# Experimento I – aula 1

Alexandre A. P. Suaide

Ed. Oscar Sala, sala 246

suaide@if.usp.br

Ramal: 7072

# Alguns recados da disciplina

- Site da disciplina:
  - http://www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex
- Notas de aula
  - http://www.dfn.if.usp.br/~suaide
  - Clicar em notas de aula

# Alguns recados da disciplina

- Plantão de dúvidas de análise
  - Toda quinta-feira, das 13:00 às 15:00, em uma sala de laboratório
- Critérios de aprovação
  - 3 experimentos + 1 projeto da turma
  - Média dos experimentos + nota do projeto + participação individual
  - Ver site para detalhes como as notas são calculadas

# Alguns detalhes da disciplina

- Cada aula teórica → tarefas ***mínimas*** para serem entregues
  - Síntese a ser entregue até a segunda-feira (10:00) anterior à proxima aula
  - Não serão tolerados atrasos
  - Não há re-entrega de sínteses

# Experimento I

- Circuitos em Corrente alternada
  - Estudar alguns aspectos de circuitos de corrente alternada em dois regimes (linear e caótico)
  - Explorar algumas técnicas de processamento de sinais e decomposição harmônica
  - Noções de caos
- 4 aulas

# Algum suporte matemático: Números complexos

$$\hat{C} = a + b\,j \qquad j = \sqrt{-1}$$

$$\hat{C}^* = a - b\,j$$

$$\hat{C} = C\,e^{j\alpha} \qquad e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$C = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$tg\,\alpha = \frac{b}{a}$$

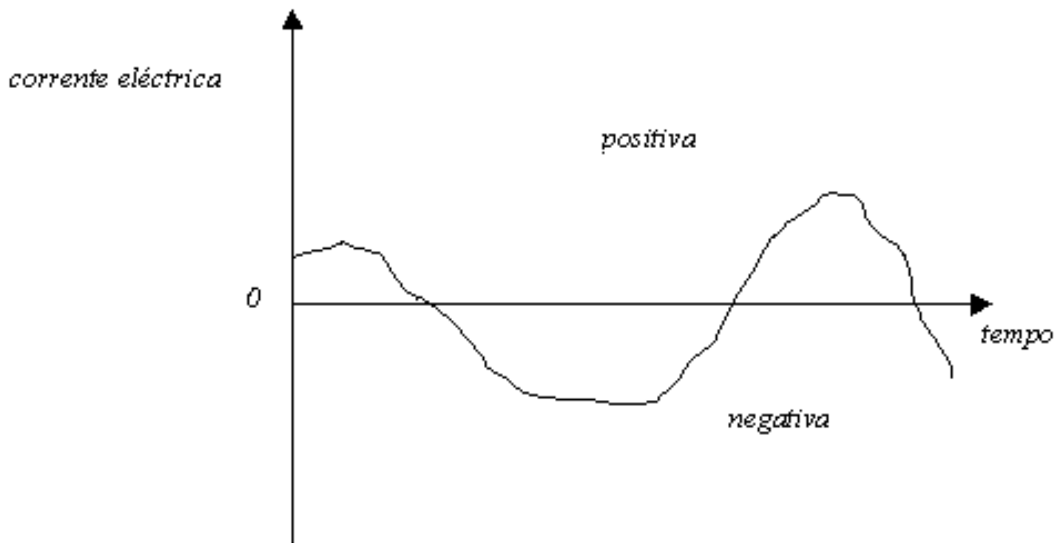
$$\frac{d}{dt}\left(e^{j\omega t}\right) = j\omega\,e^{j\omega t}$$

$$\int e^{j\omega t}\,dt = \frac{1}{j\omega}\,e^{j\omega t}$$

Integrais e derivadas nesta notação são apenas multiplicações e divisões

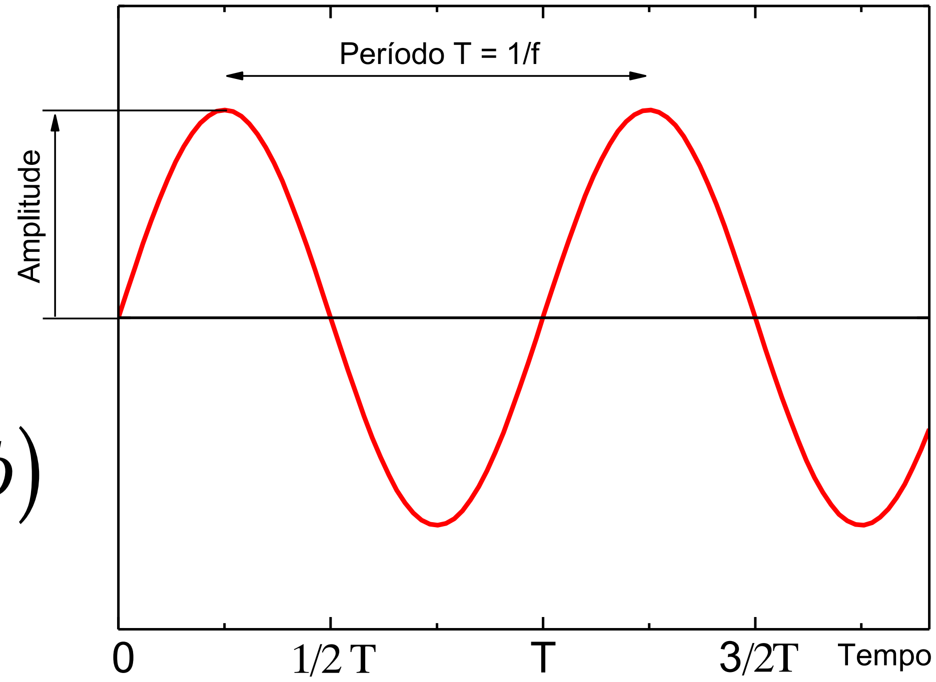
# Tensões e correntes alternadas

- De forma genérica, qualquer tensão que varia no tempo
- Na prática costumamos trabalhar com tensões harmônicas simples



# Tensões harmônicas simples

- São aquelas que podem ser descritas por uma função harmônica simples de freqüência bem definida, ou seja

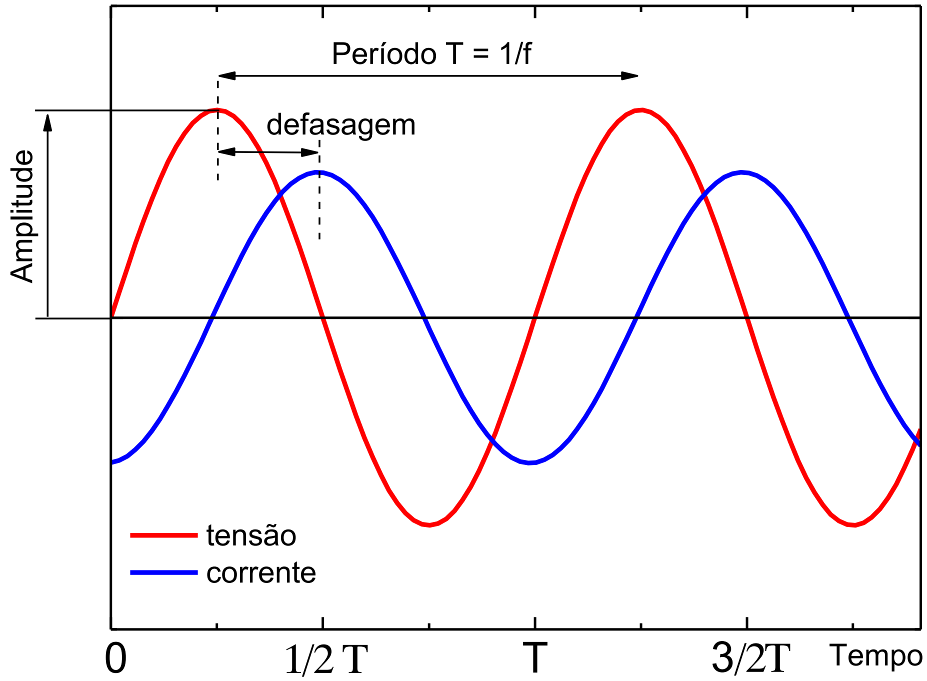



$$V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

# Tensões e correntes → fase

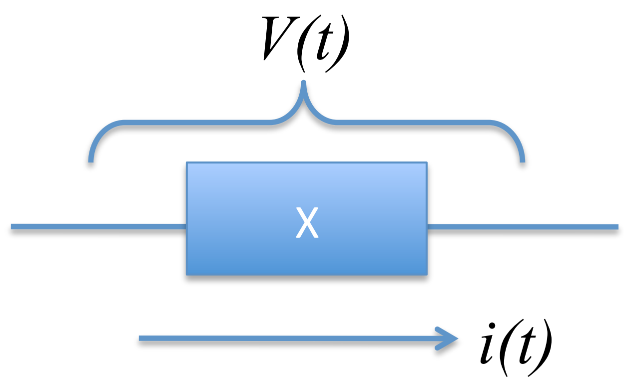
- Em um circuito de corrente alternada a tensão e corrente não necessariamente estão em fase




$$i(t) = i_0 \cos(\omega t)$$

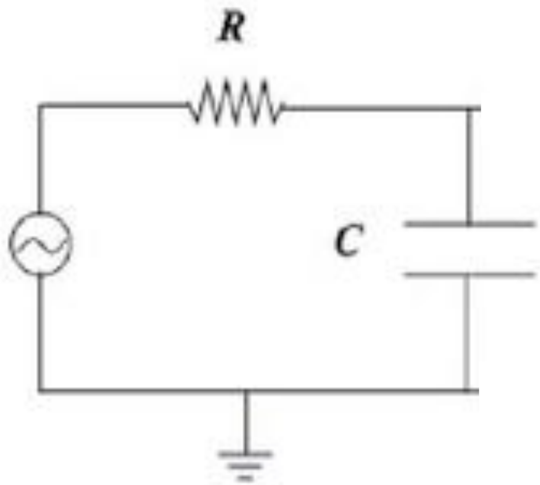
$$V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\phi = 2\pi \frac{\Delta T}{T} = \omega \cdot \Delta T$$



# Começando por um exemplo

- Capacitor e resistor em série a uma fonte de tensão



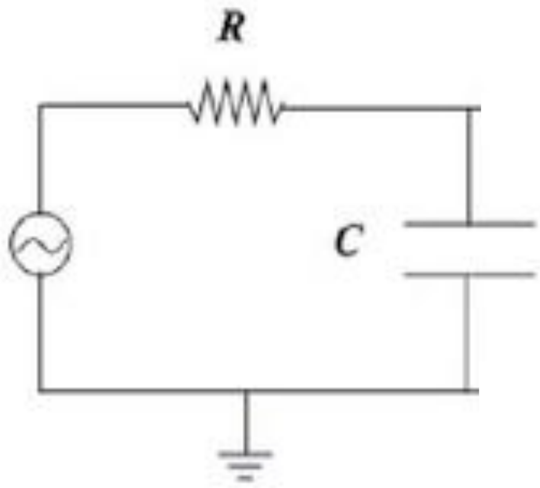

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \rightarrow \sum_{malha} V_i = 0$$

$$V_e(t) = V_R(t) + V_C(t) \Rightarrow V_e(t) = R \cdot i(t) + \frac{q(t)}{C} \quad \text{sendo } i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$$V_e(t) = R \cdot \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} \rightarrow V_e(t) = RC \cdot \frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t)$$

$$V_e = \frac{1}{\omega_{RC}} \frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) \quad \text{com} \quad \omega_{RC} = \frac{1}{RC}$$

# Começando por um exemplo




- Se a tensão de entrada for harmônica

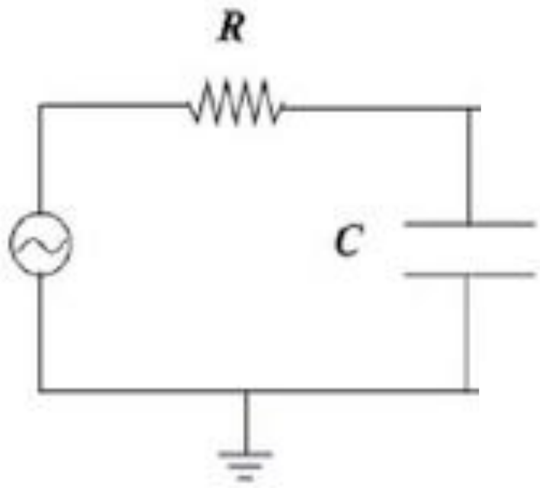
$$V_e(t) = V_e \cos(\omega t) \rightarrow V_e(t) = \mathrm{Re}\left[\hat{V}_e(t)\right]$$

com $\hat{V}_e(t) = V_e e^{j\omega t}$

- Podemos resolver a e.d. Na sua forma complexa e tomar a parte real da solução

$$V_e(t) = \frac{1}{\omega_{RC}} \frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) \Rightarrow \boxed{\hat{V}_e(t) = \frac{1}{\omega_{RC}} \frac{d\hat{V}_C(t)}{dt} + \hat{V}_C(t)}$$

# Começando por um exemplo




- A solução mais geral para a tensão no capacitor é

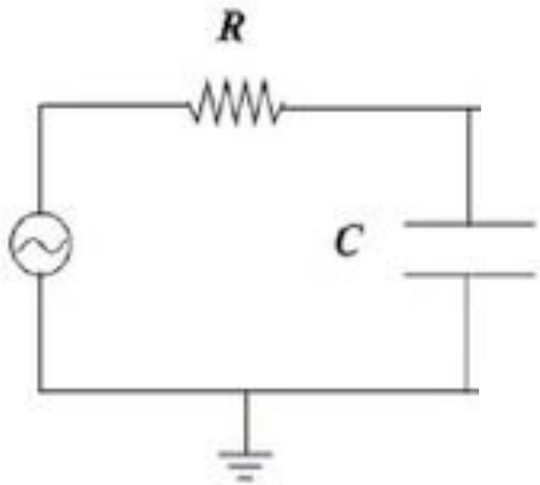
$$\hat{V}_C(t) = \hat{V}_C e^{j\omega t}$$

- Substituindo na e.d.

$$V_e e^{j\omega t} = j\frac{\omega}{\omega_{RC}}\hat{V}_C e^{j\omega t} + \hat{V}_C e^{j\omega t} \Rightarrow \hat{V}_C = \frac{V_e}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_{RC}}}$$

ou seja $\boxed{\hat{V}_C(t) = \dfrac{V_e}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_{RC}}} e^{j\omega t}}$

# Começando por um exemplo




- Trabalhando um pouco essa solução

$$\hat{V}_C(t) = \frac{V_e}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_{RC}}} e^{j\omega t}$$

- Podemos escrever

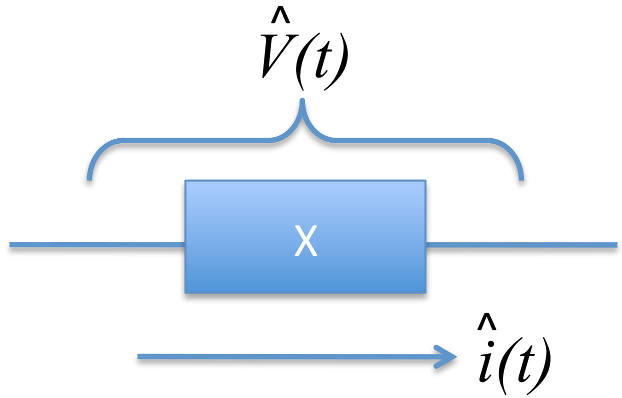
$$\hat{V}_C(t) = V_C e^{j(\omega t + \phi)} \quad \text{com} \quad V_C = \frac{V_e}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_{RC}}\right)^2}} \quad \text{e} \quad \phi = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_{RC}}\right)$$

de modo que $\boxed{V_C(t) = \mathrm{Re}\left[\hat{V}_C(t)\right] = V_C \cos(\omega t + \phi)}$

# Impedância de um elemento

- A solução da e.d. no espaço complexo, e posterior uso da parte real como solução física do problema, sugere a criação de um análogo à lei de Ohm nesse formalismo.

# Impedância (complexa e real)




- A impedância complexa de um elemento X é definida como sendo a razão entre a tensão e corrente complexas neste elemento, ou seja:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)}$$

- Usando a definição das tensões (e correntes) complexas, deduzimos que:

$$\hat{Z} = \frac{V_0 e^{j(\omega t + \phi_0)}}{i_0 e^{j(\omega t + \phi_1)}} = \frac{V_0}{i_0} e^{j(\phi_0 - \phi_1)} = Z_0 e^{j\phi}$$

$Z_0$ é a impedância REAL do Elemento X

$\phi$ é a diferença de fase entre a Tensão e corrente causada pelo Elemento X

# Resistência e reatância

- Da definição de impedância complexa

$$\hat{Z} = Z_0 e^{j\phi}$$

- Podemos também escrever que

$$\hat{Z} = Z_0 \cos(\phi) + jZ_0 \sin(\phi)$$

- Define-se resistência (*R*) de um bipolo como sendo:

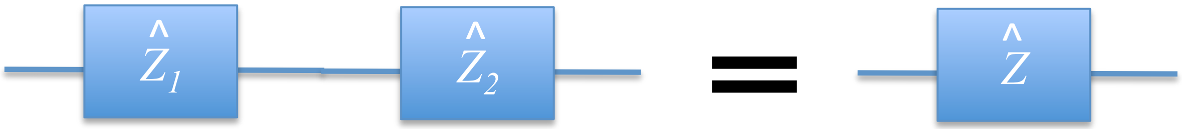
$$R = Z_0 \cos(\phi)$$

- E reatância deste bipolo (*X*) como:

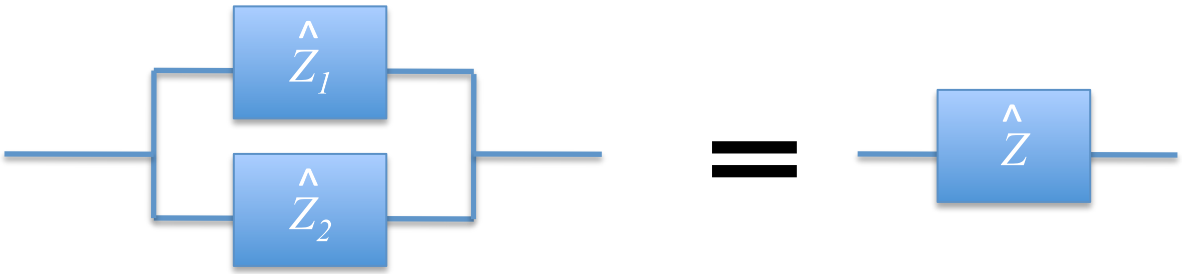
$$X = Z_0 \sin(\phi)$$

# Porque usar este formalismo?

- As grandes vantagens deste formalismo são:
  - Operações envolvendo tensão e corrente são simples
    - Multiplicações e divisões de exponenciais.
  - Associações de bipolos tornam-se simples
    - Como resistores comuns, mas realizadas com grandezas complexas

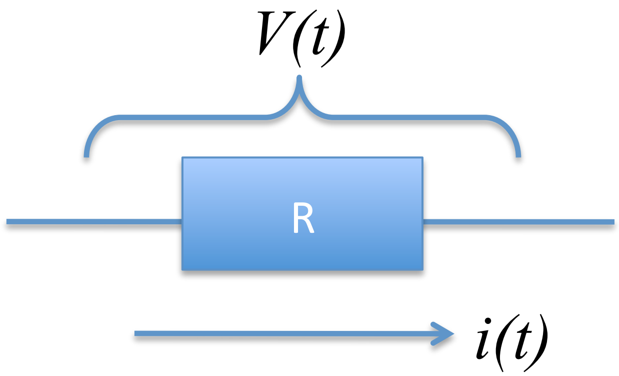



$$\hat{Z} = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2$$




$$\frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2}$$

# Vamos olhar o resistor novamente




- Seja uma tensão e corrente complexas, temos:

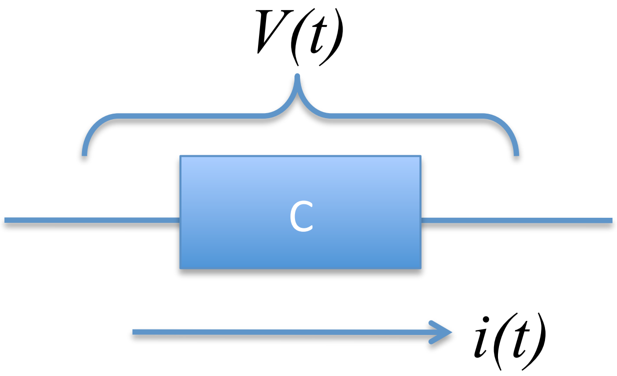
$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)}$$

- Mas sabemos que *R = V/i*, ou seja, a corrente e tensão estão sempre em fase. Assim:

$$\hat{Z} = Z_0 e^{j\phi} = R \quad \Rightarrow \begin{cases} Z_0 = R \\ \phi = 0 \end{cases}$$

Por conta disto que resistores Ôhmicos são muito utilizados em laboratório para medir correntes

# No caso do capacitor




- Sabemos que (do começo da aula)

$$V(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

- Se a corrente complexa for dada por:

$$\hat{i}(t) = i_0 e^{j\omega t}$$

- Fica fácil demonstrar que:

$$V(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \quad = \frac{1}{C}\int i_0 e^{j\omega t}dt = \frac{1}{j\omega C} i_0 e^{j\omega t} = -\frac{j}{\omega C} i_0 e^{j\omega t}$$

- A impedância de um capacitor vale:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)} = \frac{-\frac{j}{\omega C} i_0 e^{j\omega t}}{i_0 e^{j\omega t}} = -\frac{j}{\omega C}$$

# No caso do capacitor

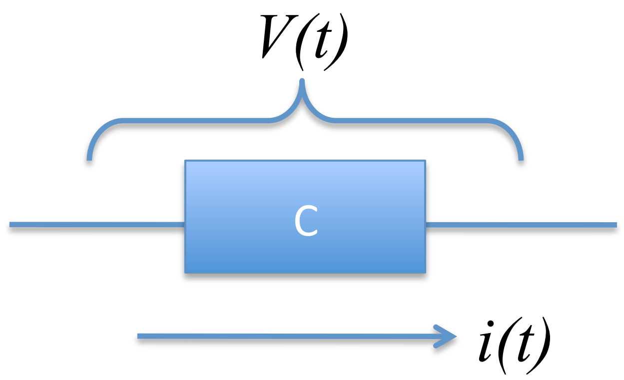
- Ou seja $\hat{Z} = -\dfrac{j}{\omega C}$
- Mas lembrando que:

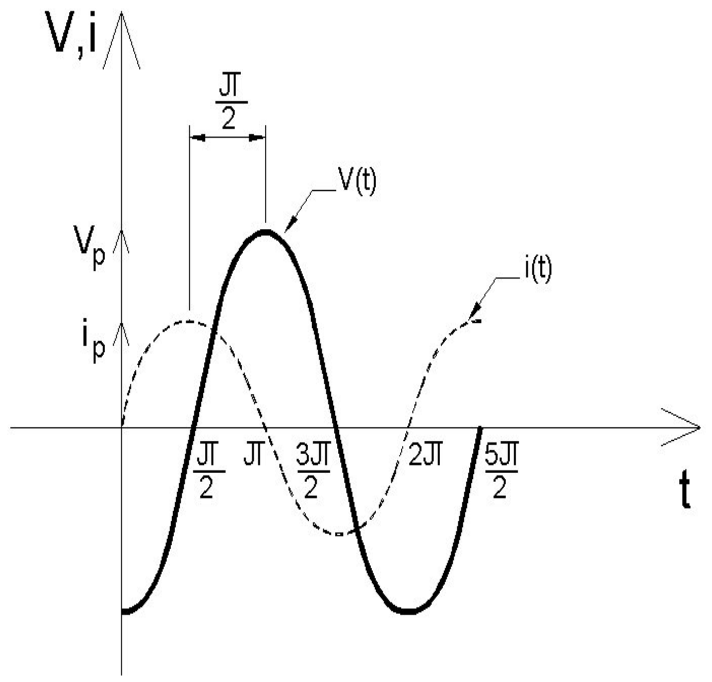
$$\hat{Z} = Z_0 \cos(\phi) + jZ_0 \sin(\phi)$$

- Comparando as duas expressões temos que:

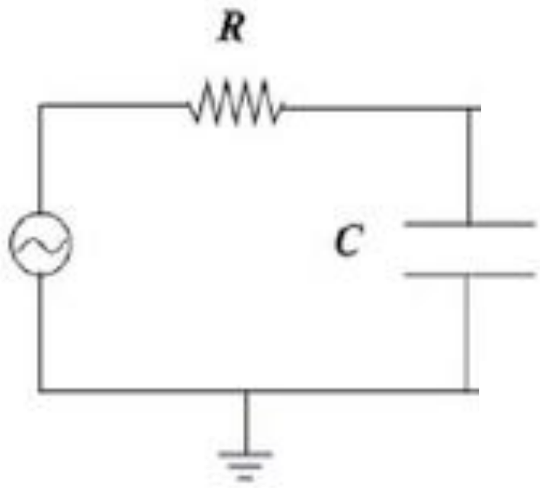
$$Z_0 = \frac{1}{\omega C} \qquad \phi = -\frac{\pi}{2}$$

Conclui-se naturalmente que a tensão elétrica está defasada de π/2 em relação à corrente



# Vamos rever o circuito RC nesse formalismo




- Temos que:

$$\hat{Z}_{total} = \hat{Z}_R + \hat{Z}_C = \frac{\hat{V}_e(t)}{\hat{i}(t)} \Rightarrow \hat{i}(t) = \frac{\hat{V}_e(t)}{\hat{Z}_R + \hat{Z}_C}$$

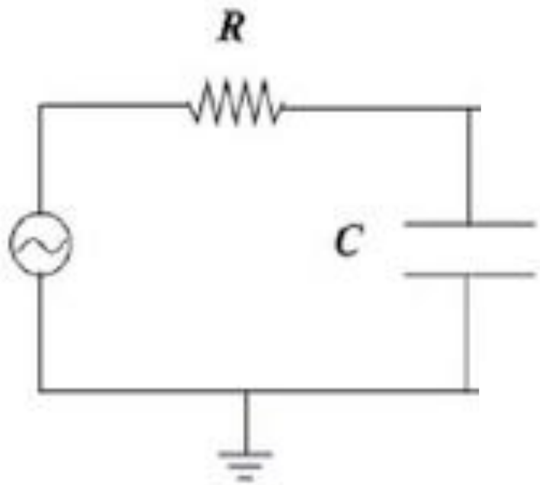
- A tensão no capacitor é:

$$\hat{V}_C = \hat{Z}_C \hat{i}(t) = \frac{\hat{Z}_C}{\hat{Z}_R + \hat{Z}_C} \hat{V}_e(t)$$

$$\hat{V}_C = \frac{-j/\omega C}{R - j/\omega C} \hat{V}_e(t) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \hat{V}_e(t) = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_{RC}}} \hat{V}_e(t)$$

# Um limite interessante

- Façamos que: $\hat{G} = \dfrac{\hat{V}_C}{\hat{V}_e} = G_0 e^{j\phi_G}$

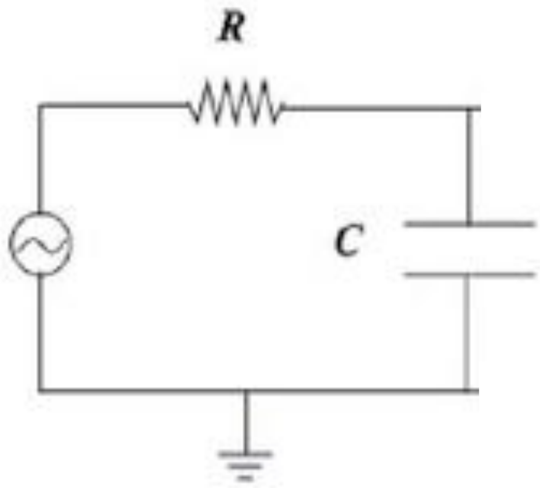



$$G_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_{RC}}\right)^2}} \qquad \phi_G = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_{RC}}\right)$$

- Se $\omega >> \omega_{RC}$: $G_0 \approx \dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\omega}{\omega_{RC}}\right)^2}} = \dfrac{\omega_{RC}}{\omega}$ $\qquad \phi_G \approx \arctan(-\infty) = -\dfrac{\pi}{2}$

- Ou seja: $\hat{G} = \dfrac{1}{\omega RC} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{j\omega RC}$

# Um limite interessante




- Então:

$$\frac{\hat{V}_C}{\hat{V}_e} = \frac{1}{j\omega RC}$$

- Ou ainda:

$$\hat{V}_C = \frac{1}{j\omega RC}\hat{V}_e$$

- Lembrando que: $\hat{V}_e = V_e e^{j\omega t}$

- E que: $\int \hat{V}_e dt = \frac{1}{j\omega} V_e e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega}\hat{V}_e$

- Temos que:

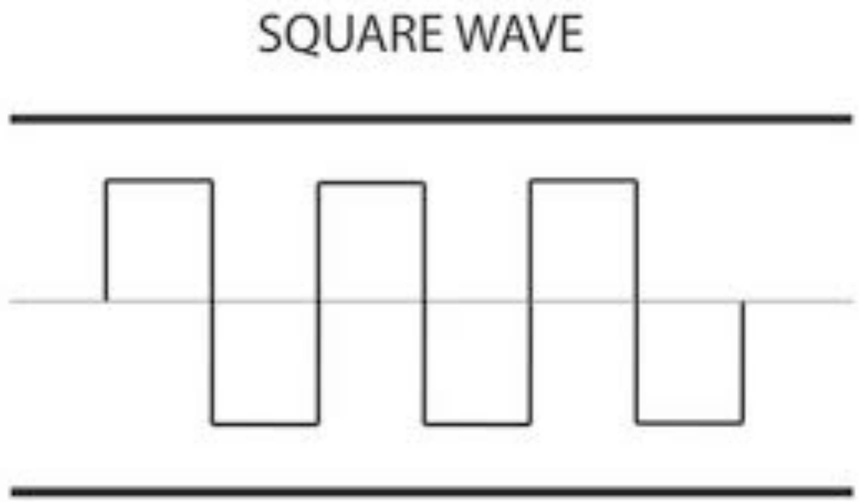
$$\hat{V}_C = \frac{1}{RC}\int \hat{V}_e\, dt$$

No limite que $\omega >> \omega_c$ o circuito acima funciona como integrador da tensão de entrada

# E agora?

- Pois bem, a solução da e.d. é fácil de ser obtida para uma tensão harmônica.

- O que acontece se a tensão $V_e$ não for harmônica?



# Séries de Fourier

- Joseph Fourier, paper submetido em 1807
  - Referees: Lagrange, Laplace, Malus e Legendre
  - Funções trigonométricas podem ser combinadas de tal forma a representar qualquer função matemática

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_n (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

- As constantes $a_n$ e $b_n$ podem ser obtidas a partir de

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

# Séries de Fourier

- Hoje em dia, usamos formalismos mais abrangentes

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnx}$$

Use a fórmula de Euler e substitua na expressão anterior

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

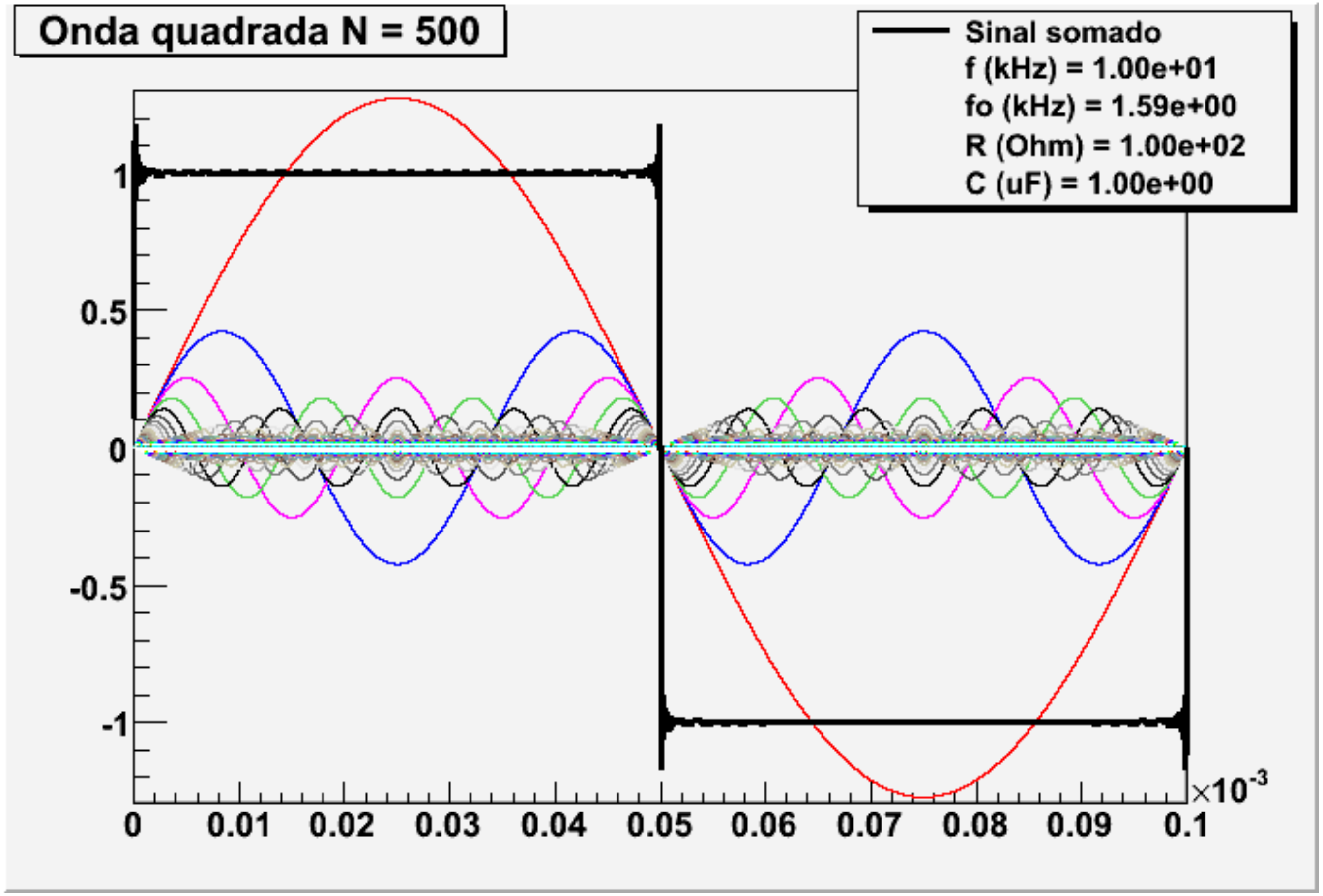
  - Com: $$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-jnx} dx$$
  - As constantes $a_n$ e $b_n$ da expressão tradicional podem ser obtidas como:

$$a_n = c_n + c_{-n}, \text{ com } n = 0,1,2,\ldots$$

$$b_n = j(c_n - c_{-n}), \text{ com } n = 0,1,2,\ldots$$

# Exemplo: onda quadrada

$$V(t) = V_0\left[\frac{4}{\pi}\sin(\omega t) + \frac{4}{3\pi}\sin(3\omega t) + \frac{4}{5\pi}\sin(5\omega t) + \ldots\right]$$



# Como se resolve a e.d. nesse caso?

- E.d. para o circuito RC

$$\hat{V}_e(t) = \frac{1}{\omega_{RC}} \frac{d\hat{V}_C(t)}{dt} + \hat{V}_C(t), \quad \text{mas} \quad \hat{V}_e(t) = \sum_n v_n^e e^{j\omega_n t}$$

- Substituindo

$$\sum_n v_n^e e^{j\omega_n t} = \frac{1}{\omega_{RC}} \frac{d\hat{V}_C(t)}{dt} + \hat{V}_C(t), \quad \text{e fazendo} \quad \hat{V}_C(t) = \sum_n \hat{v}_n^c e^{j\omega_n t}$$

$$\sum_n v_n^e e^{j\omega_n t} = \sum_n \left[ \left( j\frac{\omega_n}{\omega_{RC}} + 1 \right) \hat{v}_n^c e^{j\omega_n t} \right]$$

# Como se resolve a e.d. nesse caso?

- Que pode ser desmembrado em um sistema de e.d.

$$v_0^e e^{j\omega_0 t} = \left( j\frac{\omega_0}{\omega_{RC}} + 1 \right) \hat{v}_0^c e^{j\omega_0 t} \Rightarrow \hat{v}_0^c = \frac{v_0^e}{1 + j\frac{\omega_0}{\omega_{RC}}}$$

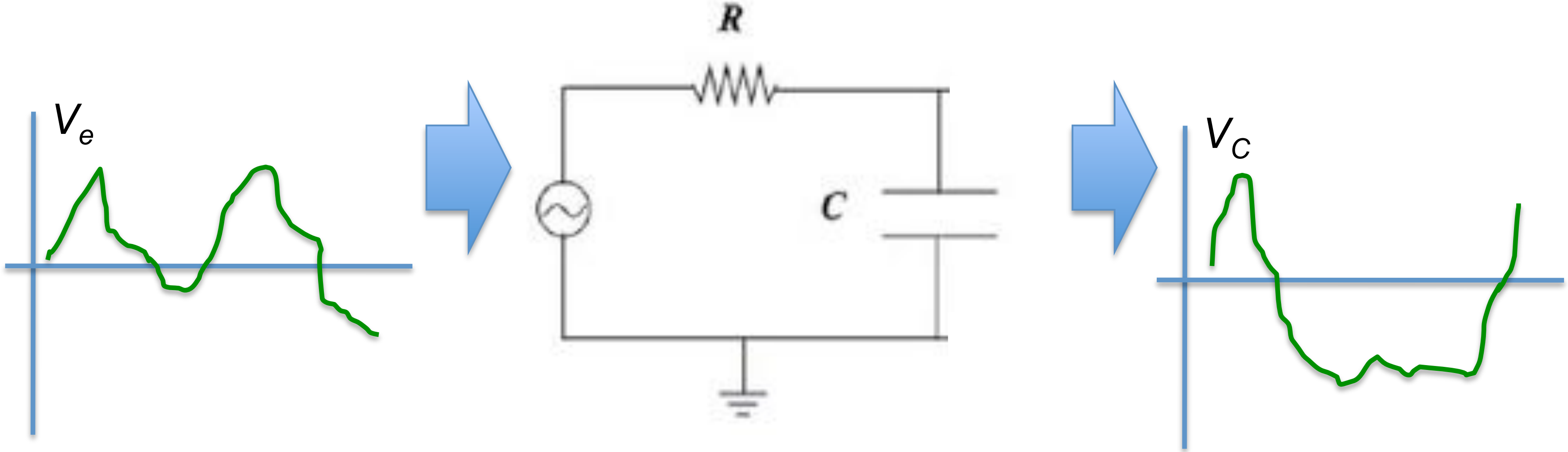
$$v_1^e e^{j\omega_1 t} = \left( j\frac{\omega_1}{\omega_{RC}} + 1 \right) \hat{v}_1^c e^{j\omega_1 t} \Rightarrow \hat{v}_1^c = \frac{v_1^e}{1 + j\frac{\omega_1}{\omega_{RC}}}$$

$$\vdots$$

$$v_n^e e^{j\omega_n t} = \left( j\frac{\omega_n}{\omega_{RC}} + 1 \right) \hat{v}_n^c e^{j\omega_n t} \Rightarrow \hat{v}_n^c = \frac{v_n^e}{1 + j\frac{\omega_n}{\omega_{RC}}}$$

# Ou seja:

- Circuitos podem causar distorções em sinais elétricos




$$V_e(t) = \begin{bmatrix} V_1^s \sin(\omega_1 t) + \\ V_1^c \cos(\omega_1 t) + \\ V_2^s \sin(\omega_2 t) + \\ V_2^c \cos(\omega_2 t) + \\ \ldots + \\ V_N^s \sin(\omega_N t) + \\ V_N^c \cos(\omega_N t) \end{bmatrix}$$

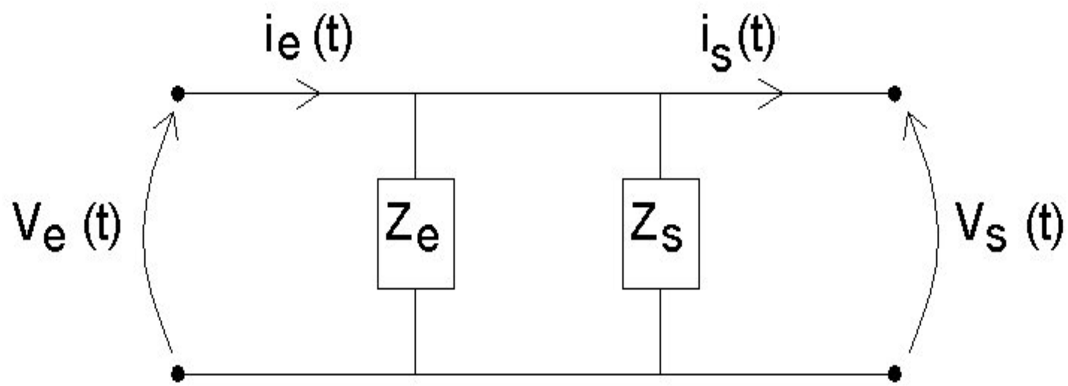
$$G_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_i}{\omega_{RC}}\right)^2}}$$

$$\phi_i = \arctan\left(-\frac{\omega_i}{\omega_{RC}}\right)$$

$$V_C(t) = \begin{bmatrix} G_1 \cdot V_1^e \sin(\omega_1 t + \phi_1) + \\ G_1 \cdot V_1^e \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \\ G_2 \cdot V_2^e \sin(\omega_2 t + \phi_2) + \\ G_2 \cdot V_2^e \cos(\omega_2 t + \phi_2) + \\ \ldots + \\ G_N \cdot V_N^e \sin(\omega_N t + \phi_N) + \\ G_N \cdot V_N^e \cos(\omega_N t + \phi_N) \end{bmatrix}$$

# Generalizando um pouco

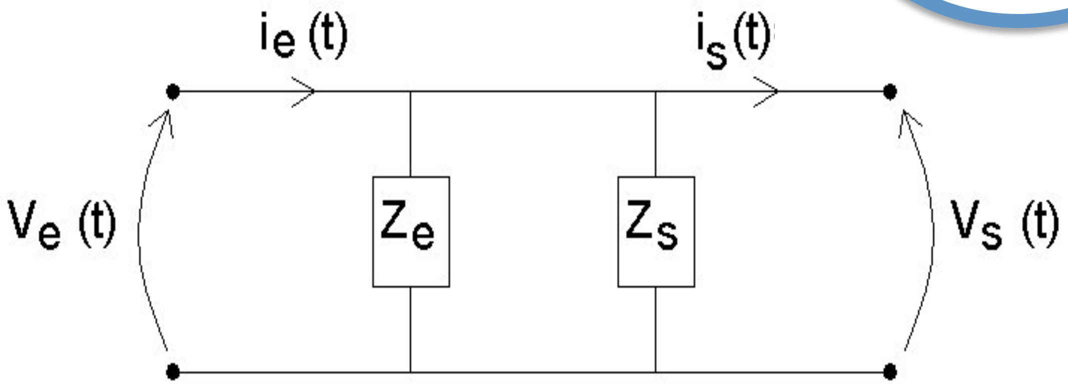
- Quadripolos elétricos
  - Qualquer circuito onde aplica-se uma tensão de entrada e obtém-se uma tensão na saída, modificada pelo circuito.



# Generalizando um pouco

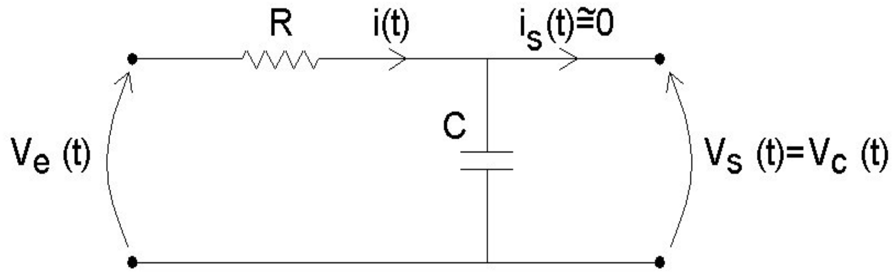
- Definições relevantes
  - Impedância de entrada, saída e ganho

$$\hat{Z}_e = \frac{\hat{V}_e}{\hat{i}_e} \qquad \hat{Z}_s = \frac{\hat{V}_s}{\hat{i}_s} \qquad \hat{G} = \frac{\hat{V}_s}{\hat{V}_e}$$



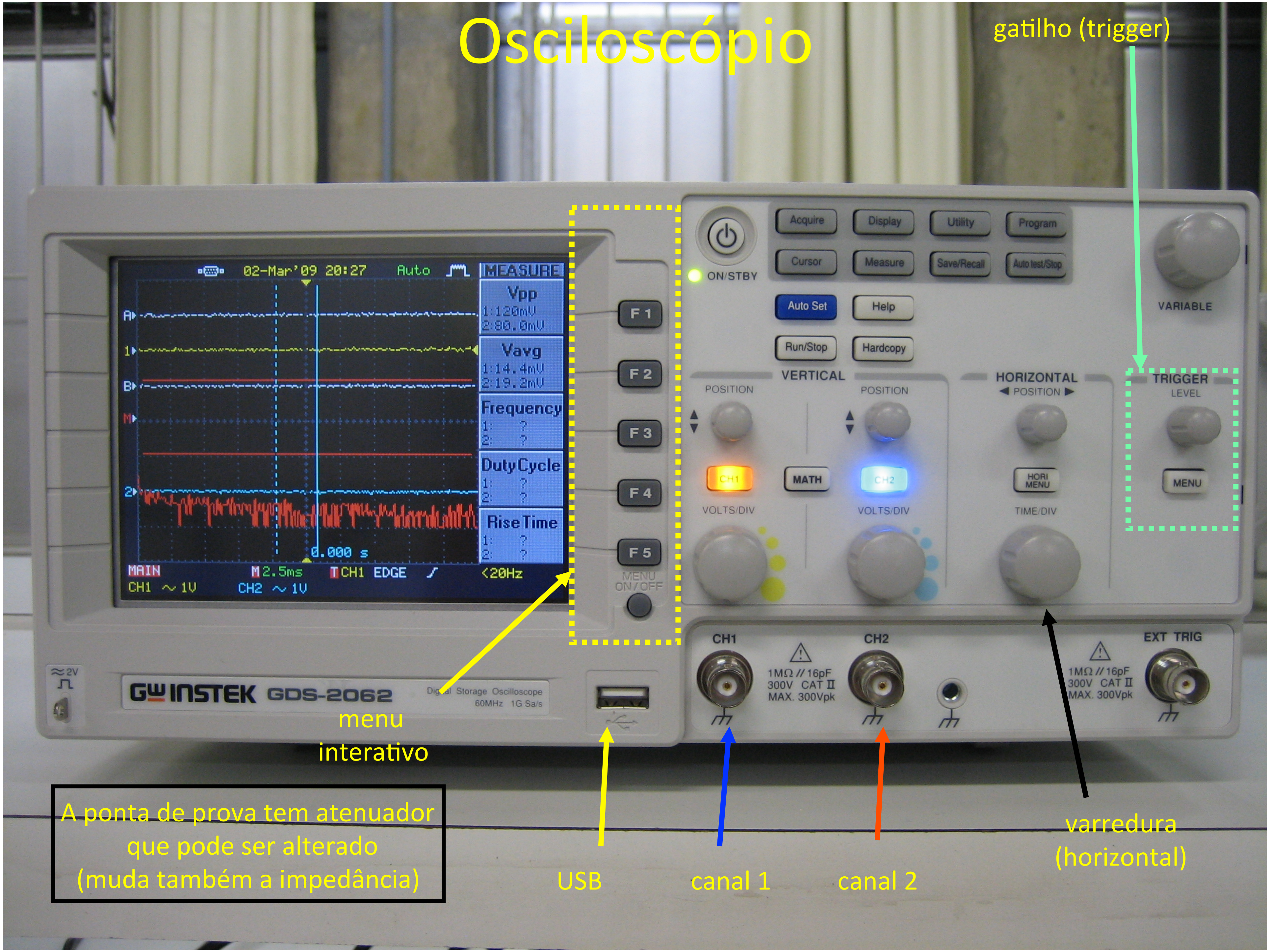
# Objetivos desta aula

- Nesta aula vamos estudar o seguinte filtro RC



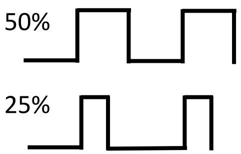

- Objetivos:
  - Obter experimentalmente o ganho (*amplitude e fase*)
  - Estudar o comportamento desse circuito para um sinal de entrada quadrado.

# Osciloscópio

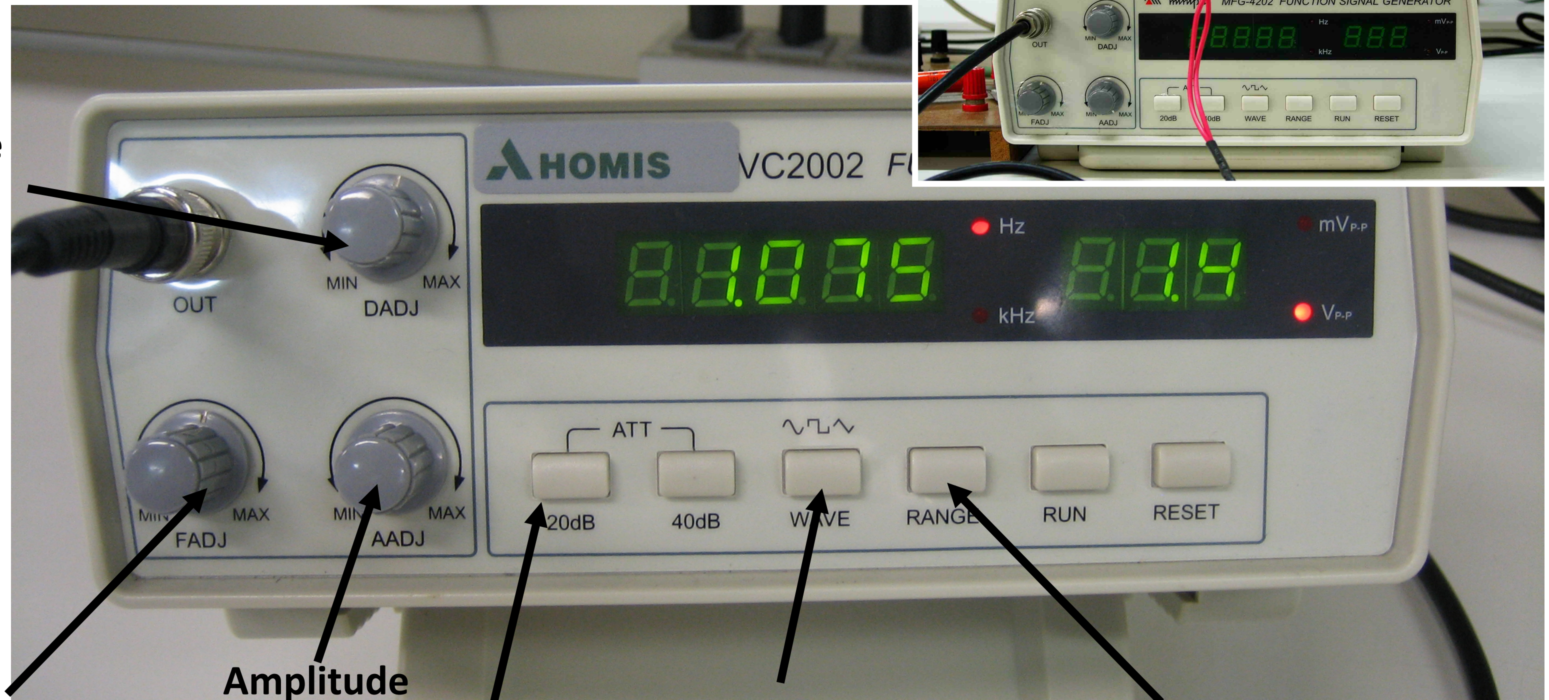


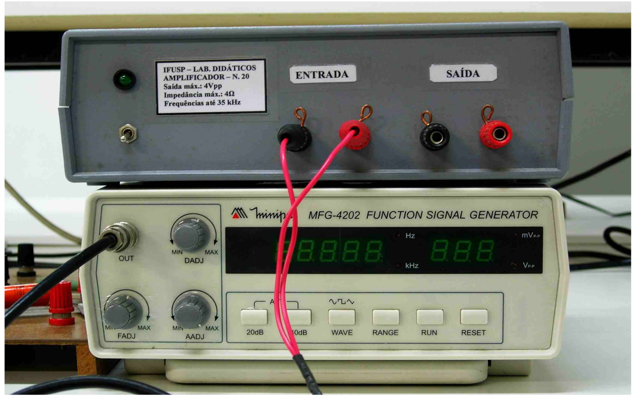
# Gerador de funções

IMPORTANTE!




Duty cycle ADJust




Frequency ADJust

Amplitude ADJust

atenuador

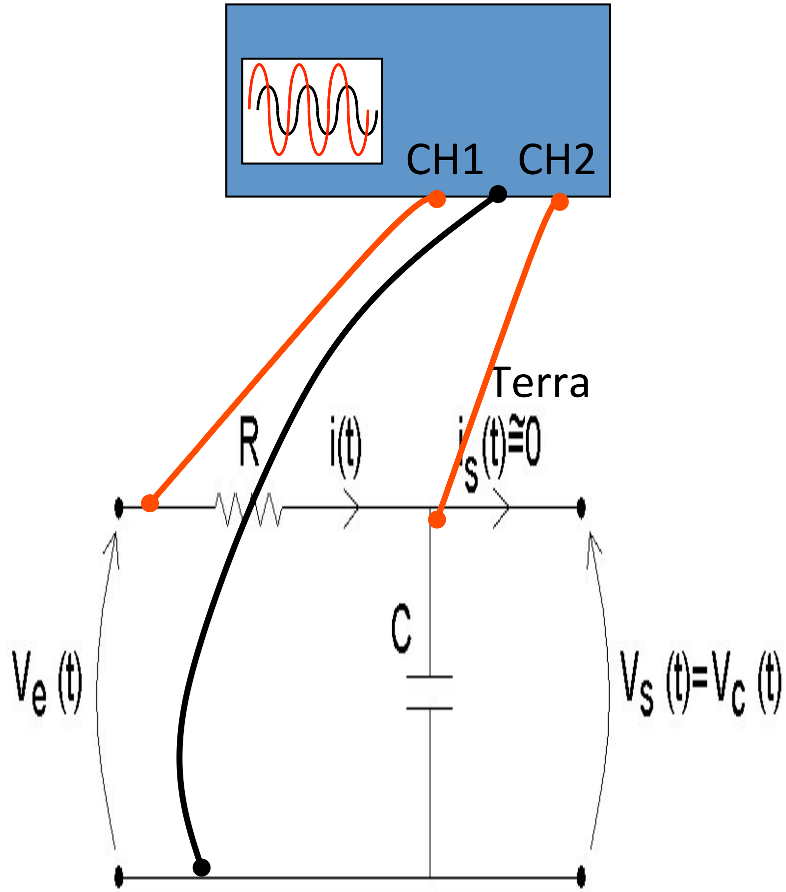
intervalo de frequências

Executa parâmetro

# Bipolos

# Cuidados experimentais

- Instrumentos de medida
  - Osciloscópio
    - Canal 1: $V_e$
    - Canal 2: $V_C$
  - Montar filtro RC com $f_{RC}$ ~ 500 Hz
  - Cuidado com ruídos
    - Estimar incertezas na tensão e corrente a partir do nível de ruído
  - Não confundir frequência temporal ($f$) com frequência angular ($\omega$)



# Tomada de dados e análise, parte 1

- Medir o ganho experimental, dado pela razão entre tensão no capacitor e tensão de entrada em função da frequência.

- Medir a fase entre tensão no capacitor e tensão de entrada em função da frequência

- Fazer ajustes necessários e tratamento estatístico aos dados acima e comparar os resultados com valores esperados "teoricamente"

- Que faixa de frequências medir? Lembre-se que um bom parâmetro para definir isso é $\omega_{RC}$ e os pedidos seguintes.

# Tomada de dados e análise, parte 2

- Medir $V_e(t)$ e $V_C(t)$ para três frequências de ONDA QUADRADA
  - $\omega \sim 1/3\ \omega_{RC}$
  - $\omega \sim 2\ \omega_{RC}$
  - $\omega >> \omega_{RC}$ (pelo menos 30 vezes maior)

- Mostrar que $V_C(t)$ pode ser obtido através da aplicação do ganho e fase para cada frequência que compõe a onda quadrada de entrada
  - Compare a sua previsão "teórica" com a medida experimental de $V_C(t)$.
  - EXTRA: Discuta o efeito da escolha do número de termos da sua série de fourier na comparação entre a previsão teórica e os dados experimentais.

# Tomada de dados e análise, parte 3

- Na terceira medida realizada anteriormente para a onda quadrada, $\omega >> \omega_{RC}$, mostre (a partir da análise dos dados obtidos) que o sinal de saída é proporcional à integral do sinal de entrada.
  - Neste caso, como a entrada é um sinal quadrado, significa que a saída será um triângulo, certo?
  - Deduza a afirmação acima e mostre que as “inclinações” medidas e teóricas da onda triangular na saída são compatíveis