymbol{r}$ é sempre maior que 1 e é denominado potencial biótico da população
  - Como é a evolução temporal da população em função da condição inicial ($\boldsymbol{x_0}$) e do potencial biótico?

CALCULANDO O MAPA LOGÍSTICO

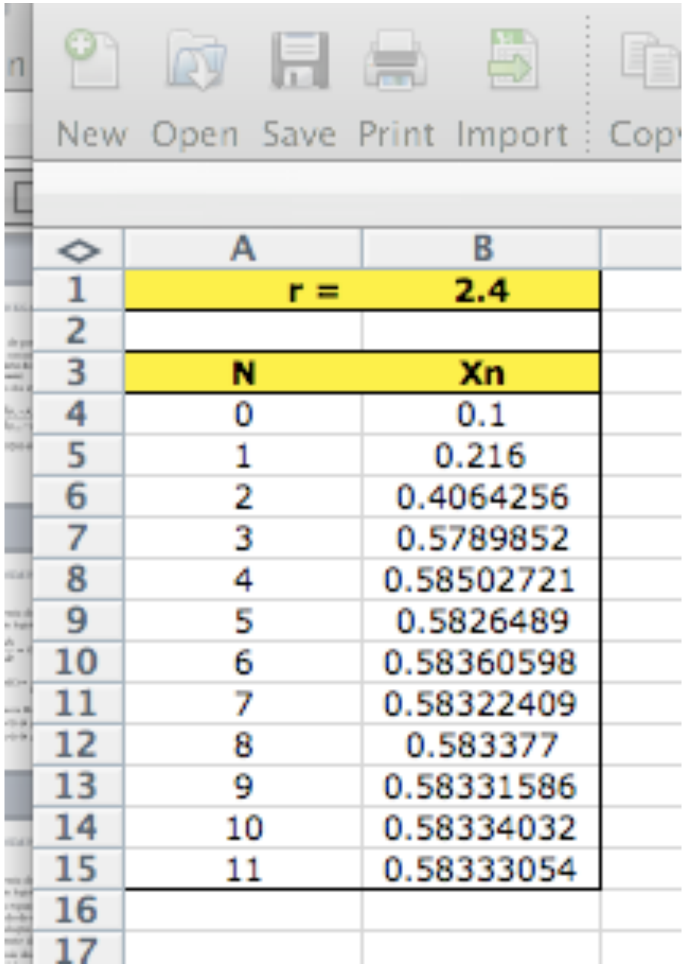
$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

- Dois métodos de cálculo
  - Excel
    - Fazer uma planilha e observar como as gerações evoluem com os parâmetros iniciais
  - Método gráfico
    - Diagrama de teia
      - Efeito visual mais direto mas depende de um pouco de habilidade gráfica ☺

CALCULANDO O MAPA LOGÍSTICO

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

- Excel
  - R na célula B1
  - X0 na célula B4
- A célula B5 (x1) vale
  - = B1*B4*(1-B4)
- Copy/paste para as outras células
  - B6=B1*B5*(1-B5)
- Exemplo no site



	A	B
1	r =	2.4
2		
3	N	Xn
4	0	0.1
5	1	0.216
6	2	0.4064256
7	3	0.5789852
8	4	0.58502721
9	5	0.5826489
10	6	0.58360598
11	7	0.58322409
12	8	0.583377
13	9	0.58331586
14	10	0.58334032
15	11	0.58333054
16		
17		

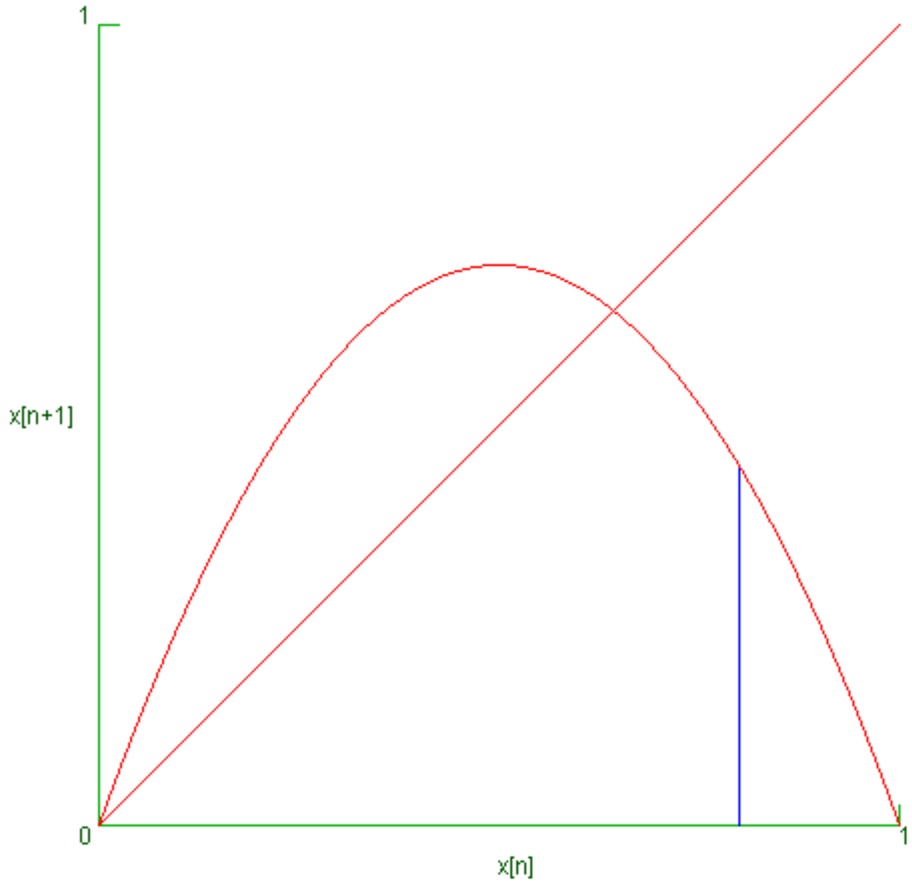
CALCULANDO O MAPA LOGÍSTICO

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

- Diagrama de teia
  - Faz-se uma reta com c.a. = 1
  - Faz-se um gráfico superposto da função

$$f(x) = rx(1 - x)$$

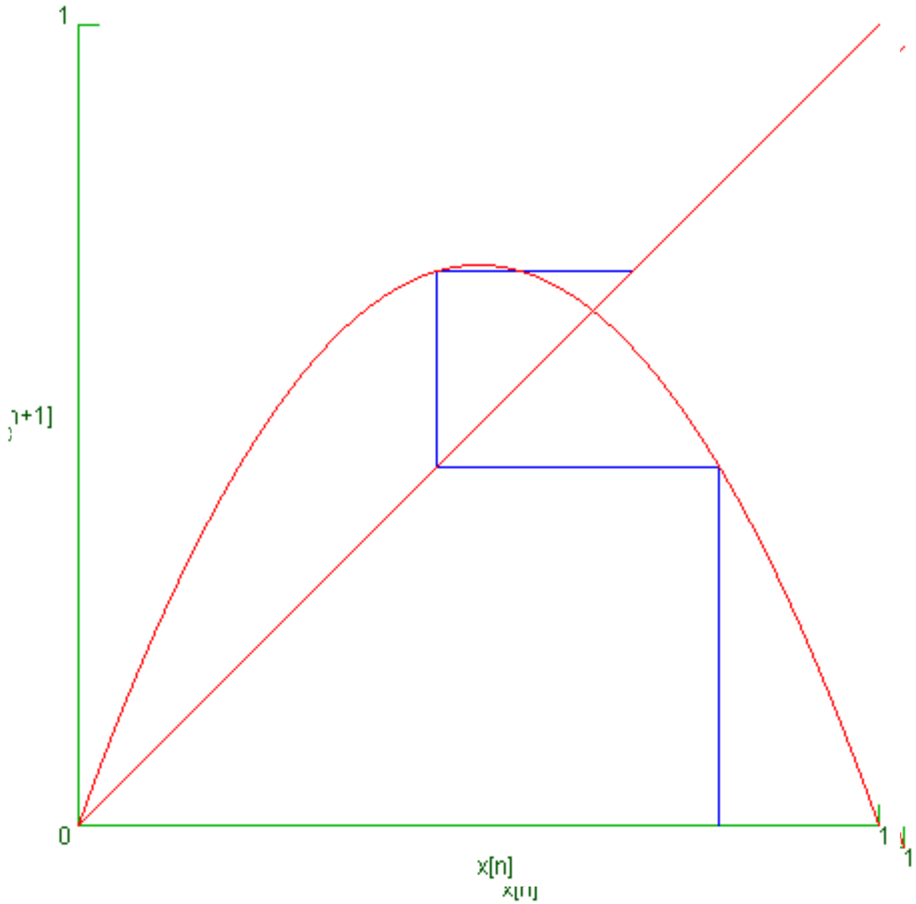
  - Calcula-se $\boldsymbol{f(x)}$ para o valor de $\boldsymbol{x_0}$



CALCULANDO O MAPA LOGÍSTICO

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

- Rebate-se o valor para a reta
  - Obtem-se assim o valor de $\boldsymbol{x_1}$
- Calcula-se $\boldsymbol{f(x)}$ para o valor de $\boldsymbol{x_1}$
- Rebate-se novamente para a reta para obter $\boldsymbol{x_2}$

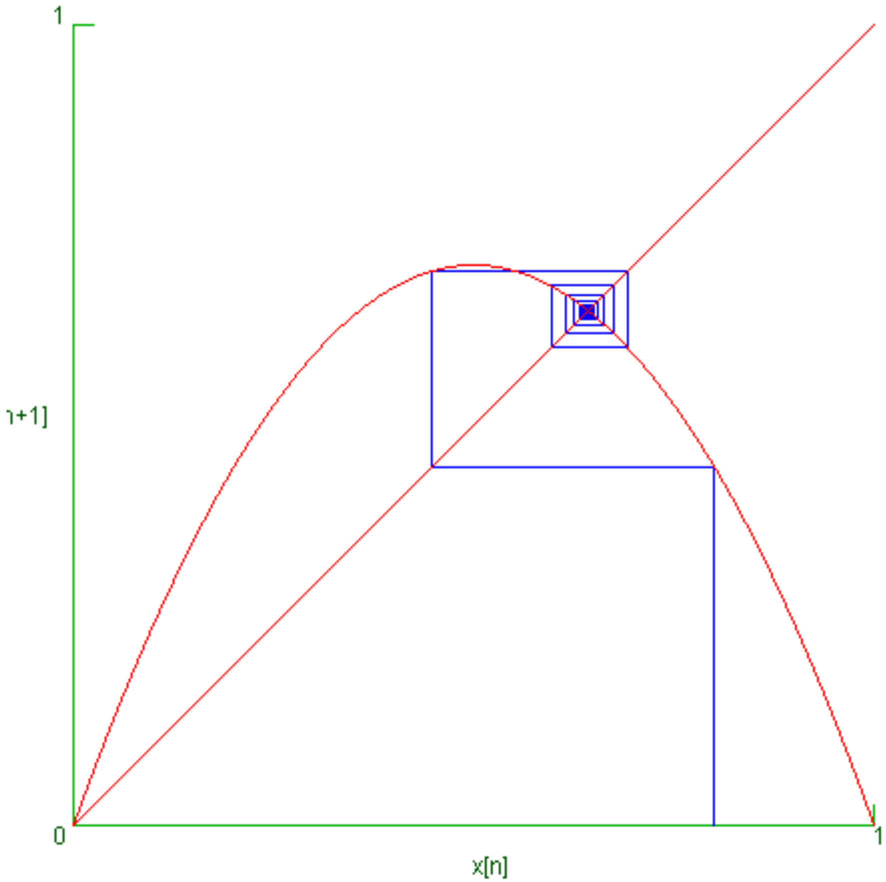


CALCULANDO O MAPA LOGÍSTICO

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

- E assim sucessivamente tantas quantas forem as interações desejadas

- Os vários comportamentos dependem de ***r***



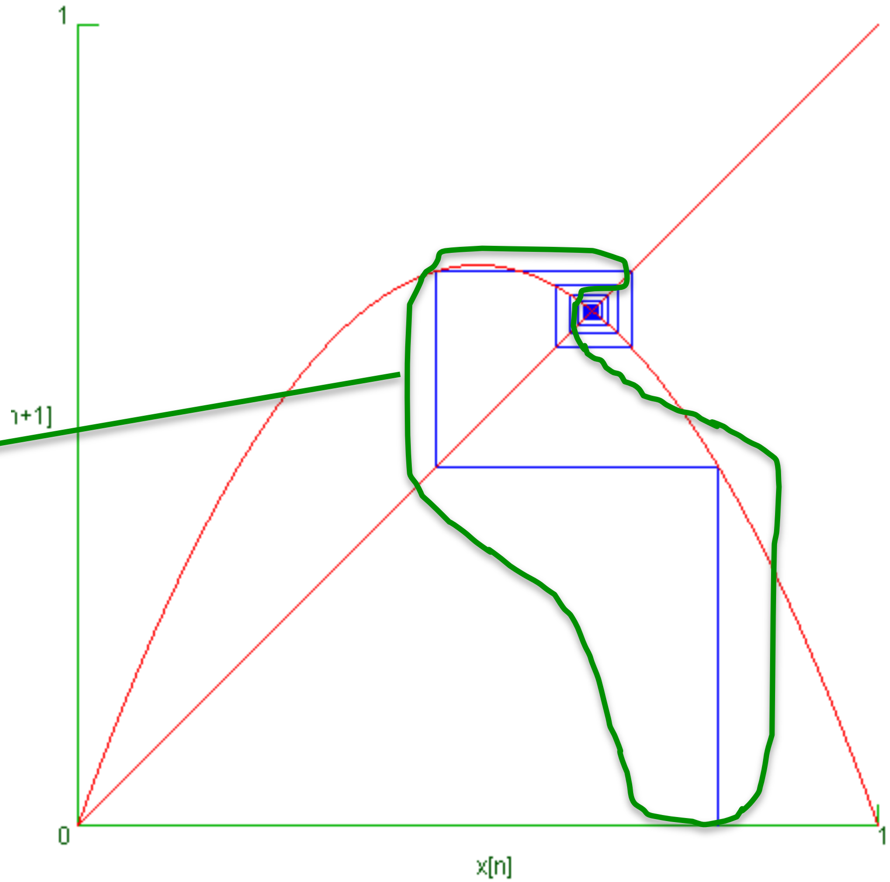
CALCULANDO O MAPA LOGÍSTICO

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

- Dois conceitos importantes

- Transitório:
  - Intervalo de tempo (ou interações) necessário para atingir uma situação de equilíbrio

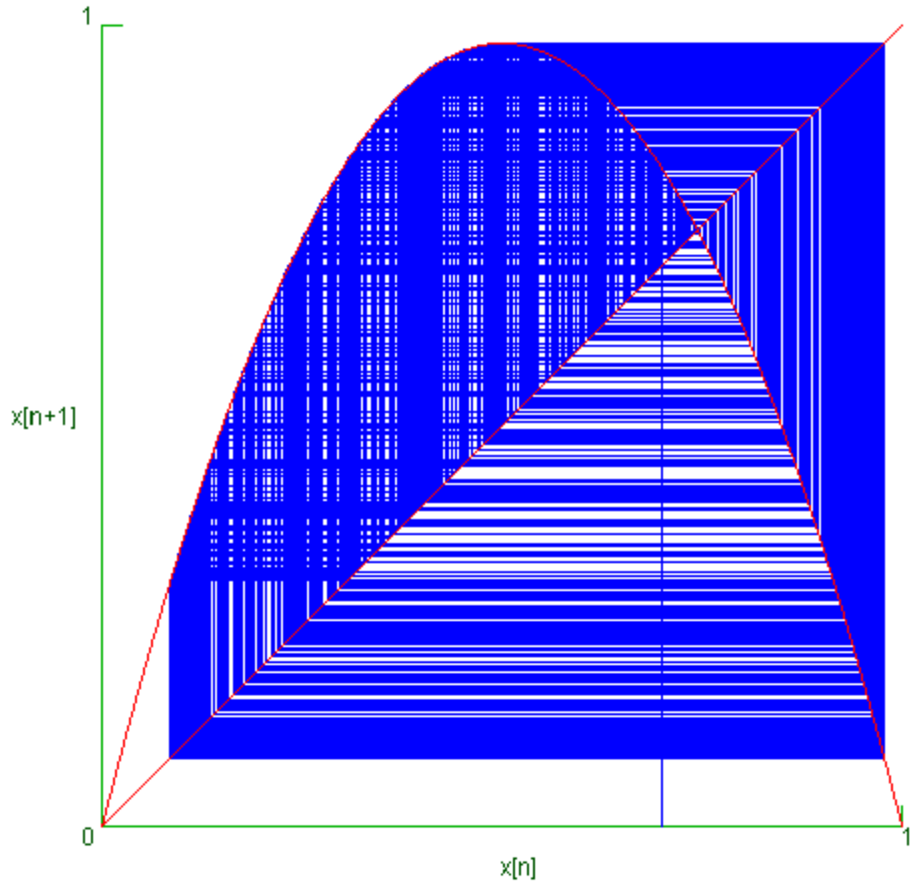
- Regime estacionário
  - Intervalo de tempo (ou interações) após o transitório



CALCULANDO O MAPA LOGÍSTICO

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

- População que atinge estabilidade
- População que morre com o tempo
- População em estado caótico



O DIAGRAMA DE FASE

- O diagrama de fase corresponde a **<u>todos</u>** estados do sistema, no regime estacionário, em função de uma variável de controle
- Estado do sistema
  - Variáveis que definem a situação do sistema em um dado instante
    - Ex: tamanho da população, tensão e corrente em um RLC, velocidade e posição de um corpo
- Variável de controle
  - É aquela que podemos controlar e variar ao nosso gosto para testar como o sistema se comporta
    - Ex: Freqüência e tensão do gerador, tamanho de um pêndulo, etc.

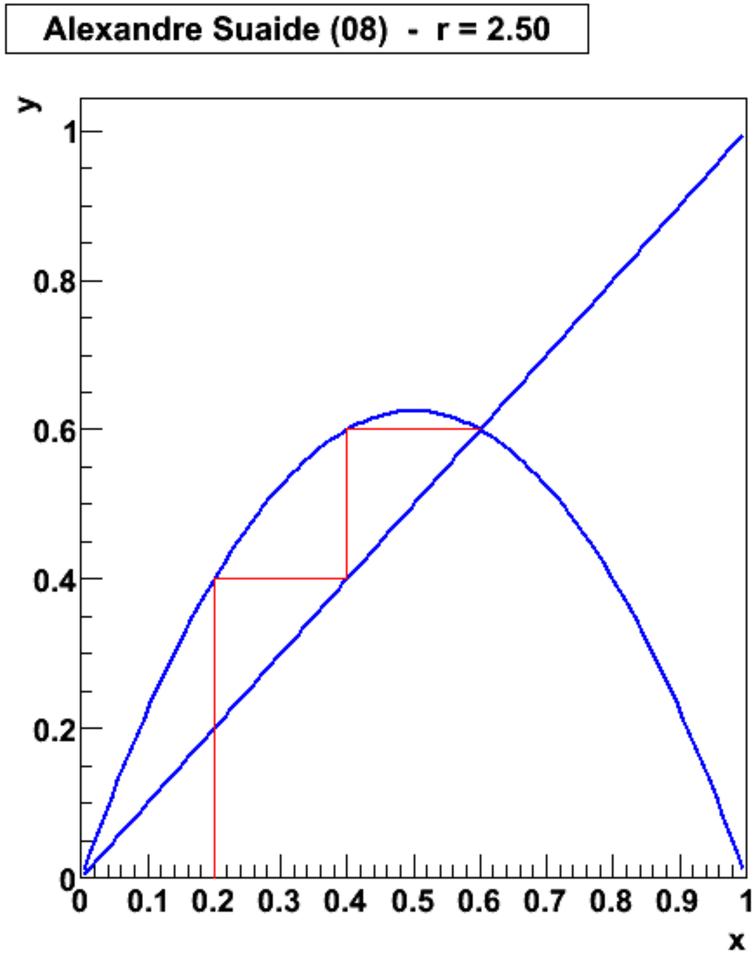
DIAGRAMA DE FASE DE UM MAPA LOGÍSTICO

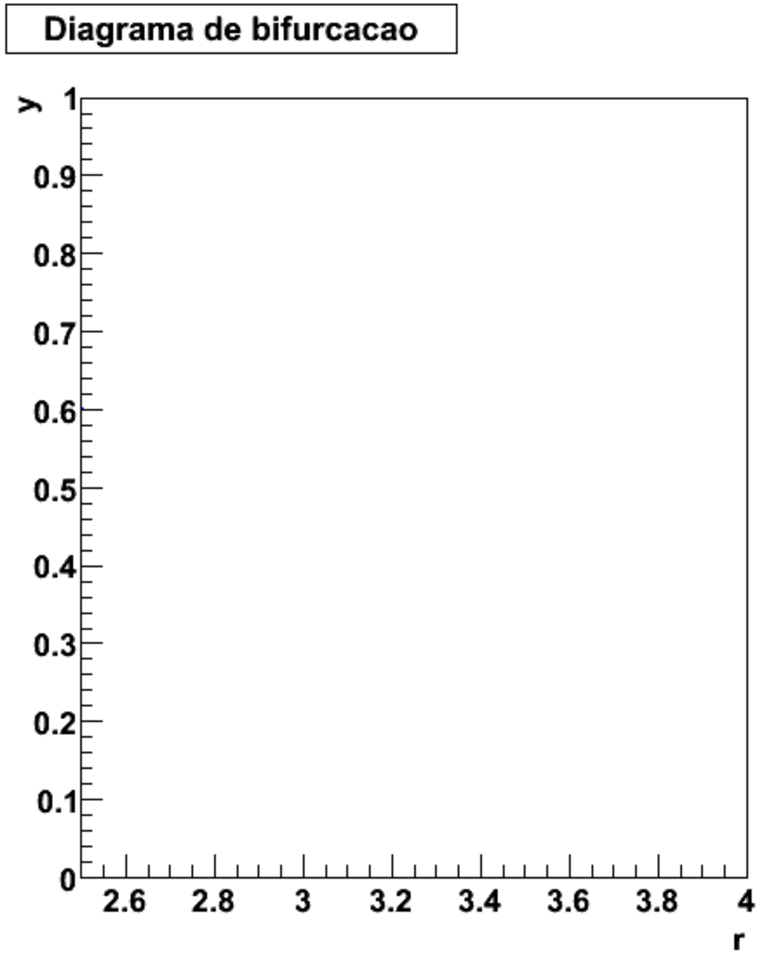
$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

- Qual o estado?
  - X_n, ou tamanho da população
- Qual é a variável de controle?
  - No nosso caso, apenas r pode ser variada e estudamos como X_n se comporta em função de r.
    - Lembre-se que queremos X_n no regime estacionário

- Como montamos o diagrama, neste caso:
  - Escolhemos r.
  - Definimos que o transitório acaba em, por exemplo, 500 passos
  - Graficamos todos os valores possíveis de Xn para aquele valor de r após o transitório

DIAGRAMA DE FASE DE UM MAPA LOGÍSTICO





ATIVIDADES DA SEMANA

- Terminar o que ficou faltando ou o que está problemático
  - Esta vai ser a semana mais leve de atividades desta experiência: **aproveitem!**

- Estudar o mapa logístico como uma forma de se familiarizar com alguns fenômenos relacionados ao caos.

ATIVIDADES DA SEMANA

- Fazer o estudo do mapa logístico
  - Fazer os gráficos de x_n como função de n para vários valores de parâmetros de controle. Deixando x_0 fixo em 0.5, faça:
    - Três valores de r para $0<r<1$ (no mesmo gráfico)
    - Três valores de r para $1<r<3$ (idem)
    - Dois valores de r para $3<r<1+\text{raiz}(6)$ (idem)
    - Atenção: que intervalo de n é interessante mostrar para cada um deste gráficos? Precisa mostrar até n=500? Queremos ver os regimes transientes e estacionários.
    - Para cada intervalo, explique o que esta ocorrendo:
      - Qual o numero de atratores?
      - Por que uma determinada solução é o atrator?
      - Por que existe(m) esse(s) atrator(es)?

ATIVIDADES DA SEMANA

- Sensibilidade a condição inicial:
  - Fazer gráficos de x_n como função de n para os regimes com e sem caos partindo de 2 condições iniciais muito próximas: x0=0.5, x0=0.50001
    - Atenção: Queremos comparar a evolução das soluções.

- Diagrama de bifurcação:
  - Faça um gráfico dos valores das soluções estabilizadas (após o transiente) em função do parâmetro de controle.
    - Atenção: O número de iterações é importante pois a solução deve atingir a estabilidade (quando existe). No mínimo 500 iterações.
    - Determine a posição da 1º, 2º e 3º bifurcação e calcule a constante de Constante de Feigenbaum (com incerteza)

ATIVIDADES DA SEMANA

- No site do prof. Henrique há dois artigos sobre caos
  - http://www.fap.if.usp.br/~hbarbosa/uploads/Site/LabAberto2010Fis4/RobertMay_JTheoBiol_1957.pdf
  - http://www.fap.if.usp.br/~hbarbosa/uploads/Site/LabAberto2010Fis4/PeriodThreeImpliesChaos.pdf
  - Escolha um desses artigos para ler e faça, na sua síntese, um resumo (aprox. ½ página está bom) sobre o que você compreendeu.

Extras

Porque um grande número de observáveis na natureza segue uma distribuição normal?

- Teorema do limite central
  - Se...
    - Temos um conjunto de medidas independentes, mas com mesma distribuição de probabilidades.
    - Existe um valor verdadeiro (μ) e uma variância finitos ($\sigma^2>0$).
  - Então...
    - A distribuição do valor médio de um subconjunto dessas medidas segue uma distribuição normal
      - http://en.wikipedia.org/wik/Illustration_of_the_central_limit_theorem
- As condições necessárias para uma distribuição normal de probabilidades são encontradas em um amplo espectro de medidas na natureza.

EXEMPLO: DISTRIBUIÇÃO QUADRADA